

Cinématique : vecteurs vitesse et accélération

COURS • P08 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Définir un système, choisir un référentiel et un repère adaptés à l'étude d'un mouvement.
- Écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ d'un point dans un repère cartésien et en déduire ses équations horaires.
- Établir les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération par dérivation par rapport au temps.
- Retrouver le vecteur position à partir du vecteur accélération par intégration, en exploitant les conditions initiales.
- Estimer une vitesse et une accélération à partir d'une chronophotographie ou d'un pointage vidéo.
- Caractériser un mouvement rectiligne uniforme et un mouvement rectiligne uniformément varié (accéléré ou ralenti).
- Établir et utiliser la relation $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ pour un mouvement rectiligne uniformément varié.
- Décrire un mouvement circulaire uniforme : vitesse angulaire, période, fréquence, relation $v = R \cdot \omega$.
- Exprimer le vecteur accélération dans le repère de Frenet et identifier ses composantes tangentielle et normale.
- Justifier que l'accélération d'un mouvement circulaire uniforme est centripète et de valeur v^2/R .

Cours

1. Décrire un mouvement : système, référentiel, repère

La **cinématique** est l'étude du mouvement indépendamment de ses causes : on décrit comment un objet bouge, sans chercher encore pourquoi (ce sera le rôle de la deuxième loi de Newton).

Le **système** est l'objet ou l'ensemble d'objets étudié. En Terminale, on modélise le plus souvent le système par un **point matériel**, en pratique son centre de masse, noté G ou M . Ce modèle est pertinent quand les dimensions de l'objet sont petites devant les distances parcourues, ou quand on ne s'intéresse qu'au mouvement d'ensemble.

Le **référentiel** est l'objet de référence par rapport auquel on décrit le mouvement, muni d'une horloge. Le mouvement est **relatif** : un passager assis dans un train est immobile dans le référentiel du train et en mouvement dans le référentiel terrestre. Les référentiels usuels sont :

- le **référentiel terrestre** (le sol, un laboratoire) ;
- le **référentiel géocentrique** (centre de la Terre et trois étoiles lointaines) ;
- le **référentiel héliocentrique** (centre du Soleil et trois étoiles lointaines).

On associe au référentiel un **repère d'espace** : une origine O et une base orthonormée ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), et un **repère de temps** : une origine des dates $t = 0$ et une unité, la seconde.

La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives occupées par le point au cours du temps. Elle dépend du référentiel : la valve d'une roue de vélo décrit un cercle dans le référentiel du vélo, et une cycloïde dans le référentiel terrestre.

Décrire un mouvement

1. système modélisé par un point • 2. référentiel et horloge • 3. repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) • 4. trajectoire • 5. équations horaires

2. Le vecteur position

La position du point M à la date t est repérée par le **vecteur position** :

$$\vec{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les **équations horaires** du mouvement. Elles s'expriment en mètres (m) et t en secondes (s). La distance OM vaut $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Pour un mouvement plan, on se limite à deux coordonnées, par exemple $x(t)$ et $y(t)$. Si l'on élimine t entre $x(t)$ et $y(t)$, on obtient l'**équation de la trajectoire** $y = f(x)$.

Exemple court : $x(t) = 2t$ et $y(t) = 4t^2$. De $t = x/2$ on tire $y = 4(x/2)^2 = x^2$. La trajectoire est un arc de parabole.

3. Le vecteur vitesse

Définition. Le **vecteur vitesse** du point M à la date t est la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = d\vec{OM}/dt$$

Ses coordonnées sont donc les dérivées des équations horaires :

$$v_x = dx/dt ; v_y = dy/dt ; v_z = dz/dt$$

Sa valeur (ou norme) vaut $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, en mètres par seconde ($m \cdot s^{-1}$).

Pourquoi cette définition ? Entre t et $t + \Delta t$, le point passe de M à M' . La vitesse moyenne vectorielle sur cet intervalle est $\vec{MM}'/\Delta t$. Quand Δt tend vers 0, ce rapport tend vers la dérivée de $\vec{OM}$: c'est la

vitesse instantanée. On retrouve exactement la construction du nombre dérivé en mathématiques.

Propriétés du vecteur vitesse :

- il est **tangent à la trajectoire** au point considéré (la corde MM' tend vers la tangente quand M' tend vers M) ;
- il est orienté dans le **sens du mouvement** ;
- sa norme est la vitesse instantanée, celle qu'indiquerait un compteur.

Conversion utile : $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 3,6 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Pour passer des $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ aux $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, on divise par 3,6 (car $1 \text{ km/h} = 1000 \text{ m} / 3600 \text{ s}$).

Estimation expérimentale. Sur une chronophotographie (positions $M_0, M_1, M_2...$ séparées d'une durée constante τ), on estime la vitesse au point M_i par :

$$\vec{v} \rightarrow i \approx (\vec{OM} \rightarrow i+1 - \vec{OM} \rightarrow i-1) / (2\tau) = \vec{M}_{i-1}M_{i+1} \rightarrow / (2\tau)$$

Cette méthode, dite centrée, est plus précise que $(\vec{OM} \rightarrow i+1 - \vec{OM} \rightarrow i) / \tau$, qui donne plutôt la vitesse au milieu de l'intervalle. Le vecteur obtenu se trace à partir de M_i , avec une échelle choisie (par exemple 1 cm pour $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

4. Le vecteur accélération

Définition. Le **vecteur accélération** est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, donc la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a} \rightarrow(t) = d\vec{v} \rightarrow / dt = d^2 \vec{OM} \rightarrow / dt^2$$

Coordonnées : $a_x = dv_x / dt = d^2 x / dt^2$, et de même pour y et z . Sa valeur s'exprime en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (des $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ par seconde).

Interprétation. L'accélération mesure la **variation du vecteur vitesse**, en valeur ET en direction. Un objet peut donc accélérer sans changer de valeur de vitesse : il suffit qu'il tourne. C'est le cas d'une voiture qui prend un virage à vitesse constante au compteur.

Estimation expérimentale. Avec les vitesses estimées aux points voisins :

$$\vec{a} \rightarrow i \approx (\vec{v} \rightarrow i+1 - \vec{v} \rightarrow i-1) / (2\tau)$$

On construit graphiquement le vecteur $\Delta \vec{v} \rightarrow = \vec{v} \rightarrow i+1 - \vec{v} \rightarrow i-1$ en plaçant les deux vecteurs à partir d'un même point, puis on divise par 2τ .

Accéléré ou ralenti. Le signe du produit scalaire $\vec{a} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow$ renseigne sur l'évolution de la valeur de la vitesse :

- $\vec{a} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow > 0$: la valeur de la vitesse augmente, le mouvement est **accéléré** ;
- $\vec{a} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow < 0$: la valeur de la vitesse diminue, le mouvement est **ralenti** ;
- $\vec{a} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = 0$ à chaque instant : la valeur de la vitesse est constante, le mouvement est **uniforme**.

Justification : $v^2 = \vec{v} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow$, donc $d(v^2) / dt = 2 \vec{v} \rightarrow \cdot (d\vec{v} \rightarrow / dt) = 2 \vec{a} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow$. Le signe de $\vec{a} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow$ est celui de la dérivée de v^2 .

Du vecteur accélération au vecteur position : l'intégration. Si l'on connaît $\vec{a} \rightarrow(t)$, on remonte à $\vec{v} \rightarrow(t)$ en cherchant une primitive de chaque coordonnée, puis à $\vec{OM} \rightarrow(t)$ de la même façon. Chaque primitive fait apparaître une constante, que l'on détermine grâce aux **conditions initiales** : la position $\vec{OM} \rightarrow(0)$ et la vitesse $\vec{v} \rightarrow(0) = \vec{v} \rightarrow_0$. Sans ces conditions, le mouvement n'est pas déterminé : deux objets soumis à la



même accélération peuvent avoir des trajectoires très différentes.

Dériver ou intégrer

vecteur position $\vec{OM} \rightarrow(t)$



vecteur vitesse $\vec{v} \rightarrow(t) = d\vec{OM} \rightarrow / dt$



vecteur accélération $\vec{a} \rightarrow(t) = d\vec{v} \rightarrow / dt$

Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

5. Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est **rectiligne** si la trajectoire est une portion de droite. On choisit alors un axe $(O, \vec{i})$ porté par cette droite, et une seule coordonnée $x(t)$ suffit.

Il est **rectiligne uniforme** (MRU) si, de plus, la valeur de la vitesse est constante. Le vecteur vitesse est alors constant (même direction, même sens, même valeur) et :

$$\vec{a} = 0 \rightarrow ; v(t) = v_0 ; x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

Réciproquement, un vecteur vitesse constant implique un mouvement rectiligne uniforme. La représentation de x en fonction de t est une droite de coefficient directeur v_0 .

Exemple court : un train roule à $216 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, soit $216/3,6 = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En 2,0 min (120 s), il parcourt $60 \times 120 = 7,2 \times 10^3 \text{ m}$, soit 7,2 km.

6. Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement est **rectiligne uniformément varié** (MRUV) si la trajectoire est rectiligne et le vecteur accélération constant, colinéaire à la trajectoire. Sur l'axe $(O, \vec{i})$: $a(t) = a$, constante.

Équations horaires (par intégration). Avec $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$:

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

On vérifie : $dx/dt = a \cdot t + v_0 = v(t)$, et $dv/dt = a$.

Relation indépendante du temps. De $v = a \cdot t + v_0$ on tire $t = (v - v_0)/a$ (si $a \neq 0$). En reportant dans $x - x_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (v - v_0)^2 / a^2 + v_0 \cdot (v - v_0) / a$$

$$\text{Multiplions par } 2a : 2a(x - x_0) = (v - v_0)^2 + 2v_0(v - v_0) = v^2 - 2v \cdot v_0 + v_0^2 + 2v \cdot v_0 - 2v_0^2 = v^2 - v_0^2.$$

$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$, valable uniquement pour un mouvement rectiligne uniformément varié.

Cette relation est très utile quand la durée n'est pas donnée (distance de freinage, vitesse atteinte après une distance donnée).



Accélééré ou ralenti. Si a et v sont de même signe, le mouvement est uniformément accéléré ; s'ils sont de signes contraires, il est uniformément ralenti. Attention : le signe de a seul ne suffit pas, il dépend de l'orientation de l'axe.

Représentations graphiques. $v(t)$ est une droite de pente a ; $x(t)$ est une parabole. L'aire sous la courbe $v(t)$ entre deux dates est égale au déplacement (c'est l'intégrale de v).

Exemple court : une voiture roulant à $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ freine avec une accélération de valeur $5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Avec l'axe orienté dans le sens du mouvement, $a = -5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Elle s'arrête ($v = 0$) après une distance $x - x_0 = (0 - 20^2)/(2 \times (-5,0)) = 400/10 = 40 \text{ m}$, en une durée $(0 - 20)/(-5,0) = 4,0 \text{ s}$.

7. Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est **circulaire** si la trajectoire est un cercle (ou un arc de cercle) de centre O et de rayon R . Il est **circulaire uniforme** (MCU) si la valeur de la vitesse est constante.

Grandeurs angulaires. On repère le point par l'angle $\theta(t)$ entre l'axe $(O, \vec{i})$ et $OM \rightarrow$. La **vitesse angulaire** est $\omega = d\theta/dt$, en radians par seconde ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$). Pour un MCU, ω est constante et $\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0$.

La longueur d'arc parcourue est $s = R \cdot \theta$ (θ en radians), donc :

$$v = R \cdot \omega$$

La **période** T est la durée d'un tour : $T = 2\pi R/v = 2\pi/\omega$ (en s). La **fréquence** $f = 1/T$ s'exprime en hertz (Hz), soit en tours par seconde. Ainsi $\omega = 2\pi f$. Une fréquence donnée en tours par minute se divise par 60 pour obtenir des tours par seconde.

Coordonnées cartésiennes. Avec O au centre et $\theta_0 = 0$: $x(t) = R \cdot \cos(\omega t)$ et $y(t) = R \cdot \sin(\omega t)$. En dérivant : $v_x = -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$; $v_y = R \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$, d'où $v = R \cdot \omega$.

$$a_x = -R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) ; a_y = -R \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t), \text{ d'où } \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{OM} \rightarrow.$$

Le vecteur accélération est donc de sens opposé à $OM \rightarrow$: il est dirigé **vers le centre** du cercle (on dit **centripète**), et sa valeur est $a = R \cdot \omega^2 = v^2/R$.

Dans un mouvement circulaire uniforme, la valeur de la vitesse est constante mais le vecteur vitesse change de direction à chaque instant : l'accélération n'est pas nulle. Elle est centripète et vaut $a = v^2/R = R \cdot \omega^2$.

Exemple court : un point du tambour d'une essoreuse de rayon 25 cm tournant à 1200 tours par minute a une fréquence $f = 1200/60 = 20 \text{ Hz}$, une vitesse angulaire $\omega = 2\pi \times 20 \approx 126 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, une vitesse $v = 0,25 \times 126 \approx 31 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et une accélération $a = R \cdot \omega^2 \approx 0,25 \times 126^2 \approx 3,9 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

8. Le repère de Frenet

Pour un mouvement curviligne (et en particulier circulaire), le repère cartésien n'est pas toujours le plus parlant. On utilise un **repère mobile**, attaché au point M , appelé **repère de Frenet** (M ; $\vec{t} \rightarrow$, $\vec{n} \rightarrow$) :

- $\vec{t} \rightarrow$ est le **vecteur unitaire tangent** à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement ;
- $\vec{n} \rightarrow$ est le **vecteur unitaire normal**, perpendiculaire à $\vec{t} \rightarrow$ et orienté vers l'intérieur de la courbure (vers le centre pour un cercle).

Dans ce repère :

$$\vec{v} \rightarrow = v \cdot \vec{t} \rightarrow$$

$$\vec{a} = (dv/dt) \cdot \vec{t} + (v^2/R) \cdot \vec{n}$$

où R est le rayon du cercle (ou, pour une courbe quelconque, le **rayon de courbure** au point considéré).
On admet ce résultat dans le cas général ; pour le cercle, il se démontre à partir des coordonnées cartésiennes.

Lecture des deux composantes :

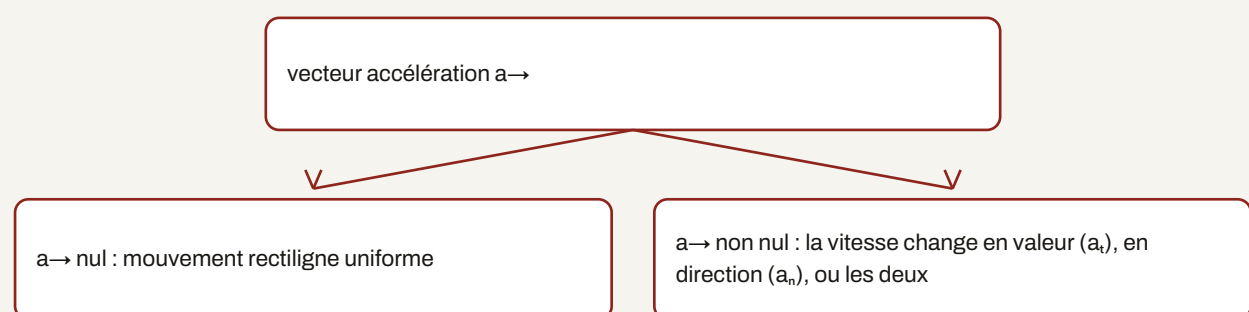
- l'**accélération tangentielle** $a_t = dv/dt$ traduit la variation de la **valeur** de la vitesse ; elle est nulle si le mouvement est uniforme ;
- l'**accélération normale** $a_n = v^2/R$ traduit le changement de **direction** du vecteur vitesse ; elle est toujours positive (ou nulle pour un mouvement rectiligne, où R est infini) ;
- la valeur de l'accélération est $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Cas particuliers :

Mouvement	$a_t = dv/dt$	$a_n = v^2/R$	Vecteur accélération
Rectiligne uniforme	0	0	nul
Rectiligne uniformément varié	constante non nulle	0	constant, porté par la trajectoire
Circulaire uniforme	0	v^2/R constante	centripète, de valeur constante
Circulaire non uniforme	non nulle	v^2/R variable	ni tangent, ni centripète

Le repère de Frenet est particulièrement adapté quand la force qui agit est elle-même dirigée vers un centre : c'est le cas des satellites, étudiés dans un chapitre suivant.

Identifier un mouvement à partir de $\vec{a}$



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Exemples résolus

Exemple 1 : de l'équation horaire au vecteur accélération

Un mobile se déplace dans un plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Ses équations horaires sont, en unités SI : $x(t) = 4,0t$ et $y(t) = -2,5t^2 + 6,0t + 1,0$. a) Établir les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération. b) Calculer la valeur de la vitesse à $t = 2,0$ s. c) Déterminer l'équation de la trajectoire.

Résolution. a) On dérive chaque coordonnée par rapport au temps : $v_x = dx/dt = 4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_y = dy/dt = -5,0t + 6,0$. Puis : $a_x = dv_x/dt = 0$; $a_y = dv_y/dt = -5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Le vecteur accélération est constant : $\vec{a} = -5,0 \vec{j}$, de valeur $5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. b) À $t = 2,0$ s : $v_x = 4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_y = -5,0 \times 2,0 + 6,0 = -4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. $v = \sqrt{(4,0)^2 + (-4,0)^2} = \sqrt{32} \approx 5,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. c) De $x = 4,0t$ on tire $t = x/4,0$. On reporte : $y = -2,5(x/4,0)^2 + 6,0(x/4,0) + 1,0$, soit $y = -0,16x^2 + 1,5x + 1,0$ (car $2,5/16 = 0,156 \approx 0,16$ et $6,0/4,0 = 1,5$). La trajectoire est un arc de parabole.

Exemple 2 : une voiture qui démarre puis freine

Une voiture part du repos sur une route rectiligne avec une accélération constante de $3,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ pendant 6,0 s, puis roule à vitesse constante pendant 10 s, puis freine avec une accélération constante jusqu'à l'arrêt sur 45 m. a) Calculer la vitesse atteinte à la fin de la première phase et la distance parcourue. b) Calculer la distance parcourue pendant la deuxième phase. c) Calculer l'accélération pendant le freinage et sa durée.

Résolution. Axe $(O, \vec{i})$ orienté dans le sens du mouvement, origine au point de départ. a) Phase 1 : MRUV avec $v_0 = 0$ et $a = 3,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. $v = a \cdot t = 3,0 \times 6,0 = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (soit $65 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$). $x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0,5 \times 3,0 \times 36 = 54 \text{ m}$. b) Phase 2 : MRU à $18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pendant 10 s : $d = 18 \times 10 = 1,8 \times 10^2 \text{ m}$. c) Phase 3 : MRUV de $v_0 = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $v = 0$ sur 45 m. Relation indépendante du temps : $0^2 - 18^2 = 2a \times 45$, d'où $a = -324/90 = -3,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Le signe négatif (a et v de signes contraires) confirme un mouvement ralenti. Durée : $t = (0 - 18)/(-3,6) = 5,0 \text{ s}$.

Exemple 3 : la centrifugeuse et le repère de Frenet

Le rotor d'une centrifugeuse de laboratoire tourne à vitesse constante. Un tube est placé à $R = 10 \text{ cm}$ de l'axe ; le rotor fait 6000 tours par minute. a) Calculer la fréquence, la période et la vitesse angulaire. b) Calculer la vitesse du fond du tube et son accélération ; comparer à $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. c) Au démarrage, la vitesse angulaire passe de 0 à sa valeur finale en 20 s, uniformément. Calculer l'accélération tangentielle du tube pendant cette phase.

Résolution. a) $f = 6000/60 = 100 \text{ Hz}$; $T = 1/f = 1,00 \times 10^{-2} \text{ s}$; $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 100 \approx 628 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. b) $v = R \cdot \omega = 0,10 \times 628 \approx 63 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le mouvement est circulaire uniforme : $a = R \cdot \omega^2 = 0,10 \times 628^2 \approx 0,10 \times 3,95 \times 10^5 \approx 3,9 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dirigée vers l'axe. Rapport $a/g \approx 3,95 \times 10^4 / 9,81 \approx 4,0 \times 10^3$: l'accélération vaut environ 4 000 fois g . c) La valeur de la vitesse passe de 0 à $63 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en 20 s à variation constante : $a_t = dv/dt = 62,8/20 \approx 3,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Cette composante tangentielle est minuscule devant la composante normale en fin de démarrage.

Méthodes et pièges

- Méthode type : choisis le système et le référentiel, pose un repère orienté, écris les conditions initiales, puis dérive (position vers vitesse vers accélération) ou intègre (dans l'autre sens) coordonnée par coordonnée.

- Quand tu intègres, n'oublie jamais les constantes : elles valent les coordonnées de $\vec{v} \rightarrow_0$ puis de $\vec{OM} \rightarrow(0)$. Écris-les avant de calculer.
- Convertis toujours en unités SI avant tout calcul : $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ divisé par 3,6, cm en m, tours par minute divisés par 60, degrés en radians pour les grandeurs angulaires.
- « Vitesse constante » ne veut pas dire « accélération nulle » : dans un virage à vitesse constante, l'accélération est normale, de valeur v^2/R .
- La relation $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ n'est valable que pour un mouvement rectiligne uniformément varié. Ne l'applique pas à un mouvement circulaire ou à une accélération variable.
- Le signe de a dépend de l'orientation de l'axe. Pour savoir si le mouvement est ralenti, compare les signes de a et de v (ou calcule $a \rightarrow v \rightarrow$), ne te fie pas au seul signe de a .
- Sur une chronophotographie, utilise la méthode centrée (points M_{i-1} et M_{i+1} , divisé par 2τ) et reporte le vecteur au point M_i , avec l'échelle indiquée.
- Dans le repère de Frenet, $\vec{n} \rightarrow$ pointe toujours vers l'intérieur de la courbure : la composante normale v^2/R n'est jamais négative.
- Ne confonds pas période T (en s), fréquence f (en Hz) et vitesse angulaire ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Vers le PASS

En PASS, la cinématique sert d'outil dans l'UE de physique et de biophysique : description du mouvement d'un segment corporel, vitesse d'éjection du sang, chute d'un objet, et surtout la centrifugation, omniprésente en biologie (séparation des éléments du sang, culots cellulaires, ultracentrifugation des protéines). L'accélération d'une centrifugeuse s'exprime d'ailleurs en multiples de g (« force centrifuge relative »), exactement comme dans l'exemple 3. Les QCM demandent souvent de manipuler vite les conversions (tours par minute, $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$), le passage $\omega = 2\pi f$ et la relation $a = R \cdot \omega^2$, et de repérer les propositions fausses du type « l'accélération est nulle car la vitesse est constante ». Maîtriser la dérivation vectorielle et la lecture d'un graphe $v(t)$ te fera gagner beaucoup en sûreté.

Suite en PASS : Forces, mouvements et bilans énergétiques

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Un point M a pour vecteur position, en unités SI, $\vec{OM} \rightarrow(t) = (3t + 1) \cdot \vec{i} \rightarrow + (-2t^2 + 4t) \cdot \vec{j} \rightarrow$. a) Établir les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération. b) Calculer la valeur de la vitesse à $t = 2$ s. c) Donner la valeur de l'accélération.
2. Un cycliste roule à vitesse constante de $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route rectiligne. a) Quelle est la nature de son mouvement ? b) Convertir sa vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. c) Calculer la distance parcourue en 5,0 min.
3. Une voiture part du repos sur une ligne droite avec une accélération constante de $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant 8,0 s. Calculer sa vitesse finale (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) et la distance parcourue.
4. Un disque de rayon 12 cm tourne à 45 tours par minute. Pour un point de sa périphérie, calculer la vitesse angulaire, la vitesse et l'accélération. Préciser la direction et le sens de l'accélération.
5. Sur la chronophotographie d'un palet lâché sur un plan incliné, les positions successives le long de l'axe du mouvement, séparées de $\tau = 40$ ms, sont : $x_0 = 0$; $x_1 = 2,0$ cm ; $x_2 = 4,4$ cm ; $x_3 = 7,2$ cm ; $x_4 =$

10,4 cm. a) Estimer les vitesses v_2 et v_3 . b) En déduire une estimation de l'accélération au voisinage du point 3 (prendre $a \approx (v_3 - v_2)/\tau$). c) Le mouvement semble-t-il uniformément accéléré ? Justifier à partir des écarts successifs.

Niveau 2 : type bac

6. Un automobiliste roule à $90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ sur une route droite. Il aperçoit un obstacle ; son temps de réaction est de 1,0 s, puis il freine avec une décélération constante de valeur $6,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. a) Calculer la distance parcourue pendant le temps de réaction. b) Calculer la durée et la distance du freinage. c) En déduire la distance d'arrêt. d) Montrer que, si la vitesse initiale double, la distance de freinage est multipliée par quatre.
7. Le mouvement d'une balle dans un plan vertical est décrit, en unités SI, par $x(t) = 2,0t$ et $y(t) = -5,0t^2 + 10t$. a) Établir les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération. b) Déterminer la date où la balle atteint son point le plus haut et les coordonnées de ce point. c) En ce point, préciser la direction du vecteur vitesse et celle du vecteur accélération, puis utiliser le repère de Frenet pour calculer le rayon de courbure de la trajectoire en ce point.
8. Une centrifugeuse de paillasse fait tourner des tubes situés à 10 cm de l'axe à 3000 tours par minute, à vitesse constante. a) Calculer la période et la vitesse angulaire. b) Calculer la vitesse et l'accélération du fond d'un tube. c) Exprimer cette accélération en multiples de $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
9. Une moto est arrêtée à un feu. À l'instant $t = 0$ où le feu passe au vert, elle démarre avec une accélération constante de $2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; au même instant, une voiture roulant à la vitesse constante de $15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ passe à sa hauteur sur une voie parallèle. a) Écrire les équations horaires des deux véhicules (même axe, même origine). b) Déterminer la date et la position où la moto rattrape la voiture. c) Calculer la vitesse de la moto à cet instant.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Une voiture aborde un virage circulaire de rayon 50 m. Elle freine de façon que la valeur de sa vitesse passe uniformément de $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ à $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en 5,0 s. a) Calculer l'accélération tangentielle. b) Calculer les composantes et la valeur de l'accélération à l'entrée du virage, puis au moment où $v = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. c) Le vecteur accélération est-il dirigé vers le centre du virage ?
11. Un protocole de biologie demande de centrifuger des échantillons à une accélération égale à $1,0 \times 10^5$ fois g ($g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), le fond des tubes étant à 8,0 cm de l'axe. Calculer la vitesse angulaire nécessaire puis la fréquence de rotation en tours par minute.
12. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse. A) Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est nulle. B) Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire. C) Si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$, la valeur de la vitesse diminue. D) Dans un mouvement rectiligne, le vecteur accélération est colinéaire à la trajectoire. E) La relation $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ est valable pour tout mouvement rectiligne.
13. Un point décrit une hélice d'équations horaires $x(t) = R \cdot \cos(\omega t)$, $y(t) = R \cdot \sin(\omega t)$, $z(t) = b \cdot t$, avec $R = 2,0 \text{ cm}$, $\omega = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $b = 0,15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. a) Établir les coordonnées du vecteur vitesse et montrer que le mouvement est uniforme. b) Établir le vecteur accélération et calculer sa valeur. c) Le mouvement étant uniforme, l'accélération est purement normale. En admettant la relation $a_n = v^2/\rho$, où ρ est le rayon de courbure, calculer ρ et le comparer à R .

Corrigés

1. a) $v_x = dx/dt = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_y = dy/dt = -4t + 4$. Puis $a_x = 0$ et $a_y = dv_y/dt = -4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Donc $\vec{v} = 3\cdot\vec{i} + (-4t + 4)\cdot\vec{j}$ et $\vec{a} = -4\cdot\vec{j}$.
- b) À $t = 2 \text{ s}$: $v_x = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_y = -4 \times 2 + 4 = -4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. $v = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. c) $a = |-4| = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, constante, dirigée selon $-\vec{j}$.
2. a) Trajectoire rectiligne et vitesse constante : **mouvement rectiligne uniforme**.
- b) $v = 36/3,6 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. c) $\Delta t = 5,0 \times 60 = 300 \text{ s}$; $d = v \cdot \Delta t = 10 \times 300 = 3,0 \times 10^3 \text{ m}$, soit 3,0 km.
3. MRUV avec $v_0 = 0$ et $a = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Vitesse : $v = a \cdot t = 2,5 \times 8,0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $20 \times 3,6 = 72 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Distance : $d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0,5 \times 2,5 \times 8,0^2 = 0,5 \times 2,5 \times 64 = 80 \text{ m}$. Vérification : $v^2 = 2 \cdot a \cdot d$ donne $400 = 2 \times 2,5 \times 80 = 400$.
4. $f = 45/60 = 0,75 \text{ Hz}$; $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 0,75 \approx 4,7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (4,712). $v = R \cdot \omega = 0,12 \times 4,712 \approx 0,57 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Mouvement circulaire uniforme : $a = R \cdot \omega^2 = 0,12 \times 4,712^2 = 0,12 \times 22,2 \approx 2,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. L'accélération est **centripète** : dirigée selon le rayon, du point vers le centre du disque.
5. a) Méthode centrée : $v_2 \approx (x_3 - x_1)/(2\tau) = (7,2 - 2,0) \times 10^{-2} / (2 \times 0,040) = 0,052/0,080 = 0,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. $v_3 \approx (x_4 - x_2)/(2\tau) = (10,4 - 4,4) \times 10^{-2} / 0,080 = 0,060/0,080 = 0,75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- b) $a \approx (0,75 - 0,65)/0,040 = 0,10/0,040 = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. c) Écarts successifs : 2,0 ; 2,4 ; 2,8 ; 3,2 cm. Ils augmentent tous de 0,4 cm. Pour un MRUV, cet accroissement constant vaut $a \cdot \tau^2$, d'où $a = 0,004/0,040^2 = 0,004/0,0016 = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, cohérent avec b). Le mouvement est **rectiligne uniformément accéléré**.
6. Axe orienté dans le sens du mouvement. $v_0 = 90/3,6 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- a) Pendant la réaction, MRU : $d_1 = 25 \times 1,0 = 25 \text{ m}$. b) Freinage : $a = -6,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Durée : $t = (0 - 25)/(-6,25) = 4,0 \text{ s}$. Distance : $0 - 25^2 = 2 \times (-6,25) \times d_2$, d'où $d_2 = 625/12,5 = 50 \text{ m}$. c) Distance d'arrêt : $d = d_1 + d_2 = 25 + 50 = 75 \text{ m}$. d) $d_2 = v_0^2/(2|a|)$ est proportionnelle au carré de v_0 : si v_0 est multipliée par 2, d_2 est multipliée par $2^2 = 4$ (200 m à 180 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ avec la même décélération).
7. a) $v_x = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_y = -10t + 10$. $a_x = 0$; $a_y = -10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Donc $\vec{a} = -10\cdot\vec{j}$, constant.
- b) Au sommet, la composante verticale de la vitesse s'annule : $-10t + 10 = 0$, soit $t = 1,0 \text{ s}$. Alors $x = 2,0 \times 1,0 = 2,0 \text{ m}$ et $y = -5,0 + 10 = 5,0 \text{ m}$. Sommet : (2,0 m ; 5,0 m). c) En ce point $\vec{v} = 2,0\cdot\vec{i}$: **horizontal**, $v = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. $\vec{a} = -10\cdot\vec{j}$: **vertical vers le bas**, donc perpendiculaire à $\vec{v}$. Dans le repère de Frenet, $a_t = 0$ et toute l'accélération est normale : $a_n = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = v^2/R$. D'où $R = v^2/a_n = 2,0^2/10 = 0,40 \text{ m}$.
8. a) $f = 3000/60 = 50 \text{ Hz}$; $T = 1/f = 2,0 \times 10^{-2} \text{ s}$; $\omega = 2\pi f = 100\pi \approx 314 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
- b) $v = R \cdot \omega = 0,10 \times 314,2 \approx 31 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. $a = R \cdot \omega^2 = 0,10 \times 314,2^2 \approx 0,10 \times 9,87 \times 10^4 \approx 9,9 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, centripète. c) $a/g = 9,87 \times 10^3 / 9,81 \approx 1,0 \times 10^3$: environ mille fois g.
9. a) Axe dans le sens du mouvement, origine au feu. Moto : MRUV, $x_{\text{moto}}(t) = \frac{1}{2} \times 2,0 \times t^2 = t^2$. Voiture : MRU, $x_{\text{voiture}}(t) = 15t$ (en m, t en s).
- b) Rattrapage : $t^2 = 15t$, soit $t(t - 15) = 0$. La solution $t = 0$ correspond au départ ; l'autre est $t = 15 \text{ s}$. Position : $x = 15 \times 15 = 2,3 \times 10^2 \text{ m}$ (225 m). c) $v_{\text{moto}} = a \cdot t = 2,0 \times 15 = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit 108 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$: le double de la vitesse de la voiture.
10. a) $a_t = dv/dt = (10 - 20)/5,0 = -2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (négative : la valeur de la vitesse diminue).

b) Entrée du virage ($v = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) : $a_n = v^2/R = 400/50 = 8,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a = \sqrt{(2,0^2 + 8,0^2)} = \sqrt{68} \approx 8,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pour $v = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: $a_n = 225/50 = 4,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a = \sqrt{(4,0 + 20,25)} = \sqrt{24,25} \approx 4,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. c) **Non** : la composante tangentielle n'est pas nulle, donc $a \rightarrow$ n'est pas porté par $n \rightarrow$ seul. Il est incliné vers l'arrière par rapport à la direction du centre (a_t opposée au sens du mouvement). Seul un mouvement circulaire uniforme a une accélération exactement centripète.

11. On veut $a = R\cdot\omega^2 = 1,0 \times 10^5 \times 9,81 = 9,81 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Donc $\omega = \sqrt{a/R} = \sqrt{(9,81 \times 10^5 / 0,080)} = \sqrt{(1,226 \times 10^7)} \approx 3,5 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (3 502). Fréquence : $f = \omega/(2\pi) = 3\,502/6,283 \approx 557$ tours par seconde, soit $557 \times 60 \approx 3,3 \times 10^4$ tours par minute.

12. A) **Faux** : la valeur de la vitesse est constante mais sa direction change ; $a = v^2/R$, non nulle, centripète.

B) **Vrai** : $v \rightarrow$ est la limite de $MM' \rightarrow / \Delta t$, et la corde MM' tend vers la tangente. C) **Vrai** : $d(v^2)/dt = 2 a \rightarrow \cdot v \rightarrow < 0$, donc v^2 diminue, donc v diminue. D) **Vrai** : la direction de $v \rightarrow$ ne change pas, donc la composante normale est nulle (rayon de courbure infini) ; il ne reste que a_t , portée par la trajectoire. E) **Faux** : elle suppose a constante (mouvement uniformément varié). Pour un mouvement rectiligne à accélération variable, elle ne s'applique pas.

13. a) $v_x = -R\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)$; $v_y = R\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)$; $v_z = b$. $v^2 = R^2\omega^2(\sin^2 + \cos^2) + b^2 = R^2\omega^2 + b^2$, constante : le mouvement est **uniforme**. Numériquement $R\cdot\omega = 0,020 \times 10 = 0,20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v = \sqrt{(0,20^2 + 0,15^2)} = \sqrt{0,0625} = 0,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

b) $a_x = -R\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t)$; $a_y = -R\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega t)$; $a_z = 0$. Valeur : $a = R\cdot\omega^2 = 0,020 \times 100 = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dirigée horizontalement vers l'axe de l'hélice. c) Mouvement uniforme donc $a_t = 0$ et $a_n = a = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. $\rho = v^2/a_n = 0,0625/2,0 \approx 3,1 \times 10^{-2} \text{ m}$ (3,1 cm). On trouve $\rho > R$: l'hélice est moins courbée que le cercle de base, car la montée selon z « déplie » la trajectoire. Si $b = 0$, on retrouve $\rho = (R\cdot\omega)^2/(R\cdot\omega^2) = R$.