

Mouvement des satellites et des planètes

COURS • P10 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Écrire la force de gravitation exercée par un astre à symétrie sphérique et le champ de gravitation correspondant.
- Choisir le référentiel adapté (géocentrique pour un satellite de la Terre, héliocentrique pour une planète) et justifier qu'il est galiléen.
- Appliquer la deuxième loi de Newton dans le repère de Frenet pour montrer que le mouvement circulaire d'un satellite est uniforme.
- Établir l'expression de la vitesse $v = \sqrt{GM/r}$ et de la période $T = 2\pi\sqrt{r^3/GM}$ d'un satellite en orbite circulaire.
- Établir la troisième loi de Kepler $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$ dans le cas d'une orbite circulaire.
- Énoncer les trois lois de Kepler et les interpréter (ellipse, foyer, loi des aires, vitesse au périhélie et à l'aphélie).
- Définir un satellite géostationnaire et calculer son altitude.
- Déterminer la masse d'un astre à partir de la période et du rayon de l'orbite de l'un de ses satellites.
- Exploiter un tableau de données ou un graphique pour vérifier la troisième loi de Kepler.

Cours

1. La gravitation universelle et le champ de gravitation

Loi de la gravitation universelle (Newton). Deux corps ponctuels A et B, de masses m_A et m_B , séparés d'une distance d , s'attirent mutuellement. La force exercée par A sur B est dirigée de B vers A, de valeur :

$$F = G \cdot m_A \cdot m_B / d^2$$

où $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ est la **constante de gravitation universelle**. Par la troisième loi de Newton, B exerce sur A une force opposée, de même valeur.

Cette loi s'applique aussi aux corps à **répartition sphérique de masse** (étoiles, planètes considérées comme des boules homogènes par couches) : tout se passe comme si leur masse était concentrée en leur centre. La distance d est alors mesurée entre les centres.

Écriture vectorielle. Pour un satellite S de masse m à la distance r du centre O d'un astre de masse M , on note $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de O vers S. La force de gravitation s'écrit :

$$\vec{F} = -G \cdot M \cdot m / r^2 \cdot \vec{u}$$

Le signe moins traduit l'attraction : la force est dirigée vers le centre de l'astre.

Champ de gravitation. L'astre crée en tout point de l'espace un **champ de gravitation** $\vec{g}$ tel que $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$:

$$\vec{g} = -G \cdot M / r^2 \cdot \vec{u}, \text{ de valeur } g = G \cdot M / r^2 \text{ (en } \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}, \text{ équivalent à } \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{)}$$

Le champ est **radial** (dirigé vers le centre) et sa valeur décroît comme $1/r^2$: à une distance double, il est quatre fois plus faible. À la surface de la Terre ($r = R_T$), on retrouve $g_0 = G \cdot M_T / R_T^2 \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, à condition de négliger la rotation terrestre. Une relation pratique en découle : $G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$.

Ordres de grandeur utiles :

Grandeur	Valeur
Masse de la Terre M_T	$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon moyen de la Terre R_T	$6\,371 \text{ km} = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$
$G \cdot M_T$	$3,98 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Masse du Soleil M_S	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Distance moyenne Terre-Soleil (1 unité astronomique, UA)	$1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
Distance moyenne Terre-Lune	$3,84 \times 10^8 \text{ m}$
Jour sidéral (rotation de la Terre sur elle-même)	$86\,164 \text{ s}$ (23 h 56 min 4 s)

Exemple court : à l'altitude de la Station spatiale internationale ($h = 400 \text{ km}$, donc $r = 6\,771 \text{ km}$), $g = 3,98 \times 10^{14} / (6,771 \times 10^6)^2 \approx 8,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La gravitation y est à peine plus faible qu'au sol : l'impesanteur des astronautes ne vient pas de l'absence de gravitation (voir paragraphe 6).

2. Référentiels et hypothèses d'étude

Le mouvement d'un satellite de la Terre (naturel comme la Lune, ou artificiel) s'étudie dans le **référentiel géocentrique** : repère centré sur le centre de la Terre, dont les axes pointent vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes. Il n'est pas entraîné par la rotation de la Terre sur elle-même. On le considère galiléen pour des durées courtes devant l'année.

Le mouvement d'une planète ou d'une comète autour du Soleil s'étudie dans le **référentiel héliocentrique**, considéré comme galiléen.

Hypothèses du modèle :

- l'astre attracteur est à symétrie sphérique ;
- le satellite est modélisé par un point matériel (son centre de masse) ;
- la seule force prise en compte est la force de gravitation exercée par l'astre central (on néglige les autres astres et les frottements de la haute atmosphère) ;
- la masse du satellite est très petite devant celle de l'astre.

3. Le mouvement circulaire d'un satellite est uniforme

On suppose que la trajectoire est un cercle de centre O (centre de l'astre) et de rayon $r = R + h$, où R est le rayon de l'astre et h l'altitude.

Deuxième loi de Newton dans le référentiel géocentrique : $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$. Le repère de Frenet est le mieux adapté, car la force est dirigée vers le centre. Avec $\vec{n} = -\vec{u}$ (vecteur normal dirigé vers le centre) :

$$m \cdot \vec{a} = G \cdot M \cdot m / r^2 \cdot \vec{n}, \text{ donc } \vec{a} = G \cdot M / r^2 \cdot \vec{n}$$

Projection sur $\vec{t}$: la force n'a pas de composante tangentielle, donc $a_t = dv/dt = 0$. La valeur de la vitesse est constante : **le mouvement est uniforme.**

Projection sur $\vec{n}$: $a_n = v^2/r = G \cdot M / r^2$. D'où :

$$v = \sqrt{G \cdot M / r}$$

Conséquences :

- la vitesse ne dépend **pas de la masse du satellite** : un gros satellite et un petit débris sur la même orbite vont à la même vitesse ;
- plus le satellite est éloigné (r grand), plus il est **lent** ;
- l'accélération d'un satellite en mouvement circulaire uniforme est centripète et n'est pas nulle : le satellite « tombe » en permanence vers l'astre, mais sa vitesse tangentielle le fait manquer la surface. Newton l'illustre par un boulet tiré horizontalement du haut d'une montagne, de plus en plus vite, jusqu'à faire le tour de la Terre.



Méthode pour un satellite

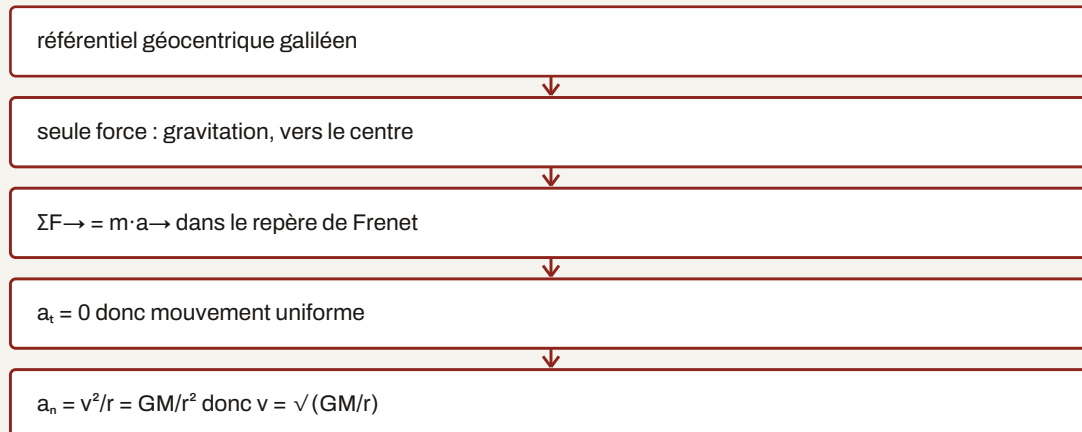


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

4. Période de révolution et troisième loi de Kepler

La **période de révolution** T est la durée d'un tour complet. Pour un mouvement circulaire uniforme, le satellite parcourt la circonférence $2\pi r$ à la vitesse v :

$$T = 2\pi r / v = 2\pi r \cdot \sqrt{r / (G \cdot M)} = 2\pi \cdot \sqrt{r^3 / (G \cdot M)}$$

En élevant au carré :

$$T^2 / r^3 = 4\pi^2 / (G \cdot M)$$

Ce rapport ne dépend que de la masse M de l'astre attracteur : il est **le même pour tous les satellites d'un même astre**. C'est la **troisième loi de Kepler**, établie ici pour des orbites circulaires.

Applications immédiates :

- si le rayon de l'orbite est multiplié par 4, la période est multipliée par $\sqrt{4^3} = 8$ et la vitesse divisée par 2 ;
- connaissant r et T pour un satellite, on calcule la masse de l'astre : $M = 4\pi^2 \cdot r^3 / (G \cdot T^2)$. C'est ainsi qu'on « pèse » la Terre avec la Lune, le Soleil avec les planètes, Jupiter avec ses lunes ;
- inversement, connaissant M , on trouve le rayon d'orbite qui correspond à une période voulue : $r = (G \cdot M \cdot T^2 / (4\pi^2))^{1/3}$, c'est-à-dire la racine cubique.

Unités : dans la formule, T est en secondes et r en mètres. Si l'on compare deux planètes du Soleil, on peut aussi écrire $T_1^2/r_1^3 = T_2^2/r_2^3$ avec n'importe quelles unités cohérentes (années et UA, par exemple), puisque seul le rapport compte.

5. Le satellite géostationnaire

Un satellite **géostationnaire** reste immobile pour un observateur terrestre : il est toujours à la verticale du même point de l'équateur. Il est très utilisé pour les télécommunications, la télévision et la météorologie (images continues d'une même zone).

Conditions nécessaires, dans le référentiel géocentrique :

- l'orbite est **circulaire** (mouvement uniforme, à distance constante de la Terre) ;
- l'orbite est dans le **plan de l'équateur** : le centre de l'orbite doit être le centre de la Terre, et le seul cercle centré en O qui reste au-dessus d'un même parallèle tout en tournant avec la Terre est l'équateur ;
- le satellite tourne **dans le même sens** que la Terre ;
- sa période est égale à la période de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique, le **jour sidéral** : $T = 86\,164\text{ s}$ (et non 24 h, durée du jour solaire, qui inclut le mouvement de la Terre autour du Soleil).

Calcul de l'altitude. D'après la troisième loi de Kepler :

$$r = (G \cdot M_T \cdot T^2 / (4\pi^2))^{1/3} \approx 4,22 \times 10^7 \text{ m, soit } h = r - R_T \approx 3,58 \times 10^4 \text{ km.}$$

Il n'existe donc qu'une seule orbite géostationnaire, à environ 36 000 km d'altitude. Un satellite géostationnaire ne peut pas survoler la France en permanence : il est au-dessus de l'équateur.

6. Impesanteur à bord d'un satellite

Dans la Station spatiale internationale, les objets flottent. Ce n'est pas parce que la gravitation est nulle ($g \approx 8,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à 400 km), mais parce que la station et tout ce qu'elle contient ont la **même accélération**, $a \rightarrow = g \rightarrow$: ils sont en chute libre ensemble. Aucun objet ne presse sur le plancher ; on parle d'**impesanteur** (ou d'apesanteur apparente). C'est la même situation que dans un ascenseur en chute libre.

7. Les lois de Kepler

Au début du XVIII^e siècle, Johannes Kepler énonce trois lois à partir des observations très précises de Tycho Brahé sur la planète Mars. Newton les démontrera ensuite à partir de sa loi de la gravitation. Elles s'appliquent aux planètes autour du Soleil (référentiel héliocentrique) et à tout satellite autour de son astre.

Rappel sur l'ellipse. Une ellipse est l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$, où F et F' sont deux points fixes appelés **foyers** et a le **demi-grand axe**. Le cercle est l'ellipse particulière où F et F' sont confondus ($a = r$). Pour une orbite autour du Soleil, le point le plus proche du Soleil est le **périhélie**, le plus éloigné l'**aphélie** ; leurs distances au Soleil vérifient $r_p + r_a = 2a$. Autour de la Terre, on parle de **périgée** et d'**apogée**.

Première loi (loi des orbites). Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une **ellipse** dont le Soleil occupe l'un des **foyers**.

Deuxième loi (loi des aires). Le segment qui relie le Soleil à la planète balaie des **aires égales pendant des durées égales**.

Conséquence : la planète va **plus vite près du Soleil** (au périhélie) et **plus lentement loin du Soleil** (à l'aphélie). En effet, pendant une même durée Δt , l'aire balayée près du Soleil est un triangle étroit et allongé qui doit avoir la même aire qu'un triangle court et large loin du Soleil : l'arc parcouru près du Soleil est plus long. Au périhélie et à l'aphélie, la vitesse est perpendiculaire au rayon ; l'aire balayée pendant une courte durée Δt vaut alors $\frac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot \Delta t$, d'où :

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

Pour une orbite **circulaire**, la loi des aires impose une vitesse constante : on retrouve le mouvement uniforme du paragraphe 3.

Troisième loi (loi des périodes). Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport du carré de la période de révolution au cube du demi-grand axe est le même :

$$T^2 / a^3 = \text{constante} = 4\pi^2 / (G \cdot M_S)$$

Pour une orbite circulaire, $a = r$ et l'on retrouve le résultat démontré au paragraphe 4. On admet qu'il reste vrai pour une ellipse, a étant le demi-grand axe.

Les trois lois de Kepler

orbites : ellipse, astre central à un foyer

aires : aires égales en durées égales, plus rapide au périhélie

périodes : T^2/a^3 identique pour tous les satellites d'un même astre

Repères complémentaires, sans séquence causale

Exemple court avec des unités astronomiques. Pour la Terre, $T = 1$ an et $a = 1$ UA, donc $T^2/a^3 = 1 \text{ an}^2 \cdot \text{UA}^{-3}$ pour toute planète du Soleil. Jupiter est à 5,20 UA : $T = \sqrt{(5,20)^3} \approx \sqrt{140,6} \approx 11,9$ ans.

Vérification graphique. Si l'on trace T^2 en fonction de a^3 pour plusieurs satellites d'un même astre, on obtient une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $4\pi^2/(G \cdot M)$. On peut en déduire la masse de l'astre central.

Situation	Formule utile
Vitesse sur orbite circulaire	$v = \sqrt{(G \cdot M/r)}$
Période sur orbite circulaire	$T = 2\pi \cdot \sqrt{(r^3/(G \cdot M))}$
Masse de l'astre central	$M = 4\pi^2 \cdot r^3 / (G \cdot T^2)$
Comparer deux satellites d'un même astre	$T_1^2/a_1^3 = T_2^2/a_2^3$
Périhélie et aphélie	$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$

Exemples résolus

Exemple 1 : la Station spatiale internationale

La Station spatiale internationale (ISS) décrit une orbite supposée circulaire à l'altitude $h = 400$ km. Données : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6\,371 \text{ km}$. a) Préciser le référentiel d'étude et montrer que le mouvement est uniforme. b) Calculer la vitesse de l'ISS. c) Calculer sa période, puis le nombre de tours qu'elle effectue en un jour solaire de 24 h.

Résolution. a) Référentiel géocentrique, supposé galiléen. Seule force : la gravitation terrestre, dirigée vers le centre de la Terre. Dans le repère de Frenet, la deuxième loi donne $a_t = dv/dt = 0$: la valeur de la vitesse est constante, le mouvement est **circulaire uniforme**. b) $r = R_T + h = 6\,371 + 400 = 6\,771 \text{ km} =$

$6,771 \times 10^6 \text{ m}$. $G \cdot MT = 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} = 3,982 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. $v = \sqrt{(3,982 \times 10^{14} / 6,771 \times 10^6)} = \sqrt{(5,881 \times 10^7)} \approx 7,67 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit environ $27\,600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. c) $T = 2\pi r/v = 2\pi \times 6,771 \times 10^6 / 7,669 \times 10^3 \approx 5,55 \times 10^3 \text{ s}$, soit environ $92,5 \text{ min}$. En $24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$: $86\,400 / 5\,548 \approx 15,6 \text{ tours}$.

Exemple 2 : l'orbite géostationnaire

a) Énoncer les conditions pour qu'un satellite soit géostationnaire. b) Calculer le rayon de son orbite et son altitude (mêmes données ; jour sidéral $T = 86\,164 \text{ s}$). c) Calculer sa vitesse dans le référentiel géocentrique.

Résolution. a) Orbite circulaire, dans le plan de l'équateur, parcourue dans le sens de rotation de la Terre, avec une période égale au jour sidéral. b) Troisième loi de Kepler : $r^3 = G \cdot MT \cdot T^2 / (4\pi^2) = 3,982 \times 10^{14} \times (86\,164)^2 / (4\pi^2) = 3,982 \times 10^{14} \times 7,424 \times 10^9 / 39,48 \approx 7,488 \times 10^{22} \text{ m}^3$. Donc $r = (7,488 \times 10^{22})^{1/3} \approx 4,22 \times 10^7 \text{ m}$ ($42\,150 \text{ km}$). Altitude : $h = 42\,150 - 6\,371 \approx 3,58 \times 10^4 \text{ km}$. c) $v = 2\pi r/T = 2\pi \times 4,215 \times 10^7 / 86\,164 \approx 3,07 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vérification : $\sqrt{(G \cdot MT/r)} = \sqrt{(3,982 \times 10^{14} / 4,215 \times 10^7)} = \sqrt{(9,447 \times 10^6)} \approx 3,07 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exemple 3 : peser Jupiter grâce à Io

Io, satellite de Jupiter, décrit une orbite quasi circulaire de rayon $r = 4,22 \times 10^8 \text{ m}$ en $T = 1,769 \text{ jour}$. Calculer la masse de Jupiter.

Résolution. Référentiel « jupitérocentrique » (centre de Jupiter, axes vers des étoiles lointaines), supposé galiléen ; seule force : l'attraction de Jupiter. Troisième loi de Kepler : $T^2/r^3 = 4\pi^2/(G \cdot MJ)$, donc $MJ = 4\pi^2 \cdot r^3 / (G \cdot T^2)$. Conversion : $T = 1,769 \times 86\,400 \approx 1,528 \times 10^5 \text{ s}$, $T^2 \approx 2,336 \times 10^{10} \text{ s}^2$. $r^3 = (4,22 \times 10^8)^3 \approx 7,515 \times 10^{25} \text{ m}^3$. $MJ = 39,48 \times 7,515 \times 10^{25} / (6,67 \times 10^{-11} \times 2,336 \times 10^{10}) = 2,967 \times 10^{27} / 1,558 \approx 1,90 \times 10^{27} \text{ kg}$, soit environ 318 fois la masse de la Terre.

Méthodes et pièges

- Méthode type : référentiel (géocentrique ou héliocentrique), bilan (gravitation seule), deuxième loi dans le repère de Frenet, projection sur $t \rightarrow$ (mouvement uniforme) puis sur $n \rightarrow$ (vitesse).
- Le rayon de l'orbite est $r = R + h$: n'oublie jamais d'ajouter le rayon de l'astre à l'altitude, et convertis les km en m.
- Dans $T^2 = 4\pi^2 r^3 / (GM)$, T est en secondes : convertis les jours ($\times 86\,400$) et les années.
- La masse du satellite disparaît des résultats : si un énoncé te la donne, elle sert à calculer une force ou une énergie, pas la vitesse ni la période.
- « Vitesse constante » ne veut pas dire « accélération nulle » : l'accélération d'un satellite est centripète, de valeur GM/r^2 .
- Géostationnaire : période égale au jour sidéral ($86\,164 \text{ s}$), orbite équatoriale. Un satellite à 24 h de période sur une orbite inclinée n'est pas géostationnaire.
- Pour comparer deux planètes du Soleil, travaille en années et en UA : $T^2/a^3 = 1$ évite de manipuler G et MS .
- Pour calculer une racine cubique à la calculatrice, utilise la puissance $1/3$ avec des parenthèses : $(7,488E22)^{1/3}$.
- Loi des aires : la vitesse est maximale au périhélie, minimale à l'aphélie. Ne l'applique pas sous la forme $rp \cdot vp = ra \cdot va$ en d'autres points de l'orbite.

Vers le PASS

Le mouvement des satellites n'est pas en soi un objet d'étude en PASS, mais il entraîne des réflexes qui y servent sans cesse : appliquer la deuxième loi de Newton dans le repère de Frenet, reconnaître une accélération centripète, manipuler des lois en puissance (T proportionnel à $r^{3/2}$, champ en $1/r^2$) et raisonner en proportions sans calculatrice, ce qui est exactement l'esprit des QCM. La même structure mathématique (force centrale en $1/r^2$) se retrouve en électrostatique avec la loi de Coulomb, qui gouverne les interactions entre ions, le modèle planétaire de l'atome et les énergies de liaison. Enfin, l'impesanteur et l'accélération centripète éclairent la physiologie spatiale et la centrifugation, souvent évoquées en biophysique.

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Calculer la valeur de la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur la Lune. Données : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$; $M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$; distance entre les centres $d = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$; $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.
2. a) Calculer la valeur du champ de gravitation terrestre au sol, g_0 ($R_T = 6\,371 \text{ km}$). b) Sans nouvelle donnée, en déduire sa valeur à l'altitude $h = R_T$. c) À quelle distance du centre de la Terre le champ vaut-il $g_0/9$?
3. Un satellite d'observation décrit une orbite circulaire à 800 km d'altitude. Calculer sa vitesse et sa période ($G\cdot M_T = 3,98 \times 10^{14} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-2}$; $R_T = 6\,371 \text{ km}$).
4. Mars tourne autour du Soleil sur une orbite de demi-grand axe $1,52 \text{ UA}$. En utilisant la troisième loi de Kepler et les données de la Terre (1 an , 1 UA), calculer la période de révolution de Mars en années, puis en jours ($1 \text{ an} = 365,25 \text{ jours}$).
5. Une comète décrit autour du Soleil une ellipse très allongée. a) Où se trouve le Soleil ? b) En quel point de l'orbite la comète va-t-elle le plus vite ? Justifier par une loi de Kepler. c) Son mouvement est-il uniforme ?

Niveau 2 : type bac

6. Les satellites du système GPS décrivent des orbites circulaires de période $T = 11 \text{ h } 58 \text{ min}$. a) Convertir T en secondes. b) Calculer le rayon de leur orbite et leur altitude. c) Calculer leur vitesse de deux façons. d) Ces satellites sont-ils géostationnaires ? Justifier. Données : $G\cdot M_T = 3,982 \times 10^{14} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-2}$; $R_T = 6\,371 \text{ km}$.
7. La Terre décrit autour du Soleil une orbite quasi circulaire de rayon $r = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ en $T = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$. a) Préciser le référentiel d'étude. b) Calculer la masse du Soleil. c) Calculer la vitesse de la Terre sur son orbite. d) Vénus orbite à $1,08 \times 10^{11} \text{ m}$ du Soleil : calculer sa période en jours, sans utiliser G .
8. La Lune décrit autour de la Terre une orbite quasi circulaire de rayon $3,84 \times 10^8 \text{ m}$. a) Calculer sa période de révolution prévue par la troisième loi de Kepler ($G\cdot M_T = 3,982 \times 10^{14} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-2}$), en jours. b) Comparer à la valeur mesurée, $27,3 \text{ jours}$. c) Calculer la vitesse de la Lune à partir de la période mesurée. d) Calculer la valeur de son accélération et la comparer au champ de gravitation terrestre à cette distance.

9. Deux satellites A et B tournent autour de la Terre sur des orbites circulaires de rayons r_A et $r_B = 4 \cdot r_A$. a) Exprimer v_B en fonction de v_A et T_B en fonction de T_A . b) A est à 300 km d'altitude ; calculer r_A , r_B , puis v_A , v_B , T_A et T_B ($G \cdot M_T = 3,98 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$; $R_T = 6\,371 \text{ km}$). c) Lequel des deux subit l'accélération la plus grande ? Dans quel rapport ?

Niveau 3 : vers le PASS

10. a) Montrer que la période d'un satellite en orbite circulaire rasante ($r \approx R_T$) s'écrit $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{R_T/g_0}$, avec g_0 le champ au sol. b) Calculer T_0 ($g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $R_T = 6\,371 \text{ km}$). c) Expliquer pourquoi aucun satellite de la Terre en orbite circulaire ne peut avoir une période inférieure à T_0 .
11. Le tableau donne le rayon a de l'orbite et la période T de quatre satellites de Jupiter : Io, $a = 4,22 \times 10^8 \text{ m}$, $T = 1,769 \text{ jour}$; Europe, $a = 6,71 \times 10^8 \text{ m}$, $T = 3,551 \text{ jours}$; Ganymède, $a = 1,070 \times 10^9 \text{ m}$, $T = 7,155 \text{ jours}$; Callisto, $a = 1,883 \times 10^9 \text{ m}$, $T = 16,69 \text{ jours}$. a) Calculer T^2/a^3 pour chaque satellite (T en s). b) Conclure. c) En déduire la masse de Jupiter ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$).
12. La comète de Halley passe à $r_p = 0,586 \text{ UA}$ du Soleil au périhélie et à $r_a = 35,1 \text{ UA}$ à l'aphélie. Sa vitesse au périhélie vaut $v_p = 54,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. a) Calculer sa vitesse à l'aphélie. b) Calculer le demi-grand axe de son orbite. c) Calculer sa période de révolution en années.
13. Vrai ou faux ? Justifier. A) La vitesse d'un satellite en orbite circulaire dépend de sa masse. B) Un satellite géostationnaire peut rester à la verticale de Paris. C) Si le rayon de l'orbite est multiplié par 4, la période est multipliée par 8. D) Un satellite en mouvement circulaire uniforme a une accélération nulle. E) Les astronautes de l'ISS flottent parce que la gravitation terrestre est nulle à 400 km d'altitude.

Corrigés

1. $F = G \cdot M_T \cdot M_L / d^2 = 6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times 7,35 \times 10^{22} / (3,84 \times 10^8)^2$. Numérateur : $3,982 \times 10^{14} \times 7,35 \times 10^{22} \approx 2,927 \times 10^{37}$. Dénominateur : $1,475 \times 10^{17}$. $F \approx 1,98 \times 10^{20} \text{ N}$. La Lune exerce sur la Terre une force de même valeur, de sens opposé.
2. a) $g_0 = G \cdot M_T / R_T^2 = 3,982 \times 10^{14} / (6,371 \times 10^6)^2 = 3,982 \times 10^{14} / 4,059 \times 10^{13} \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- b) À $h = R_T$, $r = 2R_T$: $g = G \cdot M_T / (2R_T)^2 = g_0/4 \approx 2,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. c) $g = g_0/9$ si $r^2 = 9R_T^2$, soit $r = 3R_T \approx 1,91 \times 10^4 \text{ km}$ (altitude $2R_T$).
3. $r = 6\,371 + 800 = 7\,171 \text{ km} = 7,171 \times 10^6 \text{ m}$. $v = \sqrt{G \cdot M_T / r} = \sqrt{3,98 \times 10^{14} / 7,171 \times 10^6} = \sqrt{5,55 \times 10^7} \approx 7,45 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. $T = 2\pi r / v = 2\pi \times 7,171 \times 10^6 / 7,45 \times 10^3 \approx 6,05 \times 10^3 \text{ s}$, soit environ 101 min.
4. Même astre attracteur : T^2/a^3 est le même pour la Terre et Mars. Avec la Terre : $1 \text{ an}^2 / 1 \text{ UA}^3$. Donc $T(\text{Mars})^2 = 1,52^3 = 3,512$ et $T(\text{Mars}) = \sqrt{3,512} \approx 1,87 \text{ an}$, soit $1,874 \times 365,25 \approx 684 \text{ jours}$ (valeur réelle 687 j ; l'écart vient de l'arrondi de 1,52).
5. a) Le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse (première loi de Kepler).
- b) Au périhélie, point le plus proche du Soleil : d'après la loi des aires, des aires égales sont balayées en des durées égales ; près du Soleil, le rayon est court, l'arc parcouru doit donc être plus long, la vitesse plus grande. c) Non : la valeur de la vitesse varie le long de l'orbite. Seule une orbite circulaire donne un mouvement uniforme.
6. a) $T = 11 \times 3600 + 58 \times 60 = 39\,600 + 3\,480 = 43\,080 \text{ s}$.
- b) $r^3 = G \cdot M_T \cdot T^2 / (4\pi^2) = 3,982 \times 10^{14} \times (43\,080)^2 / 39,48 = 3,982 \times 10^{14} \times 1,856 \times 10^9 / 39,48 \approx 1,872 \times 10^{22} \text{ m}^3$. $r = (1,872 \times 10^{22})^{1/3} \approx 2,66 \times 10^7 \text{ m}$ (26 550 km). $h = 26\,550 - 6\,371 \approx 2,02 \times 10^4 \text{ km}$. c) $v = 2\pi r / T = 2\pi \times 2,655$



$\times 10^7 / 43\,080 \approx 3,87 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ou $v = \sqrt{(G \cdot MT/r)} = \sqrt{(3,982 \times 10^{14} / 2,655 \times 10^7)} = \sqrt{(1,500 \times 10^7)} \approx 3,87 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. d) **Non** : leur période (environ un demi-jour sidéral) n'est pas égale au jour sidéral ; ils font deux tours pendant que la Terre en fait un. Leurs orbites sont d'ailleurs inclinées sur l'équateur.

7. a) **Référentiel héliocentrique**, supposé galiléen.

b) $MS = 4\pi^2 \cdot r^3 / (G \cdot T^2) = 39,48 \times (1,50 \times 10^{11})^3 / (6,67 \times 10^{-11} \times (3,156 \times 10^7)^2) = 39,48 \times 3,375 \times 10^{33} / (6,67 \times 10^{-11} \times 9,960 \times 10^{14}) = 1,332 \times 10^{35} / 6,643 \times 10^4 \approx 2,01 \times 10^{30} \text{ kg}$. c) $v = 2\pi r / T = 2\pi \times 1,50 \times 10^{11} / 3,156 \times 10^7 \approx 2,99 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (près de $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$). d) Troisième loi : $T(\text{Vénus})/T(\text{Terre}) = (r(\text{Vénus})/r(\text{Terre}))^{3/2} = (1,08/1,50)^{3/2} = 0,72^{3/2} = \sqrt{0,3732} \approx 0,611$. $T(\text{Vénus}) \approx 0,611 \times 365,25 \approx 223 \text{ jours}$ (valeur réelle 225 j).

8. a) $T = 2\pi \cdot \sqrt{(r^3/(G \cdot MT))}$. $r^3 = (3,84 \times 10^8)^3 \approx 5,662 \times 10^{25} \text{ m}^3$; $r^3/(G \cdot MT) = 5,662 \times 10^{25} / 3,982 \times 10^{14} \approx 1,422 \times 10^{11} \text{ s}^2$; racine $\approx 3,771 \times 10^5 \text{ s}$; $T \approx 2,369 \times 10^6 \text{ s}$, soit $2,369 \times 10^6 / 86\,400 \approx 27,4 \text{ jours}$.

b) Écart avec 27,3 j : $(27,4 - 27,3)/27,3 \approx 0,4 \%$. Le modèle (orbite circulaire, Terre fixe, Soleil négligé) est **très satisfaisant**. c) $T = 27,3 \times 86\,400 \approx 2,359 \times 10^6 \text{ s}$. $v = 2\pi r / T = 2\pi \times 3,84 \times 10^8 / 2,359 \times 10^6 \approx 1,02 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. d) $a = v^2/r = (1,023 \times 10^3)^2 / 3,84 \times 10^8 \approx 2,73 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Champ à cette distance : $g = G \cdot MT/r^2 = 3,982 \times 10^{14} / 1,475 \times 10^{17} \approx 2,70 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Les deux valeurs sont égales à 1 % près : c'est bien la gravitation terrestre qui « courbe » l'orbite de la Lune (raisonnement historique de Newton).

9. a) $v = \sqrt{(G \cdot MT/r)}$: $v_B = v_A / \sqrt{4} = v_A/2$. T proportionnel à $r^{3/2}$: $T_B = 4^{3/2} \cdot T_A = 8 \cdot T_A$.

b) $r_A = 6\,371 + 300 = 6\,671 \text{ km} = 6,671 \times 10^6 \text{ m}$; $r_B = 4 \times 6,671 \times 10^6 \approx 2,668 \times 10^7 \text{ m}$. $v_A = \sqrt{(3,98 \times 10^{14} / 6,671 \times 10^6)} = \sqrt{(5,966 \times 10^7)} \approx 7,72 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_B \approx 3,86 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. $T_A = 2\pi \times 6,671 \times 10^6 / 7,724 \times 10^3 \approx 5,43 \times 10^3 \text{ s}$ (90,4 min) ; $T_B = 8 \times T_A \approx 4,34 \times 10^4 \text{ s}$ (12,1 h). c) $a = G \cdot MT/r^2$: A, plus proche, subit l'accélération la plus grande ; $a_A/a_B = (r_B/r_A)^2 = 16$.

10. a) Orbite rasante : $r = RT$, donc $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{(RT^3/(G \cdot MT))}$. Avec $G \cdot MT = g_0 \cdot RT^2$: $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{(RT^3/(g_0 \cdot RT^2))} = 2\pi \cdot \sqrt{(RT/g_0)}$.

b) $T_0 = 2\pi \times \sqrt{(6,371 \times 10^6 / 9,81)} = 2\pi \times \sqrt{(6,494 \times 10^5)} \approx 2\pi \times 805,9 \approx 5,06 \times 10^3$ s, soit environ 84 min. c) $T = 2\pi \cdot \sqrt{(r^3 / (G \cdot M_T))}$ est une fonction croissante de r, et r ne peut pas être inférieur à R_T (sinon le satellite heurterait le sol ; en pratique l'atmosphère impose r nettement plus grand). Donc $T \geq T_0 \approx 84$ min pour tout satellite en orbite circulaire. L'ISS (92,5 min) est proche de cette limite.

11. a) Io : $T = 1,769 \times 86\,400 = 1,528 \times 10^5$ s ; $T^2 = 2,336 \times 10^{10}$ s² ; $a^3 = 7,515 \times 10^{25}$ m³ ; $T^2/a^3 \approx 3,11 \times 10^{-16}$ s²·m⁻³.

Europe : $T = 3,068 \times 10^5$ s ; $T^2 = 9,413 \times 10^{10}$; $a^3 = 3,021 \times 10^{26}$; $T^2/a^3 \approx 3,12 \times 10^{-16}$ s²·m⁻³. Ganymède : $T = 6,182 \times 10^5$ s ; $T^2 = 3,822 \times 10^{11}$; $a^3 = 1,225 \times 10^{27}$; $T^2/a^3 \approx 3,12 \times 10^{-16}$ s²·m⁻³. Callisto : $T = 1,442 \times 10^6$ s ; $T^2 = 2,079 \times 10^{12}$; $a^3 = 6,677 \times 10^{27}$; $T^2/a^3 \approx 3,11 \times 10^{-16}$ s²·m⁻³. b) Le rapport est constant (écarts inférieurs à 0,4 %) : la **troisième loi de Kepler** est vérifiée pour les satellites de Jupiter. Valeur moyenne $k \approx 3,115 \times 10^{-16}$ s²·m⁻³. c) $k = 4\pi^2 / (G \cdot M_J)$, donc $M_J = 4\pi^2 / (G \cdot k) = 39,48 / (6,67 \times 10^{-11} \times 3,115 \times 10^{-16}) = 39,48 / 2,078 \times 10^{-26} \approx 1,90 \times 10^{27}$ kg, cohérent avec l'exemple 3.

12. a) Loi des aires au périhélie et à l'aphélie : $r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$, donc $v_a = v_p \cdot r_p / r_a = 54,5 \times 0,586 / 35,1 \approx 0,910$ km·s⁻¹ (les unités de distance se simplifient, inutile de convertir les UA).

b) $2a = r_p + r_a = 0,586 + 35,1 = 35,686$ UA, donc $a \approx 17,8$ UA. c) Troisième loi avec les données terrestres : $T^2 = a^3$ (T en années, a en UA). $a^3 = 17,843^3 \approx 5\,681$, donc $T = \sqrt{5\,681} \approx 75,4$ ans (valeur observée : environ 76 ans).

13. A) **Faux** : $v = \sqrt{(G \cdot M / r)}$ ne fait intervenir que la masse M de l'astre, pas celle du satellite.

B) **Faux** : un satellite géostationnaire est forcément dans le plan de l'équateur ; Paris est à environ 49° de latitude nord. C) **Vrai** : T est proportionnel à $r^{3/2}$, et $4^{3/2} = 8$. D) **Faux** : la direction de la vitesse change ; l'accélération est centripète, de valeur $v^2/r = G \cdot M / r^2$. E) **Faux** : à 400 km, $g \approx 8,7$ m·s⁻², soit près de 90 % de sa valeur au sol. Les astronautes flottent parce qu'ils sont en chute libre avec la station (même accélération $g \rightarrow$).