

Condensateur et circuit RC

COURS • P17 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Relier l'intensité d'un courant au débit de charges électriques : $i = dq/dt$, et $I = Q/\Delta t$ pour un courant constant.
- Décrire la constitution d'un condensateur et identifier un comportement capacitif.
- Utiliser la relation $q = C \cdot u$ et en déduire la relation $i = C \cdot du/dt$ en convention récepteur.
- Citer des ordres de grandeur de capacités usuelles et convertir pF, nF, μ F, mF.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de la charge et de la décharge dans un circuit RC série.
- Résoudre ces équations différentielles, vérifier qu'une fonction en est solution et utiliser les conditions initiales.
- Définir la constante de temps $\tau = RC$, vérifier son unité et la déterminer à partir d'un graphique (63 %, 37 %, tangente à l'origine).
- Exploiter le modèle pour calculer une tension, une intensité ou une durée de charge.
- Expliquer le principe d'un capteur capacitif à partir de la dépendance de la capacité à la géométrie et au milieu isolant.

Cours

1. L'intensité, un débit de charges

Un courant électrique est un déplacement d'ensemble de porteurs de charge : électrons dans les métaux, ions dans les solutions et dans les milieux biologiques. La charge élémentaire vaut $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C ; un électron porte la charge $-e$, un ion Na^+ la charge $+e$, un ion Ca^{2+} la charge $+2e$.

L'intensité du courant à travers une section d'un conducteur est le **débit de charge** à travers cette section, c'est-à-dire la charge qui la traverse par unité de temps :

$$i = dq/dt$$

avec i en ampères (A), q en coulombs (C) et t en secondes (s). Un ampère correspond donc à un coulomb par seconde : $1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$.

Lorsque le courant est constant (régime continu), la dérivée devient un simple quotient : la charge Q qui traverse la section pendant Δt vaut

$$Q = I \cdot \Delta t$$

Exemple court : un courant de 0,50 A pendant 60 s transporte $Q = 0,50 \times 60 = 30 \text{ C}$, soit $N = Q/e = 30 / 1,602 \times 10^{-19} \approx 1,9 \times 10^{20}$ électrons.

Lorsque le courant varie, la charge transportée entre t_1 et t_2 est l'aire sous la courbe $i(t)$ entre ces deux dates. Cette lecture graphique est utile pour un condensateur, dont le courant de charge décroît au cours du temps.

2. Le condensateur et sa capacité

Un **condensateur** est un dipôle constitué de deux conducteurs appelés **armatures**, séparés par un isolant appelé **diélectrique** (air, céramique, plastique, oxyde métallique). Aucun porteur de charge ne traverse l'isolant. Lorsqu'un courant arrive sur une armature, des charges s'y accumulent, et la même quantité de charges quitte l'autre armature : les deux armatures portent à chaque instant des charges opposées, $q_A = q$ et $q_B = -q$. La charge totale du condensateur reste nulle ; on appelle **charge du condensateur** la charge q de l'armature A.

Dans le circuit, tout se passe comme si le courant « traversait » le condensateur, alors qu'en réalité il s'arrête sur une armature et repart de l'autre.

Convention récepteur. On oriente le courant i vers l'armature A et on note $u = u_{AB}$ la tension aux bornes du condensateur (flèche de tension orientée vers A). Dans ces conditions, si $i > 0$, l'armature A reçoit des charges positives et q augmente :

$$i = dq/dt$$

Capacité. L'expérience montre qu'à chaque instant la charge q est proportionnelle à la tension u :

$$q = C \cdot u$$

Le coefficient C , toujours positif, est la **capacité** du condensateur. Elle s'exprime en **farads (F)** : $1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1}$. Le farad est une unité très grande ; on rencontre surtout :

Composant	Ordre de grandeur de C
Capteur tactile, capacité parasite d'un câble	quelques pF (10^{-12} F)
Condensateur céramique de filtrage	1 nF à 100 nF
Condensateur électrochimique	1 μF à quelques mF
Défibrillateur cardiaque	une centaine de μF
Supercondensateur	1 F à plusieurs milliers de F

Préfixes à maîtriser : $1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$; $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$; $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$; $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$.

Relation intensité-tension. En combinant $i = dq/dt$ et $q = C \cdot u$, avec C constante :

$$i = C \cdot du/dt$$

Cette relation, valable en convention récepteur, est la loi de comportement du condensateur. Elle a trois conséquences essentielles.

- Si la tension est constante, $du/dt = 0$ donc $i = 0$: **en régime permanent, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.**
- Un courant constant I charge le condensateur à vitesse constante : u augmente linéairement, $u(t) = u(0) + I \cdot t / C$.
- **La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.** Une discontinuité de u imposerait une dérivée infinie, donc un courant infini, impossible dans un circuit réel. En revanche, l'intensité peut varier brutalement, par exemple à la fermeture d'un interrupteur.

Comportement capacitif. Un dipôle a un comportement capacitif si, alimenté par un courant constant, la tension à ses bornes croît linéairement avec le temps, ou si la charge accumulée est proportionnelle à la tension. Deux conducteurs proches séparés par un isolant forment toujours un condensateur, même non désiré : deux pistes d'un circuit imprimé, un doigt et un écran tactile, les deux faces d'une membrane cellulaire.

3. De quoi dépend la capacité : le condensateur plan

Pour un **condensateur plan**, deux armatures parallèles de surface en regard S séparées d'une distance e (petite devant les dimensions des armatures), la capacité vaut :

$$C = \epsilon \cdot S / e$$

avec S en m^2 , e en m , et ϵ la **permittivité** du diélectrique en $F \cdot m^{-1}$. On écrit $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ où $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F \cdot m^{-1}$ est la permittivité du vide et ϵ_r la permittivité relative du milieu (sans unité, environ 1 pour l'air, 2 à 10 pour les plastiques et céramiques courantes, environ 80 pour l'eau liquide).

Cette relation se comprend qualitativement : plus les armatures sont grandes, plus elles peuvent accueillir de charges pour une même tension ; plus elles sont proches, plus l'attraction entre charges opposées est forte, ce qui facilite l'accumulation. Ordre de grandeur : deux plaques de 1 cm^2 distantes de 1 mm dans l'air donnent $C = 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-4} / 10^{-3} \approx 0,9 \text{ pF}$, ce qui montre pourquoi les condensateurs usuels utilisent des armatures enroulées de grande surface et des isolants très minces.

Retiens surtout que **la capacité varie dès que S , e ou ϵ varient**. C'est le principe des capteurs capacitifs (partie 7).

4. Charge d'un condensateur dans un circuit RC série

Montage. Un générateur idéal de tension, de force électromotrice E constante, alimente en série un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C , initialement déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



Charge d'un condensateur

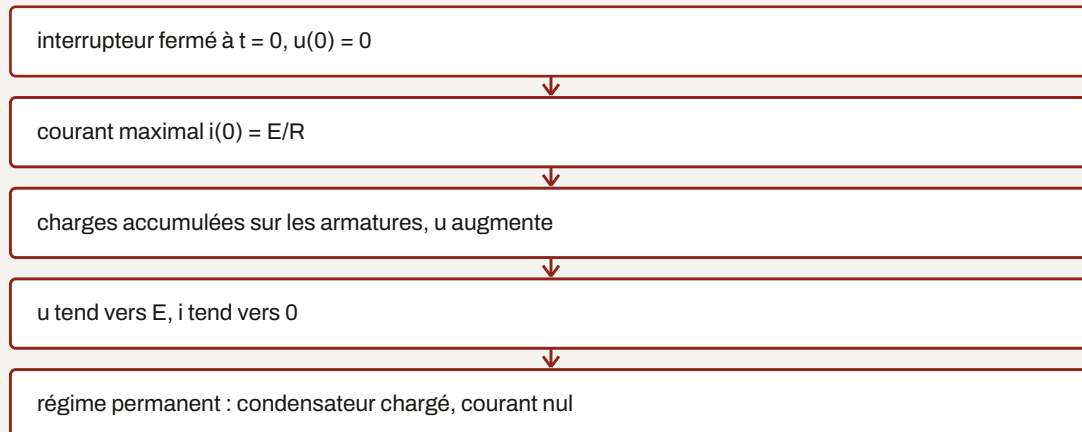


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Équation différentielle. Le courant i est orienté vers l'armature A, la tension $u_R = R \cdot i$ aux bornes du conducteur ohmique et la tension u aux bornes du condensateur sont en convention récepteur. La loi des mailles donne :

$$E = u_R + u = R \cdot i + u$$

Or $i = C \cdot du/dt$, donc :

$$RC \cdot du/dt + u = E$$

On pose $\tau = RC$, et l'équation s'écrit : $du/dt + u/\tau = E/\tau$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1/\tau$ et $b = E/\tau$.

Résolution. Les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $y(t) = K \cdot \exp(at) - b/a$, où K est une constante. Ici $-b/a = (E/\tau) / (1/\tau) = E$, donc :

$$u(t) = E + K \cdot \exp(-t/\tau)$$

La constante K se détermine avec la **condition initiale**. Le condensateur est initialement déchargé et la tension est continue, donc $u(0) = 0 : E + K = 0$, soit $K = -E$. La solution est :

$$u(t) = E \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$$

Vérification. $u'(t) = (E/\tau) \cdot \exp(-t/\tau)$. Alors $RC \cdot u' + u = \tau \cdot (E/\tau) \cdot \exp(-t/\tau) + E - E \cdot \exp(-t/\tau) = E$. L'équation est vérifiée, et $u(0) = E(1 - 1) = 0$.

Intensité du courant de charge.

$$i(t) = C \cdot du/dt = C \cdot (E/\tau) \cdot \exp(-t/\tau) = (E/R) \cdot \exp(-t/\tau)$$

À $t = 0$, $i(0) = E/R$: le condensateur déchargé se comporte comme un fil, toute la tension E est aux bornes du conducteur ohmique. Le courant décroît ensuite exponentiellement vers 0. On observe bien que i est discontinue en $t = 0$ (elle passe de 0 à E/R) alors que u reste continue.

Charge du condensateur. $q(t) = C \cdot u(t) = CE \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$, qui tend vers $Q_{\max} = CE$.

5. Décharge d'un condensateur

Montage. Le condensateur, chargé sous la tension E , est relié à $t = 0$ à un conducteur ohmique de résistance R , sans générateur (le basculement d'un commutateur retire le générateur de la maille).

Équation différentielle. Avec les mêmes orientations, la loi des mailles s'écrit $R \cdot i + u = 0$, d'où :

$$RC \cdot du/dt + u = 0$$

Solution. Les solutions sont $u(t) = K \cdot \exp(-t/\tau)$. La continuité de la tension impose $u(0) = E$, donc $K = E$:

$$u(t) = E \cdot \exp(-t/\tau)$$

L'intensité vaut $i(t) = C \cdot du/dt = -(E/R) \cdot \exp(-t/\tau)$. Le signe négatif indique que le courant circule en sens inverse de l'orientation choisie : l'armature A , qui portait des charges positives, les perd. Le condensateur joue alors le rôle de générateur et l'énergie qu'il contenait est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.

Comparaison de la charge et de la décharge.

	Charge ($u(0) = 0$)	Décharge ($u(0) = E$)
Équation différentielle	$RC \cdot du/dt + u = E$	$RC \cdot du/dt + u = 0$
Tension $u(t)$	$E \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$	$E \cdot \exp(-t/\tau)$
Intensité $i(t)$	$(E/R) \cdot \exp(-t/\tau)$	$-(E/R) \cdot \exp(-t/\tau)$
$u(\tau)$	$0,63 \cdot E$	$0,37 \cdot E$
Valeur atteinte à 5τ	99,3 % de E	0,7 % de E

6. La constante de temps $\tau = RC$

Unité. La relation $u_R = R \cdot i$ donne $[R] = V \cdot A^{-1}$; la relation $q = C \cdot u$ donne $[C] = C \cdot V^{-1} = A \cdot s \cdot V^{-1}$. Donc $[R \cdot C] = V \cdot A^{-1} \times A \cdot s \cdot V^{-1} = s$. **La constante de temps $\tau = RC$ est une durée, exprimée en secondes.**

Exemple : $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ donnent $\tau = 10^4 \times 10^{-4} = 1,0 \text{ s}$.

Signification physique. τ est la durée caractéristique de l'évolution du circuit. Plus R est grande, plus le courant est faible et plus la charge est lente ; plus C est grande, plus il faut apporter de charges pour atteindre une même tension. τ ne dépend ni de E ni de l'état initial.

Trois méthodes graphiques pour déterminer τ .

- Méthode des 63 % (charge) :** $u(\tau) = E \cdot (1 - \exp(-1)) = E \cdot (1 - 0,368) \approx 0,63 \cdot E$. On cherche l'abscisse du point d'ordonnée $0,63 \cdot E$.
- Méthode des 37 % (décharge) :** $u(\tau) = E \cdot \exp(-1) \approx 0,37 \cdot E$.
- Méthode de la tangente à l'origine :** en charge, la pente initiale vaut $u'(0) = E/\tau$. La tangente à l'origine a pour équation $y = (E/\tau) \cdot t$; elle coupe l'asymptote horizontale $u = E$ à la date $t = \tau$. En décharge, la tangente à l'origine $y = E - (E/\tau) \cdot t$ coupe l'axe des temps en $t = \tau$.

Durée de charge. Le régime permanent n'est mathématiquement jamais atteint, car $\exp(-t/\tau)$ ne s'annule pas. En pratique, on considère que le condensateur est chargé à partir de $t = 5\tau$: $u(5\tau) = E \cdot (1 -$

$\exp(-5) = 0,993 \cdot E$, soit moins de 1 % d'écart avec E .

Calculer une durée. Pour trouver la date t_1 à laquelle la tension atteint une valeur u_1 , on isole l'exponentielle puis on applique le logarithme népérien :

- en charge : $\exp(-t_1/\tau) = 1 - u_1/E$, donc $t_1 = -\tau \cdot \ln(1 - u_1/E) = \tau \cdot \ln(E/(E - u_1))$;
- en décharge : $\exp(-t_1/\tau) = u_1/E$, donc $t_1 = \tau \cdot \ln(E/u_1)$.

Par exemple, la tension de décharge est divisée par 2 au bout de $t = \tau \cdot \ln 2 \approx 0,69 \cdot \tau$, et ce à partir de n'importe quel instant : c'est une propriété de toute décroissance exponentielle.

Linéarisation. En décharge, $\ln(u) = \ln(E) - t/\tau$: la courbe représentant $\ln(u)$ en fonction de t est une droite de pente $-1/\tau$. Une régression linéaire sur ces points donne τ avec précision (voir le chapitre sur les mesures et incertitudes).

Complément (au-delà des capacités exigibles) : énergie stockée. Un condensateur chargé sous la tension u stocke l'énergie $E_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$, en joules. Cette énergie est restituée lors de la décharge. Elle explique les usages des condensateurs comme réservoirs d'énergie rapides (flash d'appareil photo, défibrillateur).

7. Capteurs capacitifs

Un capteur capacitif transforme la variation d'une grandeur physique (position, pression, niveau, humidité, présence d'un doigt) en variation de capacité, puis en variation d'un signal électrique mesurable. D'après $C = \epsilon \cdot S/e$, on peut agir sur trois paramètres.

Ce qui modifie la capacité d'un capteur

distance e entre armatures : capteur de pression, microphone, accéléromètre

surface en regard S : capteur de déplacement, de niveau de liquide

permittivité ϵ du milieu : capteur d'humidité, détection d'un doigt sur un écran tactile

Repères complémentaires, sans séquence causale

Exemples.

- **Écran tactile capacitif** : une grille d'électrodes transparentes forme des condensateurs. Le doigt, conducteur, modifie localement la capacité ; l'électronique repère la case concernée.
- **Clavier capacitif** : l'appui sur une touche rapproche deux armatures, e diminue, C augmente.
- **Capteur d'humidité** : un diélectrique poreux absorbe la vapeur d'eau, dont la permittivité relative est élevée ; ϵ augmente avec l'humidité, donc C aussi.
- **Accéléromètre de téléphone** : une petite masse mobile forme une armature ; une accélération la déplace et modifie e .

Comment mesurer la capacité ? Une méthode simple consiste à placer le capteur dans un circuit RC de résistance R connue et à mesurer la constante de temps : $C = \tau/R$. Une variation de C se traduit par une variation proportionnelle de τ . Les circuits électroniques réels mesurent ainsi des durées de charge très courtes, de l'ordre de la microseconde, des milliers de fois par seconde.

Exemples résolus

Exemple 1 : charge à courant constant

Un générateur de courant impose une intensité constante $I = 0,10 \text{ mA}$ dans un condensateur de capacité $C = 22 \text{ } \mu\text{F}$, initialement déchargé. a) Calculer la charge q du condensateur au bout de $5,0 \text{ s}$. b) En déduire la tension à ses bornes à cette date. c) Quelle est l'allure de la courbe $u(t)$?

Résolution. a) Le courant est constant, donc $q = I \cdot \Delta t = 0,10 \times 10^{-3} \times 5,0 = 5,0 \times 10^{-4} \text{ C}$. b) $q = C \cdot u$ donc $u = q/C = 5,0 \times 10^{-4} / 22 \times 10^{-6} = 22,7 \text{ V}$. **$u \approx 23 \text{ V}$** . c) $u(t) = I \cdot t/C$: la tension augmente linéairement avec le temps, de pente $I/C = 0,10 \times 10^{-3} / 22 \times 10^{-6} \approx 4,5 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$. C'est la signature d'un comportement capacitif.

Exemple 2 : charge dans un circuit RC

Un condensateur de capacité $C = 470 \text{ } \mu\text{F}$, initialement déchargé, est chargé à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 2,2 \text{ k}\Omega$ par un générateur idéal de force électromotrice $E = 12 \text{ V}$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. b) Donner l'expression de $u(t)$ et calculer τ . c) Calculer u à $t = 1,0 \text{ s}$. d) Calculer l'intensité à $t = 0$. e) Au bout de combien de temps la tension atteint-elle 99 % de E ?

Résolution. a) Loi des mailles : $E = R \cdot i + u$, et $i = C \cdot du/dt$ en convention récepteur. Donc **$RC \cdot du/dt + u = E$** . b) Avec $u(0) = 0$ (condensateur déchargé, tension continue), $u(t) = E \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$ où $\tau = RC = 2,2 \times 10^3 \times 470 \times 10^{-6} = 1,034 \text{ s}$. **$\tau \approx 1,03 \text{ s}$** . c) $u(1,0) = 12 \times (1 - \exp(-1,0/1,034)) = 12 \times (1 - \exp(-0,967)) = 12 \times (1 - 0,380) = 12 \times 0,620$. **$u \approx 7,4 \text{ V}$** . d) $i(0) = E/R = 12 / 2,2 \times 10^3 = 5,45 \times 10^{-3} \text{ A}$. **$i(0) \approx 5,5 \text{ mA}$** . e) On cherche t_1 tel que $1 - \exp(-t_1/\tau) = 0,99$, soit $\exp(-t_1/\tau) = 0,01$, donc $t_1 = \tau \cdot \ln(100) = 1,034 \times 4,605$. **$t_1 \approx 4,8 \text{ s}$** , soit environ $4,6 \cdot \tau$, cohérent avec la règle des 5τ .

Exemple 3 : déterminer τ par linéarisation d'une décharge

Un condensateur chargé sous $E = 10,0 \text{ V}$ se décharge dans un conducteur ohmique de résistance $R = 200 \text{ k}\Omega$. On relève :

$t \text{ (s)}$	0	1,0	2,0	3,0
$u \text{ (V)}$	10,0	6,1	3,7	2,2

a) Montrer que $\ln(u)$ est une fonction affine de t . b) Calculer $\ln(u)$ pour chaque point et en déduire τ . c) En déduire C .

Résolution. a) $u(t) = E \cdot \exp(-t/\tau)$, donc $\ln(u) = \ln(E) - t/\tau$: c'est une fonction affine de t , de pente $-1/\tau$ (u étant exprimée en volts, on prend le logarithme de sa valeur numérique). b) $\ln(10,0) = 2,303$; $\ln(6,1) = 1,808$; $\ln(3,7) = 1,308$; $\ln(2,2) = 0,788$. Les pentes entre points successifs valent $(1,808 - 2,303)/1,0 = -0,495 \text{ s}^{-1}$, puis $-0,500 \text{ s}^{-1}$, puis $-0,520 \text{ s}^{-1}$: les points sont pratiquement alignés, la pente vaut environ $-0,50 \text{ s}^{-1}$. Donc $1/\tau = 0,50 \text{ s}^{-1}$ et **$\tau \approx 2,0 \text{ s}$** . c) $C = \tau/R = 2,0 / 200 \times 10^3 = 1,0 \times 10^{-5} \text{ F}$. **$C \approx 10 \text{ } \mu\text{F}$** .

Méthodes et pièges

- Méthode type pour un circuit RC : schéma avec orientations (i vers l'armature A, tensions en convention récepteur), loi des mailles, remplacement de i par $C \cdot du/dt$, mise sous la forme $RC \cdot du/dt + u = \text{constante}$, solution générale, condition initiale, vérification.

- Avant tout calcul, convertis : $k\Omega$ en Ω , μF en F , ms en s. Une erreur de puissance de dix sur τ est l'erreur la plus fréquente.
- Ne confonds pas la charge q d'une armature avec la charge totale du condensateur, qui est toujours nulle.
- La condition initiale porte sur la tension u (continue), jamais sur l'intensité, qui peut sauter brutalement.
- 63 % pour la charge, 37 % pour la décharge : vérifie sur quel graphique tu travailles avant de lire τ .
- La tangente à l'origine coupe l'asymptote (charge) ou l'axe des temps (décharge) à $t = \tau$, pas à 5τ .
- En décharge, l'intensité est négative avec l'orientation de la charge : ce n'est pas une erreur, le courant change de sens.
- Pour calculer une durée, isole d'abord l'exponentielle, puis prends le logarithme ; n'applique jamais $\ln$ à une somme.
- τ ne dépend pas de E : doubler la tension du générateur ne change pas la durée de charge, seulement la tension finale.

Vers le PASS

En PASS, le condensateur réapparaît en physique sous l'angle de l'électrostatique : champ électrique entre deux armatures, potentiel, énergie stockée $\frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$ et association de condensateurs. Surtout, il sert de modèle à la **membrane cellulaire** : la bicouche lipidique, isolante et épaisse d'environ 5 nm, sépare deux milieux conducteurs (cytoplasme et liquide extracellulaire). Sa capacité surfacique vaut environ $1 \mu F \cdot cm^{-2}$. Les canaux ioniques jouent le rôle de résistances : la membrane se comporte comme un circuit RC parallèle, et sa constante de temps fixe la vitesse à laquelle le potentiel de membrane réagit à un courant injecté. Ce modèle est au cœur de la physiologie du neurone, de la propagation du potentiel d'action et de l'interprétation de l'électrocardiogramme. Les équations différentielles du premier ordre que tu as résolues ici réapparaissent aussi en pharmacocinétique (élimination d'un médicament) et en radioactivité.

Suite en PASS : Champs électriques, circuits et condensateurs

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Un courant d'intensité constante $I = 2,0$ mA circule pendant 15 s dans un fil de cuivre. a) Calculer la charge Q qui a traversé une section du fil. b) En déduire le nombre d'électrons correspondant ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C).
2. Un condensateur de capacité $C = 470 \mu F$ est chargé sous une tension de 12 V. a) Calculer sa charge q . b) Quelle tension faut-il appliquer pour qu'il porte une charge de 2,0 mC ?
3. Un circuit RC comporte un conducteur ohmique $R = 10 k\Omega$ et un condensateur $C = 100$ nF. a) Montrer par une analyse d'unités que le produit RC est une durée. b) Calculer τ . c) Au bout de quelle durée peut-on considérer le condensateur chargé ?
4. Un condensateur initialement déchargé est chargé sous $E = 6,0$ V dans un circuit de constante de temps $\tau = 2,0$ s. Calculer la tension à ses bornes à $t = 2,0$ s puis à $t = 10$ s.

5. La tension aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ augmente linéairement de 0 à 5,0 V en 2,0 ms. Calculer l'intensité du courant qui l'alimente pendant cette phase.

Niveau 2 : type bac

6. On charge un condensateur initialement déchargé à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 1,0 \text{ k}\Omega$, avec un générateur idéal de force électromotrice $E = 5,0 \text{ V}$. Sur l'enregistrement de $u(t)$, la tension vaut 3,15 V à la date $t = 22 \text{ ms}$.
- a) Justifier que cette date correspond à la constante de temps. b) En déduire la capacité C . c) Calculer l'intensité du courant juste après la fermeture de l'interrupteur. d) Au bout de quelle durée le régime permanent est-il pratiquement atteint ? Que valent alors u et i ?
7. Un condensateur de capacité $C = 220 \mu\text{F}$, chargé sous $E = 12 \text{ V}$, se décharge à partir de $t = 0$ dans un conducteur ohmique de résistance $R = 47 \text{ k}\Omega$.
- a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. b) Vérifier que $u(t) = E \cdot \exp(-t/\tau)$ en est solution et respecte la condition initiale. c) Calculer τ . d) Calculer la date à laquelle la tension vaut 3,0 V.
8. Lors de la décharge d'un condensateur initialement chargé sous $E = 9,0 \text{ V}$ dans un conducteur ohmique $R = 100 \text{ k}\Omega$, la tangente à l'origine de la courbe $u(t)$ coupe l'axe des temps à $t = 0,50 \text{ s}$.
- a) Que vaut τ ? Justifier par le calcul de la pente de la tangente. b) Calculer C . c) Calculer la charge du condensateur à $t = 0$. d) Calculer la tension à $t = 1,0 \text{ s}$.
9. Une touche de clavier capacitif est modélisée par un condensateur plan à air ($\epsilon_r = 1$) d'armatures de surface $S = 1,0 \text{ cm}^2$, distantes de $e = 0,10 \text{ mm}$ au repos. Donnée : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.
- a) Calculer la capacité au repos. b) L'appui réduit la distance à 0,080 mm. Calculer la nouvelle capacité et sa variation relative. c) Le capteur est placé dans un circuit RC avec $R = 1,0 \text{ M}\Omega$. Calculer τ au repos et à l'appui. Expliquer comment l'électronique détecte l'appui.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Un condensateur porte déjà une tension $U_0 = 2,0 \text{ V}$ lorsqu'on le relie, à $t = 0$, à un générateur de force électromotrice $E = 10 \text{ V}$ à travers un conducteur ohmique. La constante de temps vaut $\tau = 1,0 \text{ ms}$.
- a) Montrer que $u(t) = A + B \cdot \exp(-t/\tau)$ est solution de $RC \cdot du/dt + u = E$ pour une valeur de A à préciser. b) Déterminer B grâce à la condition initiale. c) Calculer la date à laquelle u atteint 9,0 V. d) Comparer avec la durée nécessaire si le condensateur était initialement déchargé.
11. Un défibrillateur contient un condensateur de capacité $C = 200 \mu\text{F}$ chargé sous 2,0 kV. Lors du choc, il se décharge à travers le thorax, modélisé par un conducteur ohmique $R = 50 \Omega$.
- a) Calculer la charge stockée. b) Calculer l'énergie stockée $E_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$. c) Calculer la constante de temps de la décharge et l'intensité maximale du courant. d) Calculer la durée au bout de laquelle la tension n'est plus que 10 % de sa valeur initiale.
12. Modèle électrique d'une cellule. La membrane d'une cellule sphérique a une surface $S = 5,0 \times 10^{-5} \text{ cm}^2$. Sa capacité surfacique vaut $c = 1,0 \mu\text{F} \cdot \text{cm}^{-2}$ et sa résistance surfacique vaut $r = 20 \text{ k}\Omega \cdot \text{cm}^2$ (la résistance de la membrane est $R = r/S$).
- a) Calculer la capacité C et la résistance R de la membrane. b) Calculer $\tau = RC$ et montrer qu'il ne dépend pas de S . c) Calculer la charge à déplacer à travers la membrane pour faire varier la tension membranaire de 100 mV, puis le nombre d'ions monovalents correspondant ($e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$). d) En

assimilant la membrane à un condensateur plan d'épaisseur $e = 5,0 \text{ nm}$, calculer sa permittivité relative ($\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$).

13. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

a) Doubler la force électromotrice E double la durée de charge d'un condensateur. b) Juste après la fermeture de l'interrupteur, lors d'une charge, la tension aux bornes du conducteur ohmique vaut E . c) À $t = 2\tau$, lors d'une décharge, la tension vaut environ 14 % de sa valeur initiale. d) Lors d'une décharge, la tension est divisée par deux toutes les $0,69 \cdot \tau$. e) Un condensateur de 1 F est un composant courant dans les circuits de filtrage.

Corrigés

1. a) Le courant est constant : $Q = I \cdot \Delta t = 2,0 \times 10^{-3} \times 15 = Q = 3,0 \times 10^{-2} \text{ C}$.

b) $N = Q/e = 3,0 \times 10^{-2} / 1,6 \times 10^{-19} = 1,875 \times 10^{17}$, soit $N \approx 1,9 \times 10^{17}$ électrons.

2. a) $q = C \cdot u = 470 \times 10^{-6} \times 12 = 5,64 \times 10^{-3} \text{ C}$, soit $q \approx 5,6 \text{ mC}$.

b) $u = q/C = 2,0 \times 10^{-3} / 470 \times 10^{-6} = 4,26 \text{ V}$, soit $u \approx 4,3 \text{ V}$.

3. a) $R = u/i$ s'exprime en $\text{V} \cdot \text{A}^{-1}$; $C = q/u$ s'exprime en $\text{C} \cdot \text{V}^{-1} = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1}$. Le produit s'exprime en $\text{V} \cdot \text{A}^{-1} \times \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} = \text{s}$: **RC est une durée.**

b) $\tau = 10 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-9} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ s}$, $\tau = 1,0 \text{ ms}$. c) Le condensateur est pratiquement chargé au bout de 5τ , soit **5,0 ms**.

4. $u(t) = E \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$.

À $t = 2,0 \text{ s} = \tau$: $u = 6,0 \times (1 - \exp(-1)) = 6,0 \times 0,632 = 3,79 \text{ V}$, $u \approx 3,8 \text{ V}$ (63 % de E). À $t = 10 \text{ s} = 5\tau$: $u = 6,0 \times (1 - \exp(-5)) = 6,0 \times 0,993 = 5,96 \text{ V}$, $u \approx 6,0 \text{ V}$: le condensateur est chargé.

5. La tension croît linéairement : $du/dt = 5,0 / 2,0 \times 10^{-3} = 2,5 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$. Donc $i = C \cdot du/dt = 10 \times 10^{-6} \times 2,5 \times 10^3 = 2,5 \times 10^{-2} \text{ A}$, **$i = 25 \text{ mA}$** (constante pendant cette phase).

6. a) $3,15 / 5,0 = 0,63$: la tension vaut 63 % de E . Or $u(\tau) = E \cdot (1 - \exp(-1)) \approx 0,63 \cdot E$. Donc **$\tau = 22 \text{ ms}$** .

b) $C = \tau/R = 22 \times 10^{-3} / 1,0 \times 10^3 = 2,2 \times 10^{-5} \text{ F}$, **$C = 22 \text{ } \mu\text{F}$** . c) À $t = 0$, $u = 0$ (tension continue), donc toute la tension E est aux bornes de R : $i(0) = E/R = 5,0 / 1,0 \times 10^3 = 5,0 \text{ mA}$. d) Au bout de $5\tau = 5 \times 22 = 110 \text{ ms}$, soit **0,11 s**. En régime permanent, **$u = E = 5,0 \text{ V}$ et $i = 0$** : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

7. a) Sans générateur, la loi des mailles donne $R \cdot i + u = 0$, avec $i = C \cdot du/dt$: **$RC \cdot du/dt + u = 0$** .

b) $u'(t) = -(E/\tau) \cdot \exp(-t/\tau)$. Alors $RC \cdot u' + u = -\tau \cdot (E/\tau) \cdot \exp(-t/\tau) + E \cdot \exp(-t/\tau) = 0$: l'équation est vérifiée. Et $u(0) = E \cdot \exp(0) = E = 12 \text{ V}$: la condition initiale est respectée. c) $\tau = RC = 47 \times 10^3 \times 220 \times 10^{-6} = 10,34 \text{ s}$, $\tau \approx 10 \text{ s}$. d) $E \cdot \exp(-t_1/\tau) = 3,0$ donne $\exp(-t_1/\tau) = 3,0/12 = 0,25$, d'où $t_1 = \tau \cdot \ln(4) = 10,34 \times 1,386 = 14,3 \text{ s}$. **$t_1 \approx 14 \text{ s}$** .

8. a) En décharge, $u'(0) = -E/\tau$: la tangente à l'origine a pour équation $y = E - (E/\tau) \cdot t$; elle s'annule pour $t = \tau$. Donc **$\tau = 0,50 \text{ s}$** .

b) $C = \tau/R = 0,50 / 100 \times 10^3 = 5,0 \times 10^{-6} \text{ F}$, **$C = 5,0 \text{ } \mu\text{F}$** . c) $q(0) = C \cdot E = 5,0 \times 10^{-6} \times 9,0 = 4,5 \times 10^{-5} \text{ C}$. d) $u(1,0) = 9,0 \times \exp(-1,0/0,50) = 9,0 \times \exp(-2) = 9,0 \times 0,135 = 1,22 \text{ V}$, **$u \approx 1,2 \text{ V}$** .

9. a) $S = 1,0 \text{ cm}^2 = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; $e = 0,10 \text{ mm} = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}$. $C = \epsilon_0 \cdot S/e = 8,85 \times 10^{-12} \times 1,0 \times 10^{-4} / 1,0 \times 10^{-4} = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \approx 8,9 \text{ pF}$.

b) $e' = 8,0 \times 10^{-5} \text{ m}$: $C' = 8,85 \times 10^{-12} \times 1,0 \times 10^{-4} / 8,0 \times 10^{-5} = 1,11 \times 10^{-11} \text{ F}$, **$C' \approx 11 \text{ pF}$** . Variation relative : $(C' - C)/C = e/e' - 1 = 0,10/0,080 - 1 = +25 \%$. c) Au repos : $\tau = 1,0 \times 10^6 \times 8,85 \times 10^{-12} = 8,85 \times 10^{-6} \text{ s}$, **$\tau \approx 8,9 \text{ } \mu\text{s}$** . À

l'appui : $\tau' = 1,0 \times 10^6 \times 1,11 \times 10^{-11} = 1,11 \times 10^{-5} \text{ s}$, $\tau' \approx 11 \text{ } \mu\text{s}$. L'électronique mesure la durée de charge du circuit ; une augmentation de 25 % de cette durée signale l'appui.

10. a) $u' = -(B/\tau) \cdot \exp(-t/\tau)$. $RC \cdot u' + u = -B \cdot \exp(-t/\tau) + A + B \cdot \exp(-t/\tau) = A$. L'équation est vérifiée si et seulement si $A = E = 10 \text{ V}$.

b) $u(0) = A + B = U_0$, donc $B = U_0 - E = 2,0 - 10 = B = -8,0 \text{ V}$. Ainsi $u(t) = 10 - 8,0 \cdot \exp(-t/\tau)$ (en volts). c) $10 - 8,0 \cdot \exp(-t_1/\tau) = 9,0$ donne $\exp(-t_1/\tau) = 1,0/8,0$, d'où $t_1 = \tau \cdot \ln(8) = 1,0 \times 10^{-3} \times 2,079 = t_1 \approx 2,1 \text{ ms}$. d) Condensateur déchargé : $10 \cdot (1 - \exp(-t_2/\tau)) = 9,0$ donne $\exp(-t_2/\tau) = 0,10$, $t_2 = \tau \cdot \ln(10) = 2,30 \text{ ms} \approx 2,3 \text{ ms}$. La charge partielle initiale fait gagner environ 0,2 ms, soit $\tau \cdot \ln(10/8) = 0,22 \text{ ms}$.

11. a) $q = C \cdot u = 200 \times 10^{-6} \times 2,0 \times 10^3 = q = 0,40 \text{ C}$.

b) $E_e = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-6} \times (2,0 \times 10^3)^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-6} \times 4,0 \times 10^6 = E_e = 400 \text{ J}$. c) $\tau = RC = 50 \times 200 \times 10^{-6} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ s}$, $\tau = 10 \text{ ms}$. L'intensité est maximale au début de la décharge : $|i(0)| = E/R = 2,0 \times 10^3 / 50 = 40 \text{ A}$. d) $\exp(-t_1/\tau) = 0,10$, donc $t_1 = \tau \cdot \ln(10) = 10 \times 2,303 = t_1 \approx 23 \text{ ms}$.

12. a) $C = c \cdot S = 1,0 \times 5,0 \times 10^{-5} = 5,0 \times 10^{-5} \text{ } \mu\text{F} = 5,0 \times 10^{-11} \text{ F} = 50 \text{ pF}$. $R = r/S = 20 \times 10^3 / 5,0 \times 10^{-5} = 4,0 \times 10^8 \text{ } \Omega = 400 \text{ M}\Omega$ (les cm^2 se simplifient).

b) $\tau = R \cdot C = 4,0 \times 10^8 \times 5,0 \times 10^{-11} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ s}$, $\tau = 20 \text{ ms}$. De façon générale $\tau = (r/S) \cdot (c \cdot S) = r \cdot c$: la surface s'élimine, τ est une propriété de la membrane, pas de la taille de la cellule. Vérification : $20 \times 10^3 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}^2 \times 1,0 \times 10^{-6} \text{ F} \cdot \text{cm}^{-2} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ s}$. c) $q = C \cdot \Delta u = 5,0 \times 10^{-11} \times 0,100 = 5,0 \times 10^{-12} \text{ C}$. $N = q/e = 5,0 \times 10^{-12} / 1,6 \times 10^{-19} \approx 3,1 \times 10^7$ ions, une infime fraction des ions présents dans la cellule. d) $c = 1,0 \text{ } \mu\text{F} \cdot \text{cm}^{-2} = 1,0 \times 10^{-6} \text{ F} / 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ F} \cdot \text{m}^{-2}$. Pour un condensateur plan, $C/S = \epsilon_0 \cdot \epsilon \square / e$, donc $\epsilon \square = c \cdot e / \epsilon_0 = 1,0 \times 10^{-2} \times 5,0 \times 10^{-9} / 8,85 \times 10^{-12} = \epsilon \square \approx 5,6$, valeur typique d'un milieu lipidique.

13. a) **Faux** : la durée de charge est fixée par $\tau = RC$, indépendante de E . Seule la tension finale double.

b) **Vrai** : $u(0) = 0$ par continuité, donc la loi des mailles donne $u_R(0) = E$. c) **Vrai** : $u(2\tau) = E \cdot \exp(-2) = 0,135 \cdot E$, soit environ 14 %. d) **Vrai** : $\exp(-\Delta t/\tau) = 1/2$ pour $\Delta t = \tau \cdot \ln 2 \approx 0,69 \cdot \tau$, quel que soit l'instant de départ. e) **Faux** : les condensateurs de filtrage ont des capacités de l'ordre du nF au mF ; 1 F correspond à un supercondensateur, utilisé pour stocker de l'énergie.