

Mesure, incertitudes et exploitation de données

COURS • P18 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Identifier les sources de variabilité d'une mesure et distinguer erreur aléatoire et erreur systématique.
- Définir l'incertitude-type et expliquer ce qu'elle représente.
- Évaluer une incertitude-type par une approche statistique (type A) à partir d'une série de mesures répétées.
- Évaluer une incertitude-type par une autre approche (type B) à partir d'une graduation, d'une notice ou d'une tolérance.
- Écrire un résultat de mesure avec un nombre adapté de chiffres significatifs et son unité.
- Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude-type d'une grandeur calculée à partir d'autres grandeurs (somme, produit, quotient, puissance).
- Comparer un résultat à une valeur de référence à l'aide du quotient $|x - x_{\text{réf}}| / u(x)$.
- Choisir un modèle, linéariser une relation et exploiter une régression linéaire (pente, ordonnée à l'origine, résidus).
- Discuter la validité d'un modèle et proposer des pistes pour réduire l'incertitude.

Cours

1. Mesurer : mesurande, variabilité et erreurs

Le **mesurande** est la grandeur que l'on veut mesurer : la période d'un pendule, la concentration d'une solution, la célérité du son. Le **mesurage** est l'ensemble des opérations qui permettent d'obtenir une valeur. La valeur obtenue s'appelle le **résultat de mesure**.

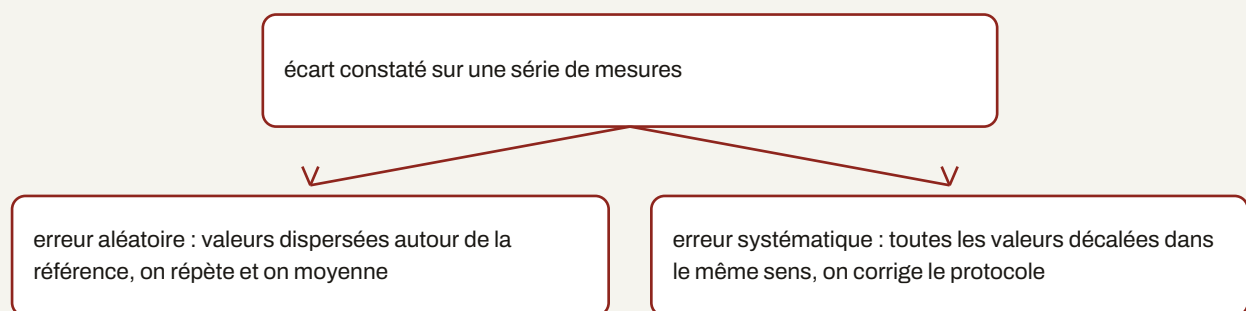
Si l'on répète plusieurs fois le même mesurage, avec le même protocole, on n'obtient généralement pas exactement la même valeur : c'est la **variabilité** de la mesure. Elle a de nombreuses causes : temps de réaction de l'opérateur, lecture d'une graduation, fluctuations de température, bruit électrique, imperfections de l'échantillon. La valeur « vraie » du mesurande reste inconnue : on ne peut que l'estimer et dire avec quelle confiance.

On distingue deux types d'erreurs.

- L'**erreur aléatoire** varie de façon imprévisible d'une mesure à l'autre, tantôt par excès, tantôt par défaut. Elle se réduit en moyennant un grand nombre de mesures.
- L'**erreur systématique** décale toutes les mesures dans le même sens : balance mal tarée, chronomètre déclenché toujours en retard, appareil mal étalonné. Moyenner ne la réduit pas ; il faut la détecter (comparaison à une référence, changement de méthode) puis corriger le protocole.

Une mesure est **fidèle** si les valeurs répétées sont peu dispersées (faible erreur aléatoire) et **juste** si leur moyenne est proche de la valeur de référence (faible erreur systématique). L'image de la cible est classique : des impacts serrés mais décentrés traduisent une mesure fidèle mais non juste.

Origine d'un écart à la valeur de référence



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

2. L'incertitude-type

L'**incertitude-type** $u(x)$ associée au résultat x est un paramètre positif qui caractérise la dispersion des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer au mesurande. Elle a la même unité que x . Plus elle est petite, plus le résultat est précis.

On définit aussi l'**incertitude-type relative** $u(x)/|x|$, sans unité, souvent exprimée en pourcentage. Elle permet de comparer la précision de mesures de natures différentes : une incertitude de 1 mm sur une longueur de 1 m (0,1 %) est bien meilleure qu'une incertitude de 1 mm sur 1 cm (10 %).

Il existe deux façons d'évaluer une incertitude-type : par une analyse statistique de mesures répétées (**type A**) ou par tout autre moyen, à partir des caractéristiques de l'instrument et du protocole (**type B**). Les deux conduisent à une grandeur de même nature et se combinent de la même façon.

3. Évaluation de type A : la statistique des mesures répétées

On réalise n mesures indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ du même mesurande, dans les mêmes conditions.

La meilleure estimation du mesurande est la **moyenne arithmétique** :

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$$

La dispersion des valeurs est caractérisée par l'**écart-type expérimental** :

$$s = \sqrt{(\sum(x_i - \bar{x})^2) / (n - 1)}$$

On divise par $n - 1$ et non par n , car les écarts sont calculés par rapport à $\bar{x}$, elle-même tirée des données : il ne reste que $n - 1$ écarts indépendants. Les calculatrices et tableurs fournissent s directement (notation σ_{n-1} ou s , fonction ECARTYPE ou ECARTYPE.STANDARD selon le logiciel ; ne confonds pas avec σ_n).

s caractérise la dispersion d'une mesure isolée. La moyenne de n mesures est moins dispersée qu'une mesure isolée ; son incertitude-type vaut :

$$u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$$

Conséquence importante : pour diviser l'incertitude-type par 2, il faut multiplier le nombre de mesures par 4 ; pour la diviser par 10, par 100. Répéter améliore la précision, mais de plus en plus lentement. Et répéter ne corrige jamais une erreur systématique.

Pour visualiser une série, on trace un **histogramme** des valeurs : il est en général centré sur la moyenne, et sa largeur est de l'ordre de quelques s . Pour un grand nombre de mesures, environ 95 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle $[\bar{x} - 2s ; \bar{x} + 2s]$ lorsque la distribution a une allure de courbe en cloche.

4. Évaluation de type B : instrument, graduation, tolérance

Lorsqu'on ne réalise qu'une mesure, ou que la répétition ne fait pas apparaître de variabilité (toutes les lectures sont identiques), on évalue l'incertitude-type à partir des informations disponibles. Au lycée, on retient les cas suivants.

Lecture sur une graduation. Si la plus petite graduation vaut g et que la lecture se fait sur une seule position (thermomètre, burette lue à un trait, cadran), la valeur est comprise, de façon également probable, dans un intervalle de demi-largeur $g/2$ autour de la valeur lue. On prend :

$$u = g/\sqrt{12}$$

Pour une mesure de longueur à la règle, il y a deux lectures (début et fin de l'objet), chacune d'incertitude $g/\sqrt{12}$; les deux se combinent (partie 6), ce qui donne $u = \sqrt{2} \times g/\sqrt{12} = g/\sqrt{6}$.

Tolérance donnée par le fabricant. Si la notice indique une valeur comprise dans $\pm a$ (verrerie jaugée « 100,0 mL $\pm$ 0,1 mL », balance « $\pm$ 0,01 g », multimètre « $\pm$ (1 % + 2 digits) »), on prend :

$$u = a/\sqrt{3}$$

Exemple : pour une fiole jaugée de 100,0 mL $\pm$ 0,1 mL, $u(V) = 0,1/\sqrt{3} = 0,058$ mL.

Affichage numérique sans indication du fabricant : on peut prendre comme demi-largeur la moitié du dernier chiffre affiché, soit $u = (\text{une unité du dernier chiffre})/\sqrt{12}$. C'est une limite inférieure : l'appareil est rarement aussi précis que son affichage.

Jugement de l'expérimentateur. Parfois, la principale source d'incertitude n'est pas l'appareil mais la mise en œuvre : repérer la position d'une image nette sur un banc d'optique, juger du virage d'un indicateur coloré. On estime alors un intervalle de valeurs plausibles de demi-largeur a et on prend $u = a/\sqrt{3}$.

Ces formules sont des conventions raisonnables, fournies en général par l'énoncé. L'essentiel est de comprendre qu'une incertitude de type B se déduit d'une demi-largeur d'intervalle divisée par un

facteur de l'ordre de 2 ou 3.

5. Écrire un résultat de mesure

Chiffres significatifs. Les chiffres significatifs d'un nombre sont tous ses chiffres à partir du premier chiffre non nul en partant de la gauche. Ainsi 0,00450 possède 3 chiffres significatifs (4, 5 et 0 final) ; $2,030 \times 10^3$ en possède 4 ; 0,7 en possède 1. Les zéros à gauche ne comptent pas ; les zéros à droite comptent et indiquent la précision. Écrire 12 cm ou 12,0 cm ne dit pas la même chose. Pour éviter les ambiguïtés sur les grands nombres (1 200 m a-t-il 2, 3 ou 4 chiffres significatifs ?), on utilise l'écriture scientifique : $1,20 \times 10^3$ m.

Règle d'écriture. Un résultat de mesure s'écrit :

$$x = (\bar{x} \pm u(x)) \text{ unité, ou bien } x = \bar{x} \text{ unité avec } u(x) = \dots \text{ unité.}$$

On applique deux règles :

1. l'incertitude-type est arrondie à **un ou deux chiffres significatifs**, de préférence par excès (on ne veut pas se montrer plus précis qu'on ne l'est) ;
2. la valeur est arrondie à la **même position décimale** que le dernier chiffre de l'incertitude.

Exemples : une moyenne de $9,8123 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ avec $u = 0,0456 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ s'écrit $g = (9,81 \pm 0,05) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Une célérité de $342,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec $u = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ s'écrit $c = (343 \pm 12) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Un résultat sans incertitude ni unité n'est pas un résultat de mesure.

Dans un calcul sans incertitude explicite, la convention usuelle est de donner le résultat avec le même nombre de chiffres significatifs que la donnée la moins précise. Dans les calculs intermédiaires, on garde un ou deux chiffres de plus et on n'arrondit qu'à la fin.

6. Incertitudes composées

Souvent, la grandeur cherchée n'est pas mesurée directement mais calculée : une masse volumique $\rho = m/V$, une résistance $R = U/I$, une concentration par titrage. Les incertitudes des grandeurs mesurées se **propagent** au résultat. Les formules sont fournies au bac ; il faut savoir les appliquer et les interpréter. Elles supposent que les sources d'incertitude sont **indépendantes**.

Somme ou différence : si $y = x_1 + x_2$ ou $y = x_1 - x_2$,

$$u(y) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$$

Les **incertitudes absolues** s'ajoutent « en quadrature ». Remarque : une différence de deux grandeurs proches peut avoir une incertitude relative énorme.

Produit ou quotient : si $y = x_1 \cdot x_2$ ou $y = x_1/x_2$,

$$u(y)/|y| = \sqrt{(u(x_1)/x_1)^2 + (u(x_2)/x_2)^2}$$

Ce sont les **incertitudes relatives** qui s'ajoutent en quadrature.

Puissance : si $y = x^n$, $u(y)/|y| = |n| \cdot u(x)/|x|$. Une grandeur élevée au carré double son incertitude relative. Plus généralement, pour $y = k \cdot x_1 \cdot x_2 \dots$ (k constante exacte) :

$$u(y)/|y| = \sqrt{(a \cdot u(x_1)/x_1)^2 + (b \cdot u(x_2)/x_2)^2 + \dots}$$

Pourquoi la quadrature et pas une simple somme ? Les erreurs indépendantes ont peu de chances d'être maximales et de même sens simultanément : elles se compensent en partie. La somme quadratique est plus faible que la somme simple, mais plus grande que chacun des termes.

Le terme dominant. Dans une somme quadratique, le plus grand terme pèse beaucoup plus que les autres. Si une incertitude relative vaut 1 % et une autre 0,2 %, le total vaut $\sqrt{(1 + 0,04)} \% \approx 1,02 \%$: la seconde est négligeable. Pour améliorer une mesure, il faut donc identifier la source dominante et agir sur elle, pas sur les autres.

Simulation de Monte-Carlo. Quand la formule est compliquée ou inconnue, on peut simuler : un programme (en Python par exemple) tire au hasard un grand nombre de valeurs de chaque grandeur d'entrée, compatibles avec leurs incertitudes-types, calcule pour chaque tirage la grandeur de sortie, puis en prend l'écart-type. Cet écart-type est l'incertitude-type cherchée. Cette méthode retrouve les formules ci-dessus quand elles s'appliquent.

7. Comparer à une valeur de référence

Pour juger de l'accord entre un résultat x , d'incertitude-type $u(x)$, et une valeur de référence $x_{\text{réf}}$ (valeur tabulée, valeur théorique, considérée comme connue avec une incertitude négligeable), on calcule le quotient :

$$z = |x - x_{\text{réf}}| / u(x)$$

Ce nombre sans unité mesure l'écart en nombre d'incertitudes-types. Le critère usuel au lycée est :

- $z \leq 2$: le résultat est **compatible** avec la valeur de référence, l'écart s'explique par la variabilité ;
- $z > 2$: le résultat n'est **pas compatible**. Il faut chercher une erreur systématique, une source d'incertitude sous-estimée, ou remettre en cause le modèle, ou encore la valeur de référence elle-même (conditions différentes).

Le seuil 2 est une convention : l'énoncé peut en fixer un autre. Pour comparer **deux résultats expérimentaux** x_1 et x_2 , on utilise la même idée avec l'incertitude de la différence : $z = |x_1 - x_2| / \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$.

On rencontre aussi l'**écart relatif** $|x - x_{\text{réf}}| / |x_{\text{réf}}|$, en pourcentage. Il est utile pour juger d'un ordre de grandeur, mais il ne tient pas compte de l'incertitude : un écart relatif de 1 % peut être excellent ou inacceptable selon la précision de la mesure. C'est z qui permet de conclure.

8. Modélisation et régression linéaire

Modéliser une série de mesures (x_i, y_i) , c'est chercher une fonction $y = f(x)$ qui rend compte des données, en général suggérée par une loi physique. Le cas le plus exploitable est la fonction affine $y = a \cdot x + b$, ou linéaire $y = a \cdot x$.

La régression linéaire (méthode des moindres carrés) détermine la droite qui minimise la somme des carrés des écarts verticaux entre les points et la droite. Avec $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes des x_i et des y_i :

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \text{ et } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

La calculatrice ou le tableur fournit a et b , souvent avec leurs incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$. La droite passe toujours par le point moyen $(\bar{x}; \bar{y})$.

Juger la qualité du modèle.

- **Graphiquement** : les points doivent être répartis de part et d'autre de la droite, sans courbure systématique.
- **Les résidus** $r_i = y_i - (a \cdot x_i + b)$ doivent être petits (de l'ordre des incertitudes sur y_i) et de signes répartis au hasard. Des résidus tous positifs aux extrémités et négatifs au milieu révèlent une courbure : le modèle affine n'est pas adapté.

- Le coefficient de corrélation r (ou r^2) proche de 1 indique un alignement, mais il ne suffit pas : une courbe légèrement incurvée peut donner $r^2 = 0,99$. Les résidus sont plus informatifs.
- L'ordonnée à l'origine : si la loi prévoit $y = a \cdot x$ (droite passant par l'origine), on vérifie que b est compatible avec 0, c'est-à-dire $|b| \leq 2 \cdot u(b)$.

Linéariser. Beaucoup de lois ne sont pas affines, mais deviennent affines par un changement de variable bien choisi.

Loi physique	On trace	Droite de pente
Pendule simple : $T = 2\pi \cdot \sqrt{L/g}$	T^2 en fonction de L	$4\pi^2/g$
Décharge d'un condensateur : $u = E \cdot \exp(-t/\tau)$	$\ln(u)$ en fonction de t	$-1/\tau$
Lentille mince : $1/OA' - 1/OA = 1/f'$	$1/OA'$ en fonction de $1/OA$	1 (ordonnée à l'origine $1/f'$)
Beer-Lambert : $A = k \cdot C$	A en fonction de C	k

Interpoler, pas extrapoler. Une droite d'étalonnage n'est validée que dans l'intervalle couvert par les mesures. Lire une valeur en dehors (extrapolation) suppose que le modèle reste valable, ce qui n'est pas toujours le cas (saturation d'un capteur, écart à la loi de Beer-Lambert aux fortes concentrations).

Exploiter des données expérimentales

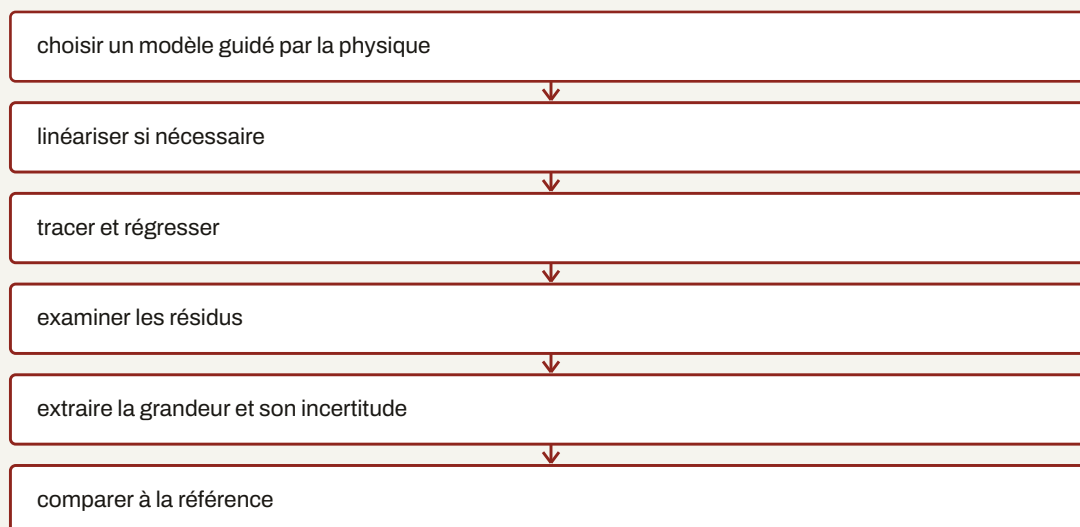


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Exemples résolus

Exemple 1 : évaluation de type A d'une période

Huit élèves mesurent au chronomètre la période d'un même pendule. Ils obtiennent, en secondes : 1,52 ; 1,49 ; 1,55 ; 1,50 ; 1,53 ; 1,48 ; 1,51 ; 1,54. a) Calculer la moyenne et l'écart-type expérimental. b) Calculer l'incertitude-type sur la moyenne et écrire le résultat.

Résolution. a) Somme : 12,12 s, donc $T = 12,12/8 = 1,515$ s. Écarts à la moyenne (s) : 0,005 ; -0,025 ; 0,035 ; -0,015 ; 0,015 ; -0,035 ; -0,005 ; 0,025. Carrés (en 10^{-4} s^2) : 0,25 ; 6,25 ; 12,25 ; 2,25 ; 2,25 ; 12,25 ; 0,25 ; 6,25, de somme $42,0 \times 10^{-4} \text{ s}^2$. $s = \sqrt{(42,0 \times 10^{-4} / 7)} = \sqrt{(6,0 \times 10^{-4})} = 0,0245$ s. b) $u(T) = s/\sqrt{8} = 0,0245/2,83 = 0,0087$ s, arrondie par excès à 0,009 s. $T = (1,515 \pm 0,009)$ s.

Exemple 2 : masse volumique, propagation et comparaison

On mesure la masse d'un volume de liquide prélevé à la pipette jaugée : $m = 25,04$ g avec une balance de tolérance $\pm 0,01$ g ; $V = 25,00$ mL avec une pipette de tolérance $\pm 0,03$ mL. Donnée : masse volumique de l'eau pure à 20°C , $\rho_{\text{réf}} = 0,9982 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$. a) Calculer les incertitudes-types $u(m)$ et $u(V)$. b) Calculer ρ et $u(\rho)$, sachant que $u(\rho)/\rho = \sqrt{((u(m)/m)^2 + (u(V)/V)^2)}$. c) Le liquide est-il de l'eau pure ?

Résolution. a) Évaluation de type B à partir des tolérances : $u(m) = 0,01/\sqrt{3} = 0,0058$ g ; $u(V) = 0,03/\sqrt{3} = 0,017$ mL. b) $\rho = m/V = 25,04/25,00 = 1,0016 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$. $u(m)/m = 0,0058/25,04 = 2,3 \times 10^{-4}$; $u(V)/V = 0,0173/25,00 = 6,9 \times 10^{-4}$. $u(\rho)/\rho = \sqrt{((2,3 \times 10^{-4})^2 + (6,9 \times 10^{-4})^2)} = 7,3 \times 10^{-4}$, donc $u(\rho) = 1,0016 \times 7,3 \times 10^{-4} = 7,3 \times 10^{-4} \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$. $\rho = (1,0016 \pm 0,0008) \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$. La pipette est la source dominante. c) $z = |1,0016 - 0,9982| / 0,00073 = 0,0034/0,00073 \approx 4,7$. $z > 2$: le résultat n'est pas compatible avec l'eau pure. Le liquide est probablement une solution aqueuse (eau salée par exemple), à moins d'une erreur systématique (pipette mal utilisée, balance non tarée) qu'il faudrait écarter.

Exemple 3 : mesure de g par régression linéaire

On mesure la période T d'un pendule simple pour plusieurs longueurs L . La théorie prévoit $T = 2\pi \cdot \sqrt{L/g}$.

L (m)	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
$T^2 (\text{s}^2)$	0,81	1,59	2,43	3,21	4,03

a) Justifier le choix de tracer T^2 en fonction de L . b) Déterminer la pente a et l'ordonnée à l'origine b de la droite de régression. c) En déduire g . Le logiciel donne $u(a) = 0,03 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$; calculer $u(g)$ et comparer à $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Résolution. a) En élevant au carré : $T^2 = (4\pi^2/g) \cdot L$. T^2 est une fonction linéaire de L , de pente $4\pi^2/g$: on obtient une droite passant par l'origine, facile à valider. b) $L = 0,60$ m ; moyenne des T^2 : $12,07/5 = 2,414 \text{ s}^2$. $\Sigma(L - \bar{L})(T^2 - \text{moyenne}) = (-0,4)(-1,604) + (-0,2)(-0,824) + 0 + (0,2)(0,796) + (0,4)(1,616) = 0,6416 + 0,1648 + 0,1592 + 0,6464 = 1,612$. $\Sigma(L - \bar{L})^2 = 0,16 + 0,04 + 0 + 0,04 + 0,16 = 0,40$. $a = 1,612/0,40 = 4,03 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$; $b = 2,414 - 4,03 \times 0,60 = -0,004 \text{ s}^2$, négligeable devant les valeurs de T^2 : la droite passe pratiquement par l'origine, comme prévu. Les résidus valent 0,008 ; -0,018 ; 0,016 ; -0,010 ; 0,004 s^2 : petits et de signes alternés, le modèle est validé. c) $g = 4\pi^2/a = 39,48/4,03 = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. g est proportionnel à $1/a$, donc $u(g)/g = u(a)/a = 0,03/4,03 = 7,4 \times 10^{-3}$ et $u(g) = 9,80 \times 7,4 \times 10^{-3} = 0,073 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. $g = (9,80 \pm 0,08) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. $z = |9,80 - 9,81| / 0,073 \approx 0,14 \leq 2$: résultat compatible avec la valeur de référence.

Méthodes et pièges

- Méthode type : identifier les sources d'incertitude, évaluer chacune (type A ou B), les combiner avec la formule fournie, écrire le résultat, comparer avec z .
- Ne confonds pas s (dispersion d'une mesure) et $u(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$ (incertitude sur la moyenne) : oublier la division par $\sqrt{n}$ surestime l'incertitude.

- Vérifie que ta calculatrice utilise $n - 1$ (σ_{n-1}) et non n .
- Arrondis l'incertitude à 1 ou 2 chiffres significatifs, puis la valeur à la même décimale : « $9,8123 \pm 0,0456$ » n'est pas une écriture acceptable.
- Pour une somme, combine les incertitudes absolues ; pour un produit ou un quotient, les incertitudes relatives. Mélanger les deux est l'erreur classique.
- N'oublie pas l'exposant : pour $y = x^2$, l'incertitude relative est doublée.
- Une conclusion de comparaison se justifie par z , pas par l'écart relatif seul ni par « les valeurs sont proches ».
- Un coefficient r^2 proche de 1 ne prouve pas que le modèle est bon : regarde la répartition des résidus.
- Ne lis pas une valeur sur une droite d'étalonnage en dehors du domaine des mesures.
- Répéter les mesures ne corrige pas une erreur systématique : si z est grand, cherche un biais dans le protocole.

Vers le PASS

En PASS, la mesure et ses incertitudes structurent la physique, la chimie analytique et la biostatistique. En physique, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier une formule avant tout calcul, et la propagation des incertitudes s'écrit à l'aide de la différentielle logarithmique, qui redonne exactement les formules de ce chapitre (le facteur $|n|$ de la puissance en est une conséquence directe). En biostatistique, la moyenne, l'écart-type et l'erreur-type $s/\sqrt{n}$ deviennent les briques des intervalles de confiance et des tests statistiques, et le quotient z prend le sens d'une statistique de test. En analyse pharmaceutique et en biologie médicale, on retrouve les notions de justesse, de fidélité, de droite d'étalonnage, de résidus et de domaine de linéarité pour valider une méthode de dosage. Les QCM jouent souvent sur ces pièges : diviser ou non par $\sqrt{n}$, additionner des incertitudes absolues au lieu de relatives, conclure à partir d'un r^2 seul.

Suite en PASS : Mesures, dimensions et incertitudes

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. a) Donner le nombre de chiffres significatifs de : $0,00450$; $2,030 \times 10^3$; $1,20 \times 10^2$; $0,7$.
b) Arrondir $3,14159$ à 3 chiffres significatifs et $0,0026851$ à 2 chiffres significatifs.
2. Un thermomètre à liquide est gradué tous les $0,5^\circ\text{C}$. On lit $21,5^\circ\text{C}$. Calculer l'incertitude-type de type B associée à cette lecture et écrire le résultat.
3. Cinq titrages identiques donnent les volumes équivalents suivants, en mL : $12,4$; $12,6$; $12,5$; $12,3$; $12,7$. Calculer la moyenne, l'écart-type expérimental, l'incertitude-type sur la moyenne, et écrire le résultat.
4. Réécrire correctement les résultats suivants (incertitude à 1 ou 2 chiffres significatifs, valeur arrondie en conséquence) :
a) $g = 9,8123 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ avec $u = 0,0456 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; b) $c = 342,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ avec $u = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; c) $m = 152,368 \text{ g}$ avec $u = 0,24 \text{ g}$.

5. a) On mesure la célérité du son : $c = (338 \pm 4) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La valeur de référence dans les conditions de l'expérience est $343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Conclure.
- b) On mesure la longueur d'onde d'une raie de l'hydrogène : $\lambda = (652 \pm 2) \text{ nm}$, pour une valeur tabulée de $656,3 \text{ nm}$. Conclure.

Niveau 2 : type bac

6. On mesure la longueur d'un objet à la règle graduée en millimètres. L'extrémité gauche est lue à $3,00 \text{ cm}$, l'extrémité droite à $12,50 \text{ cm}$.
- a) Calculer la longueur L . b) Calculer l'incertitude-type de chaque lecture. c) Sachant que $u(L) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$, calculer $u(L)$ et écrire le résultat.
7. On détermine la résistance d'un conducteur ohmique par $R = U/I$. On mesure $U = 5,02 \text{ V}$ avec $u(U) = 0,03 \text{ V}$ et $I = 22,8 \text{ mA}$ avec $u(I) = 0,2 \text{ mA}$. Donnée : $u(R)/R = \sqrt{((u(U)/U)^2 + (u(I)/I)^2)}$.
- a) Calculer R . b) Calculer $u(R)$ et écrire le résultat. c) Quelle mesure limite la précision ? d) Le fabricant annonce 220Ω . Le résultat est-il compatible ?
8. On titre $V_A = 10,00 \text{ mL}$ d'une solution d'acide par une solution de soude de concentration $C_B = 0,100 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Le volume équivalent est $V_E = 12,50 \text{ mL}$. Incertitudes-types : $u(C_B) = 0,001 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $u(V_E) = 0,07 \text{ mL}$; $u(V_A) = 0,02 \text{ mL}$.
- a) Calculer $C_A = C_B \cdot V_E / V_A$. b) Calculer $u(C_A)$, sachant que $u(C_A)/C_A = \sqrt{((u(C_B)/C_B)^2 + (u(V_E)/V_E)^2 + (u(V_A)/V_A)^2)}$. c) Écrire le résultat et identifier le terme dominant.
9. On établit une droite d'étalonnage en spectrophotométrie.

C (mmol·L ⁻¹)	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50
A	0,121	0,238	0,362	0,481	0,598

- a) Calculer la pente a et l'ordonnée à l'origine b de la droite de régression $A = a \cdot C + b$. b) Le modèle de Beer-Lambert est-il validé ? c) Une solution inconnue a une absorbance de $0,300$. Déterminer sa concentration. d) Peut-on utiliser cette droite pour une solution d'absorbance $0,90$? Justifier.

Niveau 3 : vers le PASS

10. On mesure g par une chute libre sans vitesse initiale : une bille tombe d'une hauteur $h = 1,000 \text{ m}$ en une durée $t = 0,452 \text{ s}$, avec $u(h) = 0,002 \text{ m}$ et $u(t) = 0,003 \text{ s}$. On utilise $g = 2h/t^2$.
- a) Calculer g . b) Écrire la formule de $u(g)/g$ et calculer $u(g)$. c) Écrire le résultat et le comparer à $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. d) Quelle source d'incertitude domine ? Combien de mesures de t faudrait-il moyenner pour diviser $u(t)$ par 2, si $u(t)$ est d'origine aléatoire ?
11. Une série de mesures présente un écart-type expérimental $s = 0,020 \text{ s}$.
- a) Calculer l'incertitude-type sur la moyenne pour $n = 4$, puis $n = 16$. b) Combien de mesures faut-il au minimum pour que $u(\bar{x}) \leq 0,004 \text{ s}$? c) Vrai ou faux, en justifiant : « Avec 100 mesures, on élimine l'erreur due à un chronomètre qui retarde systématiquement de $0,05 \text{ s}$. »
12. On étudie la décharge d'un condensateur dans un conducteur ohmique de résistance $R = 50 \text{ k}\Omega$ ($u(R) = 1 \text{ k}\Omega$).

t (s)	0	2,0	4,0	6,0	8,0
u (V)	5,00	3,35	2,25	1,51	1,01

a) Le modèle est $u = E \cdot \exp(-t/\tau)$. Quelle grandeur faut-il tracer en fonction de t pour obtenir une droite ? b) Calculer cette grandeur pour chaque point puis la pente de la droite de régression. En déduire τ . c) Le logiciel donne $u(\tau) = 0,1$ s. Calculer $C = \tau/R$ et son incertitude-type.

13. Deux laboratoires dosent la même solution. Le laboratoire A obtient $(4,52 \pm 0,05)$ mmol·L⁻¹, le laboratoire B $(4,71 \pm 0,06)$ mmol·L⁻¹.

a) Calculer l'écart relatif entre les deux résultats. b) Calculer $z = |x_A - x_B| / \sqrt{(u_A^2 + u_B^2)}$. Les résultats sont-ils compatibles ? c) Proposer deux causes possibles de ce désaccord.

Corrigés

1. a) 0,00450 : 3 chiffres significatifs (les zéros de gauche ne comptent pas, le zéro final compte).
2,030×10³ : 4. 1,20×10² : 3. 0,7 : 1.

b) 3,14159 → 3,14 ; 0,0026851 → 0,0027.

2. Lecture sur une seule graduation : $u = g/\sqrt{12} = 0,5/\sqrt{12} = 0,5/3,46 = 0,144$ °C, arrondie par excès à 0,2 °C. $T = (21,5 \pm 0,2)$ °C.

3. Moyenne : $(12,4 + 12,6 + 12,5 + 12,3 + 12,7)/5 = 62,5/5 = 12,50$ mL.

Écarts : -0,1 ; 0,1 ; 0 ; -0,2 ; 0,2. Somme des carrés : $0,01 + 0,01 + 0 + 0,04 + 0,04 = 0,10$ mL². $s = \sqrt{(0,10/4)} = \sqrt{0,025} = 0,158$ mL. $u(V) = s/\sqrt{5} = 0,158/2,236 = 0,071$ mL. $V_E = (12,50 \pm 0,07)$ mL.

4. a) u arrondie à 0,05 m·s⁻¹ (par excès), valeur à 0,01 près : $g = (9,81 \pm 0,05)$ m·s⁻².

b) $u = 12$ m·s⁻¹ (2 chiffres significatifs), valeur à l'unité : $c = (343 \pm 12)$ m·s⁻¹, ou $(3,43 \pm 0,12) \times 10^2$ m·s⁻¹. c) $u = 0,24$ g, valeur au centième : $m = (152,37 \pm 0,24)$ g, ou avec un chiffre : $(152,4 \pm 0,3)$ g.

5. a) $z = |338 - 343|/4 = 5/4 = 1,25$. $z \leq 2$: **résultat compatible** avec la valeur de référence.

b) $z = |652 - 656,3|/2 = 4,3/2 = 2,15$. $z > 2$: **résultat non compatible**, bien que l'écart relatif ne soit que de 0,7 %. Il faut rechercher une erreur systématique (étalonnage du spectroscope) ou réévaluer l'incertitude.

6. a) $L = 12,50 - 3,00 = 9,50$ cm.

b) $g = 1$ mm = 0,1 cm : $u(x_1) = u(x_2) = 0,1/\sqrt{12} = 0,029$ cm. c) $u(L) = \sqrt{(0,029^2 + 0,029^2)} = 0,029 \times \sqrt{2} = 0,041$ cm, arrondie par excès à 0,05 cm. $L = (9,50 \pm 0,05)$ cm.

7. a) $R = 5,02 / 22,8 \times 10^{-3} = 220,2$ Ω.

b) $u(U)/U = 0,03/5,02 = 6,0 \times 10^{-3}$; $u(I)/I = 0,2/22,8 = 8,8 \times 10^{-3}$. $u(R)/R = \sqrt{((6,0 \times 10^{-3})^2 + (8,8 \times 10^{-3})^2)} = \sqrt{(3,6 \times 10^{-5} + 7,7 \times 10^{-5})} = \sqrt{(1,13 \times 10^{-4})} = 1,06 \times 10^{-2}$. $u(R) = 220,2 \times 1,06 \times 10^{-2} = 2,34$ Ω, arrondie à 2,4 Ω. $R = (220,2 \pm 2,4)$ Ω. c) Le terme relatif de l'intensité (0,88 %) est le plus grand : **la mesure de I limite la précision**. d) $z = |220,2 - 220| / 2,34 \approx 0,09$. $z \leq 2$: **compatible** avec la valeur annoncée.

8. a) $C_A = 0,100 \times 12,50 / 10,00 = 0,1250$ mol·L⁻¹.

b) Incertitudes relatives : $u(C_B)/C_B = 0,001/0,100 = 1,0 \times 10^{-2}$; $u(V_E)/V_E = 0,07/12,50 = 5,6 \times 10^{-3}$; $u(V_A)/V_A = 0,02/10,00 = 2,0 \times 10^{-3}$. $u(C_A)/C_A = \sqrt{(1,0 \times 10^{-4} + 3,1 \times 10^{-5} + 4,0 \times 10^{-6})} = \sqrt{(1,35 \times 10^{-4})} = 1,16 \times 10^{-2}$. $u(C_A) = 0,1250 \times 1,16 \times 10^{-2} = 1,45 \times 10^{-3}$ mol·L⁻¹, arrondie à 0,0015 mol·L⁻¹. c) $C_A = (0,1250 \pm$

0,0015) mol·L⁻¹. Le terme dominant est la **concentration de la solution titrante** (1,0 %) : pour améliorer le résultat, il faut connaître C_B plus précisément.

9. a) $C = 1,50 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$; $\bar{A} = 1,800/5 = 0,360$.

$\Sigma(C - \bar{C})(A - \bar{A}) = (-1,00)(-0,239) + (-0,50)(-0,122) + 0 \times 0,002 + (0,50)(0,121) + (1,00)(0,238) = 0,239 + 0,061 + 0 + 0,0605 + 0,238 = 0,5985$. $\Sigma(C - \bar{C})^2 = 1,00 + 0,25 + 0 + 0,25 + 1,00 = 2,50$. $a = 0,5985/2,50 = 0,239 \text{ L} \cdot \text{mmol}^{-1}$; $b = 0,360 - 0,239 \times 1,50 = 0,001$, pratiquement nul. b) Beer-Lambert prévoit $A = k \cdot C$, droite passant par l'origine. Les points sont alignés et b est négligeable devant les absorbances mesurées : **le modèle est validé** dans ce domaine. c) $C = (A - b)/a = (0,300 - 0,001)/0,239 = 1,25 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$. d) **Non** : 0,90 est hors du domaine d'étalonnage (absorbance maximale 0,598). Ce serait une extrapolation ; la loi de Beer-Lambert peut ne plus être vérifiée aux fortes absorbances. Il faut diluer la solution pour revenir dans le domaine.

10. a) $t^2 = 0,452^2 = 0,2043 \text{ s}^2$. $g = 2 \times 1,000 / 0,2043 = 9,79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

b) $g = 2 \cdot h \cdot t^{-2}$: $u(g)/g = \sqrt{((u(h)/h)^2 + (2 \cdot u(t)/t)^2)}$. $u(h)/h = 0,002/1,000 = 2,0 \times 10^{-3}$; $2 \cdot u(t)/t = 2 \times 0,003/0,452 = 1,33 \times 10^{-2}$. $u(g)/g = \sqrt{(4,0 \times 10^{-6} + 1,76 \times 10^{-4})} = \sqrt{1,80 \times 10^{-4}} = 1,34 \times 10^{-2}$. $u(g) = 9,79 \times 1,34 \times 10^{-2} = 0,131 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, arrondie à $0,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. c) $g = (9,79 \pm 0,14) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. $z = |9,79 - 9,81| / 0,131 \approx 0,16 \leq 2$: **compatible**. d) La durée domine (1,33 % contre 0,2 %), d'autant que son incertitude est doublée par l'exposant 2. Comme $u \propto 1/\sqrt{n}$, diviser $u(t)$ par 2 demande de multiplier n par 4 : **moyenner 4 mesures** de t (par rapport à une mesure unique d'incertitude 0,003 s).

11. a) $n = 4$: $u = 0,020/\sqrt{4} = 0,010 \text{ s}$. $n = 16$: $u = 0,020/4 = 0,005 \text{ s}$.

b) $0,020/\sqrt{n} \leq 0,004$ donne $\sqrt{n} \geq 5$, donc **$n \geq 25$ mesures**. c) **Faux** : un retard constant est une erreur systématique ; il décale toutes les mesures de la même quantité et la moyenne en est décalée d'autant. Répéter ne réduit que l'erreur aléatoire. Il faut corriger le chronomètre ou le protocole.

12. a) $\ln(u) = \ln(E) - t/\tau$: il faut tracer **$\ln(u)$ en fonction de t** , droite de pente $-1/\tau$.

b) $\ln(u)$: 1,609 ; 1,209 ; 0,811 ; 0,412 ; 0,010. $\bar{t} = 4,0 \text{ s}$; moyenne des $\ln(u) = 4,051/5 = 0,810$. $\Sigma(t - \bar{t})(\ln u - \text{moyenne}) = (-4,0)(0,799) + (-2,0)(0,399) + 0 + (2,0)(-0,398) + (4,0)(-0,800) = -3,196 - 0,798 - 0,796 - 3,200 = -7,99$. $\Sigma(t - \bar{t})^2 = 16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$. Pente = $-7,99/40 = -0,200 \text{ s}^{-1}$, donc $\tau = 1/0,200 = 5,0 \text{ s}$. c) $C = \tau/R = 5,0 / 50 \times 10^3 = 1,0 \times 10^{-4} \text{ F} = 100 \text{ } \mu\text{F}$. $u(C)/C = \sqrt{((u(\tau)/\tau)^2 + (u(R)/R)^2)} = \sqrt{((0,1/5,0)^2 + (1/50)^2)} = \sqrt{(4,0 \times 10^{-4} + 4,0 \times 10^{-4})} = 2,8 \times 10^{-2}$. $u(C) = 100 \times 2,8 \times 10^{-2} = 2,8 \text{ } \mu\text{F}$. $C = (100 \pm 3) \text{ } \mu\text{F}$.

13. a) Écart relatif : $|4,71 - 4,52| / 4,52 = 0,19/4,52 = 4,2 \%$.

b) $\sqrt{(0,05^2 + 0,06^2)} = \sqrt{(0,0025 + 0,0036)} = \sqrt{0,0061} = 0,078 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$. $z = 0,19/0,078 = 2,4 > 2$: **résultats non compatibles**. c) Une erreur systématique dans l'un des laboratoires (solution étalon mal préparée, appareil mal étalonné, verrerie défectueuse) ; une incertitude sous-estimée parce qu'une source n'a pas été prise en compte (température, évolution de la solution entre les deux dosages).