

Fiche : Second degré

FICHE • M01 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Un trinôme du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$; sa courbe est une parabole.
- La forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ s'obtient avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$.
- Le sommet de la parabole est $S(\alpha ; \beta)$ et la droite d'équation $x = \alpha$ est son axe de symétrie.
- Si $a > 0$, f décroît puis croît et admet un minimum β en α ; si $a < 0$, f croît puis décroît et admet un maximum β en α .
- Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ donne le nombre de racines : deux si $\Delta > 0$, une si $\Delta = 0$, aucune si $\Delta < 0$.
- Si $\Delta > 0$, les racines sont $(-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $(-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$; si $\Delta = 0$, la racine double est $-b/(2a)$.
- La forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$ et $a(x - x_0)^2$ si $\Delta = 0$; il n'y en a pas si $\Delta < 0$.
- La somme des racines vaut $-b/a$ et leur produit c/a .
- Deux nombres de somme S et de produit P sont les solutions de $X^2 - SX + P = 0$.
- Si $a + b + c = 0$, 1 est racine ; si $a - b + c = 0$, -1 est racine.
- Un trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines et du signe contraire entre elles.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme garde partout le signe de a .
- Pour résoudre une inéquation, on ramène tout à $f(x)$ comparé à 0, puis on lit le tableau de signes.
- Une équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se résout en posant $X = x^2$ avec $X \geq 0$.
- Les abscisses des points communs à deux courbes sont les solutions de $f(x) = g(x)$, et le signe de $f(x) - g(x)$ donne leur position relative.



Formules et définitions à connaître

Notion	Formule	Condition
Forme développée	$ax^2 + bx + c$	$a \neq 0$
Forme canonique	$a(x - \alpha)^2 + \beta$, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = f(\alpha)$	toujours
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	toujours
Racines	$(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$	$\Delta > 0$
Racine double	$x_0 = -b/(2a)$	$\Delta = 0$
Forme factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$\Delta \geq 0$
Somme et produit	$x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 x_2 = c/a$	$\Delta \geq 0$
Lien sommet et Δ	$\beta = -\Delta/(4a)$	toujours

Pièges à éviter

- Oublier le coefficient a devant la forme factorisée.
- Diviser par 2 au lieu de $2a$ dans la formule des racines, surtout quand a est négatif.
- Diviser une inéquation par une expression en x de signe inconnu, ou oublier de renverser l'inégalité en divisant par un nombre négatif.
- Confondre « $\Delta < 0$ » (pas de racine) avec « pas de solution » pour une inéquation : la réponse peut être $\mathbb{R}$ tout entier.
- Se tromper de crochets : racines incluses pour $\leq$ et $\geq$, exclues pour $<$ et $>$.
- Garder, dans une équation bicarrée, une valeur négative de $X = x^2$.

Je me teste

1. Quelle est l'abscisse du sommet de $ax^2 + bx + c$? $\rightarrow \alpha = -b/(2a)$.
2. Forme canonique de $x^2 - 4x + 7$? $\rightarrow (x - 2)^2 + 3$.
3. Combien de racines si $\Delta = 0$? $\rightarrow$ Une seule, la racine double $-b/(2a)$.
4. Racines de $2x^2 - 12x + 10$? $\rightarrow 1$ et 5 .
5. Produit des racines de $3x^2 + 5x - 8$? $\rightarrow -8/3$, et comme 1 est racine, l'autre vaut $-8/3$.
6. Signe de $-2x^2 + 3x - 5$? $\rightarrow$ Toujours strictement négatif ($\Delta = -31 < 0$ et $a < 0$).
7. Solutions de $-x^2 + x + 6 \geq 0$? $\rightarrow [-2 ; 3]$.
8. Deux nombres de somme 7 et de produit 12 ? $\rightarrow 3$ et 4 .
9. Solutions de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$? $\rightarrow -2, -1, 1$ et 2 .
10. Aire maximale d'un rectangle de périmètre 20 cm ? $\rightarrow 25$ cm², pour un carré de côté 5 cm.



Fiche : Suites numériques : généralités, arithmétiques et géométriques

FICHE • M02 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Une suite associe à chaque entier naturel n un réel u_n ; on la représente par des points isolés $(n ; u_n)$.
- Une suite est explicite si $u_n = f(n)$, et récurrente si l'on donne u_0 et une relation $u(n+1) = f(u_n)$.
- Le terme $u(n+1)$ est le terme suivant u_n , à ne pas confondre avec $u_n + 1$.
- Le sens de variation s'étudie par le signe de $u(n+1) - u_n$, méthode valable dans tous les cas.
- Pour des termes strictement positifs, on peut comparer le quotient $u(n+1)/u_n$ à 1.
- Pour une suite explicite $u_n = f(n)$, les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ donnent celles de la suite.
- Une suite arithmétique vérifie $u(n+1) = u_n + r$ et son terme général est $u_n = u_0 + nr$.
- Une suite arithmétique est croissante si $r > 0$ et décroissante si $r < 0$; ses points sont alignés.
- Une suite géométrique vérifie $u(n+1) = q \times u_n$ et son terme général est $u_n = u_0 \times q^n$.
- Une évolution de t % par période correspond à une suite géométrique de raison $1 + t/100$.
- Avec $u_0 > 0$, une suite géométrique est croissante si $q > 1$ et décroissante si $0 < q < 1$.
- La somme $1 + 2 + \dots + n$ vaut $n(n+1)/2$ et la somme $1 + q + \dots + q^n$ vaut $(1 - q^{n+1})/(1 - q)$ pour $q \neq 1$.
- La suite q^n tend vers $+\infty$ si $q > 1$, vers 0 si $-1 < q < 1$, et n'a pas de limite si $q \leq -1$.
- Un algorithme de seuil utilise une boucle « tant que » dont la condition est le contraire de l'objectif.



Formules et définitions à connaître

Notion	Arithmétique (raison r)	Géométrique (raison q)
Récurrence	$u(n+1) = u_n + r$	$u(n+1) = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Entre deux rangs	$u_n = u(p) + (n - p)r$	$u_n = u(p) \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	nombre de termes $\times$ (premier + dernier)/2	premier $\times (1 - q^{\text{nombre de termes}})/(1 - q)$, $q \neq 1$
Somme de référence	$1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$	$1 + q + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$
Prouver la nature	$u(n+1) - u_n$ constant	$u(n+1) = q \times u_n$

Pièges à éviter

- Compter n termes au lieu de $n + 1$ dans une somme de u_0 à u_n .
- Modéliser un pourcentage constant par une suite arithmétique au lieu d'une suite géométrique.
- Additionner des pourcentages successifs : deux hausses de 10 % font 21 %, pas 20 %.
- Utiliser la méthode du quotient alors que des termes sont négatifs ou nuls.
- Croire que $u(n+1) = f(u_n)$ avec f croissante donne une suite croissante.
- Écrire dans une boucle de seuil la condition de l'objectif au lieu de son contraire.

Je me teste

1. Terme général d'une suite arithmétique ? $\rightarrow u_n = u_0 + nr$.
2. Terme général d'une suite géométrique ? $\rightarrow u_n = u_0 \times q^n$.
3. Raison d'une baisse de 30 % par heure ? $\rightarrow q = 0,7$.
4. Somme $1 + 2 + \dots + 100$? $\rightarrow 5\,050$.
5. Nombre de termes de u_0 à u_{20} ? $\rightarrow 21$.
6. Somme $5 + 10 + 20 + \dots + 320$? $\rightarrow 635$.
7. Limite de $0,8^n$? $\rightarrow 0$.
8. Sens de variation de $u_n = n^2 + n$? $\rightarrow$ Strictement croissante, car $u(n+1) - u_n = 2n + 2 > 0$.
9. Plus petit n tel que $2^n \geq 1\,000$? $\rightarrow n = 10$.
10. Limite de $1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n$? $\rightarrow 2$.



Fiche : Dérivation : nombre dérivé et fonction dérivée

FICHE • M03 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est $(f(a + h) - f(a))/h$: c'est la pente de la sécante, ou une vitesse moyenne.
- f est dérivable en a si ce taux tend vers un réel quand h tend vers 0 ; ce réel est le nombre dérivé $f'(a)$.
- Le nombre dérivé est un taux de variation instantané, par exemple une vitesse instantanée.
- La tangente à la courbe au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Une tangente est horizontale exactement quand $f'(a) = 0$.
- Près de a , $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$: c'est l'approximation affine.
- La racine carrée n'est pas dérivable en 0 et la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
- La dérivée d'un produit est $u'v + uv'$, celle d'un quotient est $(u'v - uv')/v^2$.
- La dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$ est $x \mapsto a \times g'(ax + b)$.
- Sur un intervalle, $f' \geq 0$ entraîne f croissante et $f' \leq 0$ entraîne f décroissante.
- Pour étudier le signe de f' , on la factorise, puis on dresse un tableau de signes.
- Un extremum local en un point intérieur où f est dérivable impose $f'(c) = 0$.
- $f'(c) = 0$ ne suffit pas : il faut que f' change de signe en c (contre-exemple x^3 en 0).
- Sur un intervalle fermé, le maximum ou le minimum peut être atteint à une borne.
- Pour démontrer $f(x) \geq g(x)$, on étudie le minimum de $f(x) - g(x)$.



Formules et définitions à connaître

Fonction	Dérivée	Validité
k	0	$\mathbb{R}$
$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
$x^n (n \geq 1)$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$1/x$	$-1/x^2$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$x > 0$
$u + v ; ku$	$u' + v' ; ku'$	
uv	$u'v + uv'$	
$1/v$	$-v'/v^2$	$v \neq 0$
u/v	$(u'v - uv')/v^2$	$v \neq 0$
$g(ax + b)$	$a g'(ax + b)$	
Tangente en a	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$	f dérivable en a

Pièges à éviter

- Écrire $(uv)' = u'v'$: c'est faux, la bonne formule est $u'v + uv'$.
- Inverser l'ordre ou le signe dans la formule du quotient.



- Oublier le facteur a dans la dérivée de $g(ax + b)$.
- Confondre $f(a)$ et $f'(a)$ dans l'équation de la tangente.
- Conclure à un extremum dès que $f'(c) = 0$, sans vérifier le changement de signe.
- Appliquer le lien signe de f' et variations sur une réunion d'intervalles, comme pour $1/x$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0.

Je me teste

1. Taux de variation de x^2 entre 1 et 3 ? $\rightarrow 4$.
2. Dérivée de x^2 en a par la définition ? $\rightarrow$ Le taux vaut $2a + h$, donc $f'(a) = 2a$.
3. Dérivée de $\sqrt{x}$? $\rightarrow 1/(2\sqrt{x})$, sur $]0 ; +\infty[$.
4. Dérivée de $(3x - 1)^4$? $\rightarrow 12(3x - 1)^3$.
5. Dérivée de $(x + 1)/(x - 2)$? $\rightarrow -3/(x - 2)^2$.
6. Tangente à x^3 en 1 ? $\rightarrow y = 3x - 2$.
7. Tangente à $x^2 - 3x$ en 2 ? $\rightarrow y = x - 4$.
8. x^3 a-t-elle un extremum en 0 ? $\rightarrow$ Non, $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe.
9. Minimum de $x + 1/x$ sur $]0 ; +\infty[$? $\rightarrow 2$, atteint en $x = 1$.
10. Valeur approchée de $\sqrt{101}$ par la tangente en 100 ? $\rightarrow 10,05$.

Fiche : Fonction exponentielle

FICHE • M04 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$, donc l'exponentielle ne s'annule jamais.
- La relation fonctionnelle $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$ transforme une somme en produit.
- On note $e = \exp(1) \approx 2,718$ et $\exp(x) = e^x$; les règles de calcul sont celles des puissances.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$, car e^x est le carré de $e^{x/2}$ et n'est pas nul.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée est elle-même, strictement positive.
- On a $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$, et $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$.
- La courbe passe par $(0 ; 1)$ et $(1 ; e)$, et sa tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$.
- Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$: la courbe est au-dessus de sa tangente en 0.
- La dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto a e^{ax+b}$.
- Dans une dérivée contenant e^x en facteur, le signe est celui de l'autre facteur.
- La fonction $x \mapsto e^{kx}$ vérifie $f' = kf$ et $f(0) = 1$; elle est croissante si $k > 0$ et décroissante si $k < 0$.
- La suite (e^{na}) est géométrique de raison e^a : une exponentielle observée à pas réguliers évolue à pourcentage constant.
- Un modèle $N_0 e^{kt}$ avec $k > 0$ a un temps de doublement constant ; un modèle $N_0 e^{-\lambda t}$ a une demi-vie constante.



Formules et définitions à connaître

Propriété	Formule	Condition
Définition	$\exp' = \exp, \exp(0) = 1$	sur $\mathbb{R}$
Produit	$e^{a+b} = e^a \times e^b$	a, b réels
Inverse	$e^{-a} = 1/e^a$	a réel
Quotient	$e^{a-b} = e^a/e^b$	a, b réels
Puissance	$e^{na} = (e^a)^n$	n entier relatif
Dérivée	$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$	sur $\mathbb{R}$
Équation	$e^a = e^b \iff a = b$	a, b réels
Inéquation	$e^a < e^b \iff a < b$	a, b réels
Suite associée	$u_n = e^{na}$, raison $q = e^a$	n entier naturel
Demi-vie	$e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$	$\lambda > 0$

Pièges à éviter

- Écrire $e^{a+b} = e^a + e^b$: c'est un produit, pas une somme.
- Confondre $(e^a)^2 = e^{2a}$ avec e^{a^2} .



- Chercher des solutions à $e^x = 0$ ou $e^x = -2$: il n'y en a aucune.
- Oublier le facteur a dans la dérivée de e^{ax+b} .
- Garder une solution $X \leq 0$ après le changement de variable $X = e^x$.
- Étudier le signe de l'exponentielle dans une dérivée : il est toujours positif, seul l'autre facteur compte.

Je me teste

1. Valeur de e^0 ? $\rightarrow 1$.
2. Valeur approchée de e ? $\rightarrow 2,718$.
3. Simplifier $e^{3x} \times e^{-x} / e^{x+1}$? $\rightarrow e^{x-1}$.
4. Dérivée de e^{-4x+1} ? $\rightarrow -4e^{-4x+1}$.
5. Dérivée de $x e^x$? $\rightarrow (x+1)e^x$.
6. Solutions de $e^{x^2} \geq e^{4x-3}$? $\rightarrow]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$.
7. Équation de la tangente à $\exp$ en 0 ? $\rightarrow y = x + 1$.
8. Raison de la suite $u_n = e^{0,5n}$? $\rightarrow e^{0,5} \approx 1,649$.
9. Baisse horaire de $C(t) = 12e^{-0,2t}$? $\rightarrow$ Environ 18,1 % par heure, car $e^{-0,2} \approx 0,8187$.
10. Proportion restante après 3 demi-vies ? $\rightarrow 1/8$, soit 12,5 %.



Fiche : Trigonométrie et fonctions cosinus et sinus

FICHE • M05 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre).
- Un radian est l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 sur un cercle de rayon 1 ; on a $\pi \text{ rad} = 180^\circ$.
- En enroulant la droite des réels sur le cercle à partir de $I(1 ; 0)$, chaque réel x a un unique point image $M(x)$.
- Les réels x et $x + 2k\pi$ (k entier relatif) ont le même point image ; un point du cercle est donc l'image d'une infinité de réels.
- La mesure principale d'un réel est l'unique réel de $]-\pi ; \pi]$ qui a le même point image.
- Le cosinus de x est l'abscisse de $M(x)$, le sinus de x en est l'ordonnée.
- Pour tout réel x , $\cos x$ et $\sin x$ sont compris entre -1 et 1, et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Le signe de $\cos x$ et de $\sin x$ se lit sur le quadrant où se trouve $M(x)$.
- Les angles associés $(-x, \pi - x, \pi + x, \pi/2 - x, \pi/2 + x)$ se déduisent des symétries du cercle.
- L'équation $\cos x = \cos \alpha$ a pour solutions $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$; l'équation $\sin x = \sin \alpha$ a pour solutions $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$.
- Une inéquation trigonométrique se résout en lisant un arc de cercle, puis en respectant les bornes de l'intervalle imposé.
- Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π .
- La fonction cosinus est paire (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), la fonction sinus est impaire (courbe symétrique par rapport à O).
- Sur $[0 ; \pi]$, cosinus décroît de 1 à -1 ; sinus croît de 0 à 1 sur $[0 ; \pi/2]$ puis décroît de 1 à 0 sur $[\pi/2 ; \pi]$.
- Les courbes sont des sinusoïdes ; celle du cosinus est celle du sinus translatée de $\pi/2$ vers la gauche.
- La fonction $x \mapsto \sin(\omega x)$, avec $\omega > 0$, a pour période $2\pi/\omega$.



Formules et définitions à connaître

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Réel	cosinus	sinus	Symétrie
-x	cos x	-sin x	axe des abscisses
$\pi - x$	-cos x	sin x	axe des ordonnées
$\pi + x$	-cos x	-sin x	centre O
$\pi/2 - x$	sin x	cos x	droite y = x
$\pi/2 + x$	-sin x	cos x	quart de tour direct

- Conversion : $r = d \times \pi/180$ (degrés vers radians), $d = r \times 180/\pi$.
- Relation fondamentale : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, valable pour tout réel x.
- Périodicité : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.
- Cas particuliers : $\cos x = 0$ pour $x = \pi/2 + k\pi$; $\sin x = 0$ pour $x = k\pi$.

Pièges à éviter

- Choisir le signe de cos x ou sin x sans regarder l'intervalle où se trouve x.



- Écrire $-\alpha$ au lieu de $\pi - \alpha$ comme seconde solution de $\sin x = \sin \alpha$.
- Oublier que $-\pi$ est exclu et π inclus dans $]-\pi ; \pi]$ pour la mesure principale.
- Résoudre $\cos x = a$ avec a hors de $[-1 ; 1]$, alors qu'il n'y a aucune solution.
- Laisser la calculatrice en mode degré.
- Confondre $\cos^2 x$, c'est-à-dire $(\cos x)^2$, avec $\cos(x^2)$.

Je me teste

1. Combien de degrés vaut $\pi/5$ rad ? $\rightarrow 36^\circ$.
2. Mesure principale de $17\pi/3$? $\rightarrow -\pi/3$.
3. Valeur exacte de $\sin(5\pi/6)$? $\rightarrow 1/2$.
4. Valeur exacte de $\cos(3\pi/4)$? $\rightarrow -\sqrt{2}/2$.
5. Si $\sin x = 3/5$ et $x \in [\pi/2 ; \pi]$, que vaut $\cos x$? $\rightarrow -4/5$.
6. $\cos(\pi - x)$ en fonction de $\cos x$? $\rightarrow -\cos x$.
7. Solutions de $\cos x = -1/2$ dans $]-\pi ; \pi]$? $\rightarrow -2\pi/3$ et $2\pi/3$.
8. Solutions de $\sin x = 0$ dans $\mathbb{R}$? $\rightarrow x = k\pi$, k entier relatif.
9. Parité de la fonction sinus ? $\rightarrow$ Impaire : $\sin(-x) = -\sin x$.
10. Période de $x \mapsto \cos(2x)$? $\rightarrow \pi$.



Fiche : Produit scalaire et géométrie repérée

FICHE • M06 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel, pas un vecteur.
- Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; si l'un est nul, le produit scalaire vaut 0.
- Le signe du produit scalaire indique la nature de l'angle : positif si aigu, nul si droit, négatif si obtus.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$, qui vaut $AB \times AH$ ou $-AB \times AH$ selon le sens.
- Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x ; y) \cdot \vec{v}(x' ; y') = xx' + yy'$.
- Le carré scalaire d'un vecteur est le carré de sa norme : $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2$.
- Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire, ce qui donne des identités remarquables, mais on ne simplifie jamais par un vecteur.
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- La formule d'Al-Kashi généralise Pythagore à tout triangle et permet de calculer un côté ou un angle.
- L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].
- La droite de vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, et $\vec{u}(-b ; a)$ la dirige.
- Le projeté orthogonal H de A sur une droite se trouve en suivant le vecteur normal depuis A ; AH est la distance de A à la droite.
- Le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ se met sous forme canonique : cercle, point unique ou ensemble vide selon le signe du second membre.
- La tangente à un cercle en A est perpendiculaire au rayon : $\vec{\Omega A}$ en est un vecteur normal.
- La parabole $y = ax^2 + bx + c$ a pour sommet $S(\alpha ; f(\alpha))$ avec $\alpha = -b/(2a)$, et pour axe de symétrie la droite $x = \alpha$.



Formules et définitions à connaître

Situation	Formule	Condition
Normes et angle	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$	vecteurs non nuls
Projeté orthogonal	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \pm AB \times AH$	H projeté de C sur (AB)
Coordonnées	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$	repère orthonormé
Polarisation	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2)(\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$	toujours
Trois longueurs	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (1/2)(AB^2 + AC^2 - BC^2)$	toujours
Al-Kashi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$	a côté opposé à $\hat{A}$
Médiane	$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - AB^2/4$	I milieu de [AB]
Droite	$ax + by + c = 0, n \rightarrow (a; b), u \rightarrow (-b; a)$	repère orthonormé
Cercle	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$r > 0$
Parabole	sommet en $x = -b/(2a)$	$a \neq 0$

- Identités : $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Pièges à éviter

- Mettre une flèche sur le résultat d'un produit scalaire.
- Utiliser $xx' + yy'$ dans un repère qui n'est pas orthonormé.
- Oublier le signe moins quand le projeté H est du côté opposé à B par rapport à A.



- Dédurre $\vec{v} \rightarrow = \vec{w} \rightarrow$ de $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = \vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow$.
- Prendre le mauvais côté dans Al-Kashi : le côté isolé est celui opposé à l'angle.
- Confondre vecteur normal $(a ; b)$ et vecteur directeur $(-b ; a)$ d'une droite.
- Conclure qu'une équation est un cercle sans vérifier que le second membre de la forme canonique est strictement positif.

Je me teste

1. $\|\vec{u} \rightarrow\| = 3, \|\vec{v} \rightarrow\| = 4$, angle $\pi/3$: $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow ? \rightarrow 6$.
2. $\vec{u} \rightarrow(2 ; -3) \cdot \vec{v} \rightarrow(4 ; 1) ? \rightarrow 5$.
3. ABCD carré de côté 4 : $\vec{AB} \rightarrow \cdot \vec{AC} \rightarrow ? \rightarrow 16$.
4. Condition d'orthogonalité de $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ en repère orthonormé ? $\rightarrow xx' + yy' = 0$.
5. Al-Kashi avec $AB = 5, AC = 4, \hat{A} = 60^\circ$: $BC^2 ? \rightarrow 21$.
6. Vecteur normal de la droite $2x - y + 7 = 0 ? \rightarrow (2 ; -1)$.
7. Centre et rayon de $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 ? \rightarrow \Omega(2 ; -3)$, rayon 5.
8. Ensemble des M tels que $\vec{MA} \rightarrow \cdot \vec{MB} \rightarrow = 0 ? \rightarrow$ Le cercle de diamètre $[AB]$.
9. Sommet de la parabole $y = -x^2 + 4x - 3 ? \rightarrow S(2 ; 1)$.
10. Que représente $x^2 + y^2 = -4 ? \rightarrow$ L'ensemble vide.

Fiche : Probabilités conditionnelles et indépendance

FICHE • M07 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Si $P(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A est $P(B | A) = P(A \cap B) / P(A)$.
- L'événement écrit après la barre est celui que l'on sait réalisé : l'univers est restreint à cet événement.
- En général $P(B | A)$ est différent de $P(A | B)$, et les confondre est l'erreur la plus fréquente.
- Pour A fixé, $P(\cdot | A)$ est une loi de probabilité : en particulier $P(B | A) = 1 - P(\bar{B} | A)$.
- La formule des probabilités composées donne $P(A \cap B) = P(A) \times P(B | A)$.
- Dans un tableau croisé, une probabilité conditionnelle est une proportion calculée dans une seule ligne ou une seule colonne.
- Dans un arbre pondéré, le premier niveau porte des probabilités simples et le second des probabilités conditionnelles.
- La somme des branches issues d'un même nœud vaut 1 ; un chemin a pour probabilité le produit de ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.
- Une partition de l'univers est une famille d'événements deux à deux incompatibles, de probabilités non nulles, dont la réunion est Ω .
- La formule des probabilités totales donne $P(B)$ comme somme des $P(A_i) \times P(B | A_i)$ sur une partition.
- Pour inverser un conditionnement, on calcule $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$, avec $P(B)$ obtenu par les probabilités totales.
- A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P(B | A) = P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.
- Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
- Pour deux épreuves indépendantes successives, la probabilité d'un couple d'issues est le produit des probabilités.

Formules et définitions à connaître

Notion	Formule	Condition
Probabilité conditionnelle	$P(B A) = P(A \cap B) / P(A)$	$P(A) \neq 0$
Événement contraire	$P(\bar{B} A) = 1 - P(B A)$	$P(A) \neq 0$
Probabilités composées	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B A)$	$P(A) \neq 0$
Probabilités totales	$P(B) = P(A) \times P(B A) + P(\bar{A}) \times P(B \bar{A})$	$0 < P(A) < 1$
Inversion	$P(A B) = P(A) \times P(B A) / P(B)$	$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	toujours
Deux épreuves indépendantes	$P((x ; y)) = P_1(x) \times P_2(y)$	épreuves sans influence mutuelle
Réunion	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	toujours

Pièges à éviter

- Traduire « 3 % des pièces de la machine A sont défectueuses » par $P(A \cap D)$ au lieu de $P(D | A)$.
- Inverser $P(A | B)$ et $P(B | A)$.
- Oublier un chemin dans la formule des probabilités totales.
- Confondre incompatibles et indépendants.
- Croire qu'un tirage sans remise donne des tirages indépendants.
- Conclure à l'indépendance par intuition, sans comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

Je me teste

1. $P(A) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$: $P(B | A) ? \rightarrow 0,25$.
2. Que porte une branche de second niveau d'un arbre ? $\rightarrow$ Une probabilité conditionnelle.
3. $P(A) = 0,3$, $P(B | A) = 0,6$, $P(B | \bar{A}) = 0,2$: $P(B) ? \rightarrow 0,32$.
4. Même situation : $P(A | B) ? \rightarrow 0,5625$.
5. Prévalence 2 %, $P(T | M) = 0,95$, $P(T | \bar{M}) = 0,03$: $P(M | T) ? \rightarrow$ Environ 0,393.
6. A et B indépendants, $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$: $P(A \cup B) ? \rightarrow 0,72$.
7. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont-ils indépendants ? $\rightarrow$ Non.
8. Dans un jeu de 32 cartes, « cœur » et « roi » sont-ils indépendants ? $\rightarrow$ Oui : $1/32 = 1/4 \times 1/8$.
9. Deux tirages sans remise sont-ils indépendants ? $\rightarrow$ Non, la composition de l'urne change.
10. Pile avec probabilité 0,6 puis dé équilibré : $P(\text{pile et } 6) ? \rightarrow 0,1$.

Fiche : Variables aléatoires réelles

FICHE • M08 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Une variable aléatoire réelle X est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'univers.
- $\{X = a\}$ désigne l'événement formé des issues dont l'image par X vaut a ; on définit de même $\{X \leq a\}$ ou $\{X > a\}$.
- La loi de probabilité de X donne $P(X = x_i)$ pour chaque valeur x_i , et la somme de ces probabilités vaut 1.
- L'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs de X pondérée par leurs probabilités.
- L'espérance s'interprète comme la valeur moyenne de X sur un très grand nombre de répétitions de l'expérience.
- Un jeu est équitable si l'espérance du gain algébrique est nulle, favorable si elle est positive, défavorable si elle est négative.
- La variance mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance ; elle est positive ou nulle.
- L'écart type est la racine carrée de la variance et s'exprime dans la même unité que X .
- La formule de König-Huygens donne $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- Ajouter une constante décale l'espérance sans changer la dispersion.
- Multiplier X par a multiplie l'espérance par a , la variance par a^2 et l'écart type par la valeur absolue de a .
- La variable centrée réduite $(X - E(X))/\sigma(X)$ a pour espérance 0 et pour écart type 1.
- Une variable de Bernoulli de paramètre p vaut 1 avec la probabilité p et 0 sinon ; son espérance est p et sa variance $p(1 - p)$.
- Un échantillon de taille n est obtenu en répétant n fois l'expérience de façon indépendante ; sa moyenne fluctue d'un échantillon à l'autre.
- Pour n assez grand, environ 95 % des moyennes d'échantillons sont à une distance au plus $2\sigma/\sqrt{n}$ de l'espérance μ .



- Pour diviser par 2 la largeur de l'intervalle de fluctuation, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4.

Formules et définitions à connaître

Grandeur	Formule	Unité	Condition
Loi	$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$	sans unité	toujours
Espérance	$E(X) = \sum p_i x_i$	celle de X	toujours
Variance	$V(X) = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$	carré de celle de X	$\mu = E(X)$
Écart type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$	celle de X	toujours
Affine (espérance)	$E(aX + b) = aE(X) + b$	celle de X	a, b réels
Affine (variance)	$V(aX + b) = a^2 V(X)$	carré de celle de X	a, b réels
Bernoulli	$E(X) = p, V(X) = p(1 - p)$	sans unité	X vaut 0 ou 1
Fluctuation	intervalle $\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n}$	celle de X	n assez grand, environ 95 %

- Écart type d'une transformation affine : $\sigma(aX + b) = (\text{valeur absolue de } a) \times \sigma(X)$.

Pièges à éviter

- Oublier de vérifier que la somme des probabilités vaut 1.



- Oublier de retrancher la mise dans un gain algébrique.
- Confondre $E(X^2)$ et $(E(X))^2$.
- Écrire $V(aX + b) = aV(X) + b$: la constante disparaît et a est élevé au carré.
- Donner un écart type négatif : on prend la valeur absolue de a .
- Confondre la taille n d'un échantillon et le nombre d'échantillons simulés.

Je me teste

1. Que vaut la somme des probabilités d'une loi ? $\rightarrow 1$.
2. Espérance d'un dé équilibré ? $\rightarrow 3,5$.
3. Variance d'un dé équilibré ? $\rightarrow 35/12$, environ 2,92.
4. Formule de König-Huygens ? $\rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
5. $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$: $V(3X - 2)$? $\rightarrow 36$.
6. Même X : $\sigma(-X + 10)$? $\rightarrow 2$.
7. Espérance et variance d'une Bernoulli de paramètre p ? $\rightarrow p$ et $p(1 - p)$.
8. Quand un jeu est-il équitale ? $\rightarrow$ Quand l'espérance du gain algébrique est nulle.
9. Pour $p = 0,5$ et $n = 100$, que vaut $2\sigma/\sqrt{n}$? $\rightarrow 0,1$.
10. Unité de la variance d'un gain en euros ? $\rightarrow$ Des euros au carré.



Fiche : Raisonnement par récurrence et limites de suites

FICHE • M09 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Une récurrence comporte trois parties : initialisation ($P(n_0)$ vraie), hérédité (si $P(n)$ est vraie pour un $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie), conclusion.
- Dans l'hérédité, on fixe un entier n pour lequel $P(n)$ est vraie : on ne suppose jamais la propriété vraie pour tout n .
- L'inégalité de Bernoulli affirme que $(1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $a > 0$ et tout entier n ; sa preuve par récurrence repose sur $1+a > 0$.
- Une suite converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous ses termes à partir d'un certain rang ; cette limite est unique.
- Une suite tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous ses termes à partir d'un certain rang.
- Une suite divergente tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite, comme $(-1)^n$.
- Une suite convergente est bornée, mais une suite bornée ne converge pas forcément.
- Les formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$; on les lève par factorisation du terme dominant, quantité conjuguée ou simplification.
- Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un rang et v_n tend vers $+\infty$, alors u_n tend vers $+\infty$ (comparaison).
- Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un rang et v_n, w_n tendent vers ℓ , alors u_n tend vers ℓ (gendarmes).
- Une suite croissante et majorée converge ; une suite décroissante et minorée converge ; une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Si une suite croissante converge vers ℓ , tous ses termes sont inférieurs ou égaux à ℓ .
- Pour $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente, on passe à la limite des deux côtés pour obtenir une équation vérifiée par ℓ .
- Une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ se ramène à une suite géométrique $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell = a\ell + b$.



Formules et définitions à connaître

Objet	Résultat	Condition
Bernoulli	$(1 + a)^n \geq 1 + na$	$a > 0$ (vrai aussi pour $a \geq -1$), n entier naturel
Limite de q^n	$+\infty$	$q > 1$
Limite de q^n	1	$q = 1$
Limite de q^n	0	$-1 < q < 1$
Limite de q^n	pas de limite	$q \leq -1$
Somme géométrique	$1 + q + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$	$q \neq 1$, $n + 1$ termes
Limite de la somme	$1/(1 - q)$	$-1 < q < 1$
Suites de référence	$n, n^2, \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$; $1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n}$ tendent vers 0	$n \geq 1$ pour les inverses
Somme des entiers	$1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$	$n \geq 1$

Pièges à éviter

- Oublier l'initialisation : une propriété héréditaire peut être fausse partout (« 3 divise $4^n + 1$ »).
- Multiplier une inégalité par un facteur sans vérifier qu'il est positif.



- Conclure qu'une suite croissante et majorée par M tend vers M : elle converge, mais sa limite peut être plus petite.
- Garder une inégalité stricte à la limite : $u_n < 2$ donne seulement $\lim u_n \leq 2$.
- Appliquer une règle d'opération à une forme indéterminée au lieu de transformer l'expression.
- Se tromper sur le nombre de termes d'une somme géométrique, donc sur l'exposant $n + 1$.

Je me teste

1. Quelles sont les deux étapes d'une récurrence avant la conclusion ? → L'initialisation et l'hérédité.
2. Énonce l'inégalité de Bernoulli. → Pour $a > 0$ et n entier, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
3. Limite de $0,99^n$? → 0, car $-1 < 0,99 < 1$.
4. Limite de $(-2)^n$? → Aucune limite, car $-2 \leq -1$.
5. Limite de $(2n^2 + 1)/(5n^2 - n)$? → $2/5$, en factorisant par n^2 .
6. Limite de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$? → 0, par la quantité conjuguée.
7. Limite de $(\sin n)/n$? → 0, par les gendarmes avec $-1/n$ et $1/n$.
8. Une suite décroissante minorée par 0 tend-elle vers 0 ? → Elle converge, mais pas forcément vers 0.
9. Valeur de $1 + 1/2 + \dots + (1/2)^n$ quand n tend vers $+\infty$? → Elle tend vers 2.
10. Si $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ converge, quelle est sa limite ? → 6, solution de $\ell = 0,5\ell + 3$.

Fiche : Limites de fonctions

FICHE • M10 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Si $f(x)$ tend vers un réel ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$, la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe de f .
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a (d'un côté au moins), la droite $x = a$ est asymptote verticale.
- Si $f(x) - (mx + p)$ tend vers 0 en $\pm\infty$, la droite $y = mx + p$ est asymptote oblique ; le signe de cette différence donne la position de la courbe.
- Les limites à gauche et à droite en a peuvent différer : $1/x$ tend vers $-\infty$ en 0^- et vers $+\infty$ en 0^+ .
- Les règles d'opérations des suites valent pour les fonctions ; les formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$.
- En l'infini, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré, et un quotient de polynômes comme le quotient de ces termes.
- Quand un numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, la limite est infinie et son signe vient d'un tableau de signes du dénominateur.
- Une forme $0/0$ en a entre deux polynômes se lève en factorisant par $(x - a)$.
- Une différence de racines carrées se traite par la quantité conjuguée.
- Pour une composée $g(u(x))$, on calcule la limite b de $u(x)$, puis la limite de $g(X)$ quand X tend vers b .
- Comparaison : si $f \geq g$ et g tend vers $+\infty$, alors f tend vers $+\infty$; gendarmes : un encadrement par deux fonctions de même limite ℓ impose la limite ℓ .
- $\sin x$ et $\cos x$ n'ont pas de limite en l'infini : on les encadre entre -1 et 1.
- L'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$; la droite $y = 0$ est asymptote en $-\infty$.
- En cas d'indétermination, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x .



Formules et définitions à connaître

Limite	Valeur	Remarque
x^n en $+\infty$	$+\infty$	n entier non nul
x^n en $-\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	
$1/x^n$ en $\pm\infty$	0	
$\sqrt{x}$ en $+\infty$	$+\infty$	
$\exp(x)$ en $+\infty$ / en $-\infty$	$+\infty$ / 0	
$\exp(x)/x^n$ en $+\infty$	$+\infty$	croissances comparées
$x^n \exp(-x)$ en $+\infty$	0	croissances comparées
$x^n \exp(x)$ en $-\infty$	0	croissances comparées
$(\exp(x) - 1)/x$ en 0	1	taux d'accroissement de $\exp$ en 0
Composée	$\lim g(u(x)) = c$ si $u(x) \rightarrow b$ et $g(X) \rightarrow c$	a, b, c réels ou infinis

Pièges à éviter

- Utiliser le raccourci du terme dominant en un réel a : il ne vaut qu'en l'infini.
- Conclure à une asymptote verticale dès que le dénominateur s'annule : si le numérateur s'annule aussi, la limite peut être finie.



- Oublier de distinguer la gauche et la droite quand le dénominateur change de signe.
- Écrire une limite pour $\sin x$ ou $\cos x$ en l'infini.
- Confondre $\exp(-x)$ en $+\infty$ (limite 0) et en $-\infty$ (limite $+\infty$).
- Croire qu'une courbe ne coupe jamais son asymptote horizontale.

Je me teste

1. Limite de $(5x^2 - 1)/(2x^2 + x)$ en $+\infty$? $\rightarrow 5/2$.
2. Limite de $1/(x - 4)$ en 4^+ ? $\rightarrow +\infty$, asymptote verticale $x = 4$.
3. Limite de $(x^2 - 25)/(x - 5)$ en 5 ? $\rightarrow 10$, après simplification par $(x - 5)$.
4. Limite de $\exp(-x^2)$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$, par composition.
5. Limite de $x^3 \exp(-x)$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$, par croissances comparées.
6. Limite de $\exp(x)/x^2$ en $+\infty$? $\rightarrow +\infty$.
7. Limite de $x \exp(x)$ en $-\infty$? $\rightarrow 0$.
8. Limite de $(\exp(x) - 1)/x$ en 0 ? $\rightarrow 1$.
9. Limite de $(\cos x)/x$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$, par les gendarmes.
10. Que signifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ graphiquement ? $\rightarrow$ La droite $y = 3$ est asymptote horizontale en $+\infty$.



Fiche : Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

FICHE • M11 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Une fonction f est continue en a si la limite de $f(x)$ quand x tend vers a vaut $f(a)$; elle est continue sur I si elle l'est en tout point de I .
- Polynômes, fonctions rationnelles (sur leur ensemble de définition), racine carrée, exponentielle, valeur absolue, sinus et cosinus sont continus ; sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues aussi.
- Une fonction définie par morceaux est continue au point de raccord si les limites à gauche et à droite y sont égales à la valeur de la fonction.
- Une fonction dérivable est continue ; la réciproque est fausse (valeur absolue en 0, racine carrée en 0).
- Si u_n tend vers a et si f est continue en a , alors $f(u_n)$ tend vers $f(a)$.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$: la limite est un point fixe.
- Théorème des valeurs intermédiaires : si f est continue sur $[a ; b]$, toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte au moins une fois sur $[a ; b]$.
- Corollaire : si f est de plus strictement monotone, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution sur $[a ; b]$; il s'étend aux intervalles ouverts ou infinis avec les limites aux bornes.
- Dans un tableau de variations, une flèche oblique signifie fonction continue et strictement monotone ; on compte les solutions intervalle par intervalle.
- La dichotomie divise par 2 la longueur de l'encadrement à chaque étape : après n étapes, elle vaut $(b - a)/2^n$.
- Pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, monotonie par récurrence (f croissante), convergence monotone, puis limite par $f(\ell) = \ell$.
- Les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de sa courbe avec la droite $y = x$.



Formules et définitions à connaître

Notion	Énoncé	Condition
Continuité en a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	a dans l'intervalle de définition
Suite et continuité	$u_n \rightarrow a$ donne $f(u_n) \rightarrow f(a)$	f continue en a
Point fixe	$\ell = f(\ell)$	(u_n) converge vers ℓ , f continue en ℓ
Valeurs intermédiaires	il existe c dans [a ; b] avec $f(c) = k$	f continue, k entre f(a) et f(b)
Corollaire	solution unique	f continue et strictement monotone
Dichotomie	longueur $(b - a)/2^n$ après n étapes	f continue, $f(a) \times f(b) \leq 0$
Nombre d'étapes	$2^n \geq (b - a)/e$	précision e

Pièges à éviter

- Conclure à une solution unique avec le seul théorème des valeurs intermédiaires : il faut la stricte monotonie.
- Oublier l'hypothèse de continuité : $1/x$ change de signe entre -1 et 1 sans jamais s'annuler.
- Écrire $\ell = f(\ell)$ avant d'avoir prouvé la convergence de la suite.
- Garder une solution de $f(\ell) = \ell$ incompatible avec l'intervalle stable ou le sens de variation.
- Croire qu'une fonction continue est dérivable.
- En dichotomie, garder la mauvaise moitié : on conserve celle où $f(a) \times f(m) \leq 0$.

Je me teste

1. Une fonction dérivable sur I est-elle continue sur I ? → Oui, toujours.
2. Une fonction continue en 0 est-elle dérivable en 0 ? → Pas forcément, par exemple $|x|$.
3. Si u_n tend vers 1, vers quoi tend $\exp(u_n)$? → Vers e, par continuité de exp.
4. Que permet d'affirmer le théorème des valeurs intermédiaires ? → Au moins une solution de $f(x) = k$ pour k entre f(a) et f(b), si f est continue.
5. Quelle hypothèse ajouter pour avoir une solution unique ? → La stricte monotonie de f.
6. Longueur de l'encadrement après 5 étapes de dichotomie sur [0 ; 1] ? → $1/32$, soit 0,03125.
7. Combien d'étapes pour une précision de 0,001 sur [0 ; 1] ? → 10, car $2^{10} = 1\,024$.
8. Si $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ converge, quelle est sa limite positive ? → 3, solution positive de $\ell^2 = \ell + 6$.
9. Graphiquement, qu'est-ce qu'un point fixe de f ? → L'abscisse d'une intersection de la courbe de f avec la droite $y = x$.
10. Pour f croissante, comment connaître le sens de variation de $u_{n+1} = f(u_n)$? → En comparant u_0 et u_1 .



Fiche : Compléments sur la dérivation et convexité

FICHE • M12 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- La dérivée d'une composée est $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$: on dérive la fonction extérieure appliquée à $u(x)$, puis on multiplie par $u'(x)$.
- La dérivée de $\exp(u)$ est $u' \exp(u)$; elle a toujours le signe de u' .
- La dérivée seconde f'' est la dérivée de f' ; elle mesure l'évolution de la pente, comme une accélération.
- f est convexe sur I si sa courbe est sous chacune de ses cordes, concave si elle est au-dessus.
- Pour f dérivable : f convexe équivaut à f' croissante, et à une courbe au-dessus de toutes ses tangentes.
- Pour f deux fois dérivable : f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$, concave si et seulement si $f'' \leq 0$.
- x^2 , $\exp$ et $1/x$ sur $]0 ; +\infty[$ sont convexes ; $\sqrt{x}$ est concave ; x^3 est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente, c'est-à-dire où la convexité change.
- Si f' s'annule en a en changeant de signe, le point d'abscisse a est un point d'inflexion.
- En un point d'inflexion, f' atteint un extremum local : la variation de f y est la plus rapide.
- La convexité de $\exp$ donne $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout x ; la concavité de $\sqrt{\cdot}$ donne $\sqrt{x} \leq (x + 1)/2$ pour tout $x \geq 0$.
- Pour f convexe, $f((a + b)/2) \leq (f(a) + f(b))/2$; l'inégalité s'inverse pour f concave.
- Une fonction convexe dont la dérivée s'annule en a atteint son minimum en a .



Formules et définitions à connaître

Fonction	Dérivée	Condition
$g(u(x))$	$u'(x) g'(u(x))$	u dérivable sur I , g dérivable sur J contenant $u(I)$
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$	
u^n	$n u' u^{n-1}$	n entier ≥ 1
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$	$u > 0$
$1/u$	$-u'/u^2$	u ne s'annule pas
$f(ax + b)$	$a f'(ax + b)$	
Tangente en a	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$	f dérivable en a
Convexité	$f'' \geq 0$ sur I	f deux fois dérivable
Inégalité de corde	$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + t f(b)$	f convexe, t dans $[0 ; 1]$

Pièges à éviter

- Oublier le facteur u' : la dérivée de $\exp(3x)$ est $3 \exp(3x)$.
- Confondre convexe et croissante : x^2 est convexe mais décroissante sur $]-\infty ; 0]$.



- Conclure à un point d'inflexion dès que $f''(a) = 0$: il faut un changement de signe (contre-exemple x^4).
- Mélanger le tableau de signes de f' (variations) et celui de f'' (convexité).
- Affirmer une position par rapport à une tangente sur un intervalle qui contient un point d'inflexion.
- Croire que le produit de deux fonctions convexes est convexe.

Je me teste

1. Dérivée de $\exp(-2x)$? $\rightarrow -2 \exp(-2x)$.
2. Dérivée de $(x^2 + 1)^3$? $\rightarrow 6x(x^2 + 1)^2$.
3. Dérivée de $\sqrt{5x + 1}$? $\rightarrow 5/(2\sqrt{5x + 1})$.
4. $f'(x) = (x - 3) \exp(x)$: où f est-elle convexe ? $\rightarrow$ Sur $[3 ; +\infty[$.
5. La fonction $\sqrt{}$ est-elle convexe ou concave ? $\rightarrow$ Concave sur $[0 ; +\infty[$.
6. Une courbe convexe est-elle au-dessus ou au-dessous de ses tangentes ? $\rightarrow$ Au-dessus.
7. $f(x) = x^4$ a-t-elle un point d'inflexion en 0 ? $\rightarrow$ Non, $f'' = 12x^2$ ne change pas de signe.
8. Abscisses des points d'inflexion de $\exp(-x^2/2)$? $\rightarrow -1$ et 1 .
9. Quelle inégalité donne la tangente en 0 à $\exp$? $\rightarrow \exp(x) \geq 1 + x$ pour tout réel x .
10. Que représente le point d'inflexion d'une courbe de croissance en S ? $\rightarrow$ L'instant où la croissance est la plus rapide.



Fiche : Fonction logarithme népérien

FICHE • M13 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Pour tout $a > 0$, $\ln a$ est l'unique réel x tel que $e^x = a$: $\ln$ est la fonction réciproque de $\exp$, définie sur $]0 ; +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$, et pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$; $\ln x$ est négatif sur $]0 ; 1[$ et positif sur $]1 ; +\infty[$.
- Les courbes de $\ln$ et de $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Le logarithme transforme les produits en sommes : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.
- La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ avec $\ln'(x) = 1/x$; elle est strictement croissante.
- Si u est dérivable et strictement positive, $(\ln u)' = u'/u$, et $\ln(u)$ a les mêmes variations que u .
- $\ln$ tend vers $-\infty$ en 0 (asymptote verticale $x = 0$) et vers $+\infty$ en $+\infty$, mais très lentement.
- La fonction $\ln$ est concave : sa courbe est sous ses tangentes, d'où $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
- Croissances comparées : $\ln x / x$ tend vers 0 en $+\infty$ et $x \ln x$ tend vers 0 en 0 ; toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$.
- Pour résoudre une équation ou une inéquation, on écrit le domaine, on se ramène à $\ln A = \ln B$ ou $A < B$ par stricte croissance, puis on garde les solutions du domaine.
- Le logarithme décimal $\log x = \ln x / \ln 10$ vérifie $\log(10^n) = n$; il mesure l'ordre de grandeur d'un nombre.
- $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$ (en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$) et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$; diviser $[\text{H}_3\text{O}^+]$ par 10 augmente le pH de 1.
- Le niveau sonore vaut $L = 10 \log(I/I_0)$ avec $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; doubler l'intensité ajoute environ 3 dB.
- Pour une décroissance $N_0 e^{-\lambda t}$, la demi-vie vaut $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ et ne dépend pas de N_0 .



Formules et définitions à connaître

Grandeur	Formule	Condition
Définition	$y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$	$x > 0$
Produit	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$a > 0, b > 0$
Inverse, quotient	$\ln(1/a) = -\ln a$; $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$	$a > 0, b > 0$
Puissance, racine	$\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln(\sqrt[n]{a}) = (1/n) \ln a$	$a > 0, n$ entier
Dérivées	$\ln'(x) = 1/x$; $(\ln u)' = u'/u$	$x > 0$; $u > 0$
Limites	$\ln x$ tend vers $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$	
Croissances comparées	$\ln x / x \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+	
Taux en 1	$\ln(1+h)/h \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$	
Logarithme décimal	$\log x = \ln x / \ln 10$; $\log(10^n) = n$	$x > 0$
pH	$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$	solution diluée, c en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$
Décibels	$L = 10 \log(I/I_0)$, $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	L en dB
Demi-vie	$t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$	modèle $N_0 e^{-\lambda t}$

Pièges à éviter

- Oublier le domaine de validité : chaque $\ln$ doit porter sur une quantité strictement positive.



- Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$: cette formule est fausse.
- Diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$ sans changer le sens de l'inégalité, alors que $\ln q$ est négatif.
- Écrire $(\ln u)' = 1/u$ en oubliant le facteur u' .
- Écrire $\ln(x^2) = 2 \ln x$ pour x négatif : en réalité $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$.
- Confondre $\ln$ et $\log$: pH et décibels utilisent $\log$.

Je me teste

1. Que vaut $e^{\ln 5}$? $\rightarrow 5$.
2. Simplifier $\ln 12 - \ln 3$. $\rightarrow \ln 4$, soit $2 \ln 2$.
3. Dérivée de $\ln(x^2 + 1)$? $\rightarrow 2x/(x^2 + 1)$.
4. Limite de $\ln x / x$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$ (croissance comparée).
5. Limite de $x \ln x$ en 0^+ ? $\rightarrow 0$.
6. Solution de $\ln(x - 1) = 0$? $\rightarrow x = 2$.
7. Plus petit entier n tel que $0,5^n < 0,01$? $\rightarrow n = 7$ ($0,5^7 \approx 0,0078$).
8. pH si $[H_3O^+] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$? $\rightarrow \text{pH} = 3$.
9. Gain en dB quand l'intensité est multipliée par 10 ? $\rightarrow 10 \text{ dB}$.
10. Demi-vie si $\lambda = 0,1 \text{ h}^{-1}$? $\rightarrow t_{1/2} = \ln 2 / 0,1 \approx 6,9 \text{ h}$.

Fiche : Fonctions sinus et cosinus

FICHE • M14 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le point $M(x)$ du cercle trigonométrique a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$, avec x en radians.
- Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et $\cos x$ et $\sin x$ sont compris entre -1 et 1 .
- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques : on les étudie sur un intervalle de longueur 2π .
- La fonction $\cos$ est paire (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), la fonction $\sin$ est impaire (courbe symétrique par rapport à l'origine).
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.
- Pour une fonction u dérivable, $(\sin u)' = u' \cos u$ et $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- Le nombre dérivé de $\sin$ en 0 vaut 1 , d'où la limite fondamentale : $\sin x / x$ tend vers 1 quand x tend vers 0 .
- $\cos$ est décroissante sur $[0 ; \pi]$ et croissante sur $[-\pi ; 0]$; $\sin$ est croissante sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$ et décroissante sur $[\pi/2 ; \pi]$.
- La courbe de $\cos$ est celle de $\sin$ décalée de $\pi/2$ vers la gauche, car $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.
- $\cos x = \cos a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.
- Une inéquation trigonométrique se résout sur un intervalle en repérant un arc sur le cercle.
- Dans $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, A est l'amplitude, ω la pulsation, φ la phase à l'origine, $T = 2\pi/\omega$ la période et $f = 1/T$ la fréquence.
- La fonction $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ vérifie $s'' = -\omega^2 s$: c'est le modèle de l'oscillateur harmonique.
- Pour une grandeur oscillant entre un minimum et un maximum, la valeur moyenne vaut $(\max + \min)/2$ et l'amplitude $(\max - \min)/2$.



Formules et définitions à connaître

Notion	Formule	Remarque
Relation fondamentale	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	pour tout x
Parité	$\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$	
Angles associés	$\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$	
Quart de tour	$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$; $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$	
Dérivées	$\sin' = \cos$; $\cos' = -\sin$	x en radians
Composées	$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$; $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$	
Limite	$\sin x / x \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$	
Équation en cos	$x = \pm a + 2k\pi$	k entier relatif
Équation en sin	$x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$	k entier relatif
Signal sinusoïdal	$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$	$A > 0$, $\omega > 0$
Période, fréquence	$T = 2\pi/\omega$; $f = 1/T = \omega/(2\pi)$	T en s, f en Hz

Pièges à éviter

- Calculer en mode degré alors que le cours travaille en radians.

- N'écrire qu'une seule famille de solutions pour $\cos x = c$ ou $\sin x = c$.
- Dans $\cos(2x) = c$, oublier de diviser aussi $2k\pi$ par 2.
- Chercher des solutions à $\cos x = 1,5$: il n'y en a aucune.
- Oublier le facteur ω en dérivant $\cos(\omega t + \varphi)$.
- Déterminer φ avec $\cos \varphi$ seul, sans utiliser le sens de variation à l'instant 0.

Je me teste

1. Valeur exacte de $\sin(5\pi/6)$? $\rightarrow 1/2$.
2. Dérivée de $\cos(4x)$? $\rightarrow -4 \sin(4x)$.
3. Période de $x \mapsto \cos(3x)$? $\rightarrow 2\pi/3$.
4. Limite de $\sin(2x)/x$ en 0 ? $\rightarrow 2$.
5. Solutions de $\cos x = 0$ sur $\mathbb{R}$? $\rightarrow x = \pi/2 + k\pi$.
6. Solutions de $\sin x = 1/2$ sur $[0 ; 2\pi[$? $\rightarrow \pi/6$ et $5\pi/6$.
7. Solutions de $\cos x \geq 0$ sur $]-\pi ; \pi]$? $\rightarrow [-\pi/2 ; \pi/2]$.
8. Pulsation d'un signal de fréquence 50 Hz ? $\rightarrow 100\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
9. Amplitude et valeur moyenne de $4 + 3 \cos t$? $\rightarrow$ amplitude 3, moyenne 4.
10. Équation vérifiée par $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$? $\rightarrow s'' = -\omega^2 s$.



Fiche : Primitives et équations différentielles

FICHE • M15 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Une équation différentielle a pour inconnue une fonction ; une solution est une fonction dérivable qui vérifie l'égalité sur tout l'intervalle.
- Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.
- Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante : les primitives de f sont les $F + C$.
- Il existe une unique primitive de f prenant une valeur donnée y_0 en un point x_0 donné.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (théorème démontré avec le calcul intégral).
- Les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f .
- Pour une composée, on reconnaît une forme ($u'u^n$, u'/u , $u'e^u$, $u' \cos u$...) puis on ajuste un facteur constant.
- On vérifie toujours une primitive en la dérivant.
- Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$; la solution telle que $y(0) = y_0$ est $y_0 e^{ax}$.
- Pour $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax} - b/a$, où $-b/a$ est la solution constante.
- Si $a < 0$, toutes les solutions de $y' = ay + b$ tendent vers la valeur d'équilibre $-b/a$, avec un temps caractéristique $\tau = 1/|a|$.
- Décroissance radioactive : $N' = -\lambda N$ donne $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, de demi-vie $\ln 2 / \lambda$.
- Refroidissement de Newton : $\theta' = -k(\theta - \theta_a)$ donne $\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a) e^{-kt}$.
- Charge d'un condensateur : $RC u' + u = E$ donne $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, avec $\tau = RC$.
- Perfusion à débit Q : $C' = Q/V - kC$ donne un plateau $Q/(kV)$, atteint à 50 % en une demi-vie.



Formules et définitions à connaître

Fonction f	Une primitive	Condition
x^n ($n \geq 0$ entier)	$x^{n+1}/(n+1)$	$\mathbb{R}$
$1/x^2$	$-1/x$	$x \neq 0$, sur un intervalle
$1/x$	$\ln x$	$x > 0$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$
e^x ; $\cos x$; $\sin x$	e^x ; $\sin x$; $-\cos x$	$\mathbb{R}$
$u' u^n$	$u^{n+1}/(n+1)$	n entier, $n \geq 1$
u'/u	$\ln u$	$u > 0$
u'/u^2	$-1/u$	u ne s'annule pas
$u' e^x$	e^x	
$f(ax+b)$	$(1/a) F(ax+b)$	$a \neq 0$

Équation	Solutions	Remarque
$y' = f$	$F + C$	F primitive de f
$y' = ay$	$C e^{ax}$	$y(0) = y_0$ donne $C = y_0$
$y' = ay + b$, $a \neq 0$	$C e^{ax} - b/a$	équilibre $-b/a$ si $a < 0$

Pièges à éviter

- Oublier de préciser l'intervalle, en particulier pour $\ln$.



- Multiplier par a au lieu de diviser : une primitive de e^{3x} est $e^{3x}/3$.
- Lire a et b sans mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$ (dans $y' + 2y = 6$, $a = -2$).
- Appliquer la condition initiale à $C e^{ax}$ seul en oubliant le terme $-b/a$.
- Croire qu'il existe une règle de primitive pour un produit quelconque.
- Oublier les unités du temps caractéristique ou de la constante k .

Je me teste

1. Une primitive de $3x^2 + 2$? $\rightarrow x^3 + 2x$.
2. Une primitive de $2x/(x^2 + 1)$? $\rightarrow \ln(x^2 + 1)$.
3. Une primitive de $\cos(2x)$? $\rightarrow (1/2) \sin(2x)$.
4. Une primitive de $x e^{x^2}$? $\rightarrow (1/2) e^{x^2}$.
5. Solutions de $y' = -4y$? $\rightarrow C e^{-4x}$.
6. Solution de $y' = 5y$ avec $y(0) = 2$? $\rightarrow 2e^{5x}$.
7. Solution constante de $y' = -2y + 10$? $\rightarrow 5$.
8. Limite des solutions de $y' = -0,1y + 3$ en $+\infty$? $\rightarrow 30$.
9. Constante de temps pour $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ mF}$? $\rightarrow \tau = 1 \text{ s}$.
10. Fraction du plateau atteinte après deux demi-vies de perfusion ? $\rightarrow 75 \%$.



Fiche : Calcul intégral

FICHE • M16 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Pour f continue et positive sur $[a ; b]$, $\int$ de a à b de $f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.
- La variable d'intégration est muette : $\int$ de a à b de $f(x) dx = \int$ de a à b de $f(t) dt$.
- La fonction $x \mapsto \int$ de a à x de $f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a ; c'est pourquoi toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Si F est une primitive de f , $\int$ de a à b de $f = F(b) - F(a)$, ce qui définit l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.
- Pour une fonction négative, l'intégrale est l'opposé de l'aire ; pour une fonction qui change de signe, c'est une aire algébrique.
- L'intégrale est linéaire et vérifie la relation de Chasles ; inverser les bornes change son signe.
- Pour $a \leq b$, l'intégrale d'une fonction positive est positive et l'intégration conserve l'ordre ($f \leq g$ donne $\int f \leq \int g$).
- La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ vaut $(1/(b - a)) \times \int$ de a à b de f : c'est la hauteur du rectangle de même aire.
- Si $f \geq g$ sur $[a ; b]$, l'aire entre les deux courbes vaut $\int$ de a à b de $(f - g)$.
- L'intégration par parties s'écrit $\int uv' = [uv] - \int u'v$; on dérive le facteur qui se simplifie.
- Pour un polynôme multiplié par e^x ou $\sin x$, on dérive le polynôme ; pour un polynôme multiplié par $\ln x$, on dérive $\ln x$.
- Une suite d'intégrales s'étudie par intégration par parties (récurrence) et par encadrement (limite).
- L'intégrale d'un débit donne une quantité cumulée, et l'aire sous la courbe d'une concentration mesure l'exposition à un médicament.
- La méthode des rectangles encadre l'intégrale d'une fonction monotone, avec un écart qui tend vers 0 quand le pas diminue.



Formules et définitions à connaître

Notion	Formule	Condition
Calcul	$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f = F(b) - F(a)$	F primitive de f, f continue
Fonction intégrale	$(\int \text{de } a \text{ à } x \text{ de } f(t) dt)' = f(x)$	f continue
Inversion des bornes	$\int \text{de } b \text{ à } a \text{ de } f = - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f$	
Chasles	$\int \text{de } a \text{ à } c = \int \text{de } a \text{ à } b + \int \text{de } b \text{ à } c$	
Linéarité	$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$	
Positivité, croissance	$f \geq 0 \text{ donne } \int f \geq 0 ; f \leq g \text{ donne } \int f \leq \int g$	$a \leq b$
Inégalité de la moyenne	$m(b-a) \leq \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f \leq M(b-a)$	$a \leq b, m \leq f \leq M$
Valeur moyenne	$\mu = (1/(b-a)) \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f$	$a < b$
Aire entre courbes	$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } (f - g)$	$f \geq g \text{ sur } [a ; b]$
Intégration par parties	$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } uv' = [uv] \text{ de } a \text{ à } b - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } u'v$	$u', v' \text{ continues}$

Pièges à éviter

- Confondre intégrale et aire quand la fonction change de signe : découper avec Chasles.



- Calculer $F(a) - F(b)$ au lieu de $F(b) - F(a)$, ou oublier les parenthèses autour de $F(a)$.
- Utiliser la positivité ou la croissance de l'intégrale avec $a > b$.
- Intégrer (courbe du dessous) - (courbe du dessus) et obtenir une aire négative.
- Oublier le crochet $[uv]$ ou le signe moins dans l'intégration par parties.
- Diviser par b au lieu de $b - a$ dans la valeur moyenne.

Je me teste

1. $\int$ de 0 à 1 de $x^2 dx$? $\rightarrow 1/3$.
2. $\int$ de 0 à $\pi/2$ de $\sin x dx$? $\rightarrow 1$.
3. $\int$ de 1 à e de $(1/x) dx$? $\rightarrow 1$.
4. Si $\int$ de 0 à 2 de $f = 5$, que vaut $\int$ de 2 à 0 de f ? $\rightarrow -5$.
5. Valeur moyenne de $x \mapsto 2x$ sur $[0 ; 3]$? $\rightarrow 3$.
6. Aire entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0 ; 1]$? $\rightarrow 1/6$ u.a.
7. $\int$ de 0 à 1 de $x e^{-x} dx$? $\rightarrow 1$, par parties.
8. Dérivée de $x \mapsto \int$ de 0 à x de $e^{-t^2} dt$? $\rightarrow e^{-x^2}$.
9. $\int$ de 0 à 2π de $\sin x dx$? $\rightarrow 0$, mais l'aire correspondante vaut 4 u.a.
10. 1 u.a. si les unités sont 2 cm et 3 cm ? $\rightarrow 6 \text{ cm}^2$.



Fiche : Dénombrement et combinatoire

FICHE • M17 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments ; l'ensemble vide a pour cardinal 0.
- Principe additif : le cardinal d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints est la somme de leurs cardinaux.
- Si A et B ne sont pas disjoints, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- Le complémentaire vérifie $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$: c'est l'outil des énoncés « au moins un ».
- Principe multiplicatif : $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$, et un arbre de choix successifs compte le produit des nombres d'options.
- Un k-uplet est une liste ordonnée de k éléments, avec répétition possible ; il y en a n^k dans un ensemble à n éléments.
- Un ensemble à n éléments possède 2^n parties, grâce à la bijection avec les n-uplets de 0 et de 1.
- Un arrangement est un k-uplet d'éléments distincts ; il y en a $n!/(n-k)!$, produit de k facteurs décroissants à partir de n.
- Une permutation range tous les n éléments ; il y en a $n!$, avec la convention $0! = 1$.
- Une combinaison est une partie à k éléments, sans ordre ni répétition ; il y en a $C(n, k) = n!/(k!(n-k)!)$.
- Chaque combinaison correspond à k! arrangements, d'où $C(n, k) \times k! = n!/(n-k)!$.
- Les coefficients vérifient la symétrie $C(n, k) = C(n, n-k)$ et la relation de Pascal $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$.
- La somme de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n .
- Formule du binôme : $(a+b)^n$ est la somme des $C(n, k)a^{n-k}b^k$ pour k de 0 à n.
- Tirages successifs avec remise : k-uplets ; successifs sans remise : arrangements ; simultanés : combinaisons.
- En équiprobabilité, $P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega)$, avec A et Ω comptés dans le même modèle.



Formules et définitions à connaître

Objet	Ordre	Répétition	Nombre	Condition
k-uplet	oui	oui	n^k	$k \geq 1$
arrangement	oui	non	$n!/(n-k)!$	$1 \leq k \leq n$
permutation	oui	non	$n!$	$k = n$
combinaison	non	non	$C(n, k) = n!/(k!(n-k)!)$	$0 \leq k \leq n$
parties de E			2^n	$\text{card}(E) = n$

- $C(n, 0) = C(n, n) = 1$; $C(n, 1) = n$; $C(n, 2) = n(n-1)/2$.
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Ligne 5 du triangle : 1, 5, 10, 10, 5, 1 ; ligne 6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Pièges à éviter

- Confondre n^k (avec répétition) et $n!/(n-k)!$ (sans répétition).
- Utiliser des arrangements pour un tirage simultané, où l'ordre ne compte pas.
- Compter « au moins un as » en fixant un as puis en complétant librement : les mains à plusieurs as sont comptées plusieurs fois.
- Additionner des cas qui ne sont pas disjoints.
- Oublier les signes alternés dans $(a-b)^n$ ou la puissance du coefficient dans $(3x+1)^n$.
- Compter l'événement en ordonné et l'univers en non ordonné.

Je me teste

1. Nombre de codes de 4 chiffres ? $\rightarrow 10^4 = 10\,000$.
2. Nombre de codes de 4 chiffres distincts ? $\rightarrow 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.
3. Valeur de $0!$? $\rightarrow 1$.
4. $C(10, 3)$? $\rightarrow 120$.
5. $C(20, 18)$? $\rightarrow C(20, 2) = 190$.
6. Nombre de parties d'un ensemble à 5 éléments ? $\rightarrow 2^5 = 32$.
7. Relation de Pascal ? $\rightarrow C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$.
8. Coefficient de x^3 dans $(3x+1)^7$? $\rightarrow C(7, 3) \times 3^3 = 945$.
9. Nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 ? $\rightarrow C(32, 5) = 201\,376$.
10. Nombre d'anagrammes de PASS ? $\rightarrow 4!/2! = 12$.

Fiche : Loi binomiale

FICHE • M18 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Une épreuve de Bernoulli a deux issues, succès de probabilité p et échec de probabilité $1 - p$.
- La variable qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la loi de Bernoulli : $E = p$ et $V = p(1 - p)$.
- La variance d'une loi de Bernoulli est maximale, égale à $1/4$, pour $p = 1/2$.
- Un schéma de Bernoulli répète n fois la même épreuve, de façon identique et indépendante.
- Dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.
- Le nombre X de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la loi binomiale $B(n, p)$.
- $C(n, k)$ est le nombre de chemins de l'arbre qui comportent exactement k succès.
- Un tirage sans remise dans une petite urne n'est pas binomial ; dans une très grande population, on l'assimile à un tirage avec remise.
- Pour $p = 0,5$ la loi est symétrique par rapport à $n/2$; le nombre d'échecs $n - X$ suit $B(n, 1 - p)$.
- La probabilité d'au moins un succès vaut $1 - (1 - p)^n$, et un seuil se trouve avec $\ln$ en changeant le sens de l'inégalité.
- L'espérance np est le nombre moyen de succès, et l'écart type $\sqrt{np(1 - p)}$ mesure la dispersion.
- La fréquence $F = X/n$ a pour espérance p et pour écart type $\sqrt{p(1 - p)}/\sqrt{n}$, qui diminue quand n augmente.
- Un intervalle de fluctuation $[a ; b]$ au seuil de 95 % vérifie $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.
- Si la fréquence observée sort de $[a/n ; b/n]$, on rejette l'hypothèse sur p avec un risque d'au plus 5 % ; sinon on ne la rejette pas, sans la prouver.



Formules et définitions à connaître

Grandeur	Formule	Condition
$P(X = k)$	$C(n, k) p^k (1 - p)^{n-k}$	X de loi $B(n, p)$, $0 \leq k \leq n$
$P(X = 0)$	$(1 - p)^n$	
$P(X \geq 1)$	$1 - (1 - p)^n$	
$P(X \geq k)$	$1 - P(X \leq k - 1)$	k entier
$P(a \leq X \leq b)$	$P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$	a, b entiers
$E(X)$	np	
$V(X)$	$np(1 - p)$	
$\sigma(X)$	$\sqrt{np(1 - p)}$	
$E(F), \sigma(F)$	$p, \sqrt{(p(1 - p))/n}$	$F = X/n$
seuil	$n \geq \ln(\alpha)/\ln(1 - p)$	pour $(1 - p)^n \leq \alpha$
bornes de fluctuation	a : plus petit entier avec $P(X \leq a) > 0,025$; b : plus petit entier avec $P(X \leq b) \geq 0,975$	seuil de 95 %

Pièges à éviter

- Oublier de citer « identiques et indépendantes » dans la justification d'une loi binomiale.



- Écrire $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k)$ au lieu de $1 - P(X \leq k - 1)$.
- Ne pas changer le sens de l'inégalité en divisant par $\ln(1 - p)$, qui est négatif.
- Confondre variance et écart type.
- Conclure qu'une hypothèse est vraie parce que la fréquence est dans l'intervalle de fluctuation.
- Croire que la valeur np est obtenue avec une forte probabilité.

Je me teste

1. Loi du nombre de 6 en 5 lancers d'un dé ? $\rightarrow B(5 ; 1/6)$.
2. Espérance et variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p ? $\rightarrow p$ et $p(1 - p)$.
3. $P(X = 2)$ pour X de loi $B(6 ; 0,4)$? $\rightarrow 15 \times 0,4^2 \times 0,6^4 = 0,31104$.
4. Espérance de $B(200 ; 0,15)$? $\rightarrow 30$.
5. $P(X \geq 1)$ pour X de loi $B(n, p)$? $\rightarrow 1 - (1 - p)^n$.
6. Plus petit n tel que $1 - 0,98^n \geq 0,95$? $\rightarrow 149$.
7. Tirages sans remise dans une urne de 8 boules : binomial ? $\rightarrow$ Non, épreuves non indépendantes.
8. Paramètres si $E = 12$ et $V = 4,8$? $\rightarrow p = 0,6$ et $n = 20$.
9. Fréquence 0,34 et intervalle $[0,10 ; 0,32]$? $\rightarrow$ On rejette l'hypothèse au risque de 5 %.
10. Écart type de la fréquence pour $n = 50$ et $p = 0,2$? $\rightarrow \sqrt{(0,16)/50} \approx 0,057$.



Fiche : Sommes de variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

FICHE • M19 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Deux variables X et Y sont indépendantes si $P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$ pour toutes valeurs x et y .
- La loi de $X + Y$ s'obtient en additionnant les probabilités des couples $(x ; y)$ tels que $x + y = s$.
- L'espérance est linéaire : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$, même sans indépendance.
- Pour des variables indépendantes, les variances s'additionnent : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- Pour des variables indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$: les incertitudes se cumulent.
- On additionne des variances, jamais des écarts types.
- Doubler une observation donne $V(2X) = 4V(X)$; additionner deux observations indépendantes donne $2V(X)$.
- Une loi binomiale $B(n, p)$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes, d'où $E = np$ et $V = np(1 - p)$.
- Un échantillon de taille n est une liste de n variables indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance V .
- La somme S_n a pour espérance $n\mu$ et variance nV ; la moyenne M_n a pour espérance μ et variance V/n .
- L'écart type de la moyenne vaut $\sigma/\sqrt{n}$: il faut 100 fois plus d'observations pour le diviser par 10.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore la probabilité d'un écart à l'espérance en n'utilisant que la variance.
- Cette inégalité est universelle mais grossière, et inutile quand $\delta \leq \sigma$.
- L'inégalité de concentration applique Bienaymé-Tchebychev à la moyenne d'un échantillon.
- La loi faible des grands nombres dit que la probabilité d'un écart d'au moins δ entre M_n et μ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- La loi des grands nombres ne prévoit aucune compensation des résultats passés.

Formules et définitions à connaître

Résultat	Formule	Condition
Linéarité	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$	toujours
Variance affine	$V(aX + b) = a^2V(X)$	toujours
Variance d'une somme	$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$	X, Y indépendantes
Somme d'un échantillon	$E(S_n) = n\mu$; $V(S_n) = nV$; $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$	échantillon
Moyenne d'un échantillon	$E(M_n) = \mu$; $V(M_n) = V/n$; $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$	échantillon
Taille suffisante	$n \geq V/(\alpha\delta^2)$	pour une probabilité d'écart $\leq \alpha$

- Bienaymé-Tchebychev, pour $\delta > 0$: $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$.
- Forme en écart type, pour $k > 0$: $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$.
- Concentration, pour $\delta > 0$: $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2)$.
- Fréquence, car $p(1 - p) \leq 1/4$: $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq 1/(4n\delta^2)$.
- Loi faible des grands nombres, pour $\delta > 0$: $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Pièges à éviter

- Additionner des variances sans avoir vérifié l'indépendance.
- Écrire $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$.



- Confondre $2X$ et $X_1 + X_2$.
- Écrire $\sigma(S_n) = n\sigma$ au lieu de $\sigma\sqrt{n}$.
- Appliquer Bienaymé-Tchebychev à un intervalle qui n'est pas centré sur l'espérance.
- Présenter le n donné par l'inégalité de concentration comme la taille minimale.
- Croire qu'après une série de piles, face devient plus probable.

Je me teste

1. $E(X + Y)$ exige-t-il l'indépendance ? $\rightarrow$ Non, la linéarité est toujours vraie.
2. $V(X - Y)$ pour X et Y indépendantes ? $\rightarrow V(X) + V(Y)$.
3. $V(2X)$ si $V(X) = 3$? $\rightarrow 12$.
4. Écart type de la moyenne de 25 observations d'écart type 3 ? $\rightarrow 3/\sqrt{25} = 0,6$.
5. Énoncé de Bienaymé-Tchebychev ? $\rightarrow P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V/\delta^2$ pour $\delta > 0$.
6. Minorant de $P(|X - \mu| < 2\sigma)$ pour toute variable ? $\rightarrow 0,75$.
7. Majorant de $P(|X - 50| \geq 10)$ pour X de loi $B(100 ; 0,5)$? $\rightarrow 25/100 = 0,25$.
8. Taille suffisante pour $P(|F_n - p| \geq 0,05) \leq 0,05$? $\rightarrow n \geq 2\,000$.
9. $E(X)$ et $V(X)$ pour $B(40 ; 0,3)$ par les Bernoulli ? $\rightarrow 12$ et $8,4$.
10. Que dit la loi faible des grands nombres ? $\rightarrow P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.



Fiche : Vecteurs, droites et plans de l'espace

FICHE • M20 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Les vecteurs de l'espace se manipulent comme dans le plan : relation de Chasles, produit par un réel, combinaisons linéaires.
- Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ et, pour tout point M , $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.
- Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est un multiple de l'autre ; trois points sont alignés quand deux vecteurs qu'ils forment sont colinéaires.
- Une droite est déterminée par un point et un vecteur directeur non nul ; elle a une infinité de vecteurs directeurs.
- Un plan est déterminé par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}, \vec{v} : M \in P$ si et seulement si $\vec{AM} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$.
- Quatre points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ sont coplanaires.
- Une base de l'espace est formée de trois vecteurs non coplanaires ; tout vecteur s'y décompose de façon unique.
- Les coordonnées d'un point M dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont celles du vecteur $\vec{OM}$.
- La formule de distance n'est valable que dans un repère orthonormé.
- Deux droites de l'espace sont coplanaires (parallèles ou sécantes) ou non coplanaires.
- Une droite et un plan sont sécants en un point, ou parallèles (droite incluse ou strictement parallèle).
- Deux plans distincts sont parallèles ou sécants selon une droite.
- Théorème du toit : si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.
- Toutes les positions relatives se décident par un système : aucune solution, une solution ou une infinité.



Formules et définitions à connaître

Objet	Formule ou caractérisation	Condition
Vecteur $\overrightarrow{AB}$	$(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$	tout repère
Milieu I de [AB]	$((x_A + x_B)/2 ; (y_A + y_B)/2 ; (z_A + z_B)/2)$	tout repère
Distance AB	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	repère orthonormé seulement
Colinéarité	coordonnées proportionnelles (trois vérifications)	tout repère
Droite $d(A ; \overrightarrow{u}(a ; b ; c))$	$x = x_A + ta, y = y_A + tb, z = z_A + tc, t \in \mathbb{R}$	$\overrightarrow{u}$ non nul
Plan $P(A ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$	$\overrightarrow{AM} = s \cdot \overrightarrow{u} + t \cdot \overrightarrow{v}, s \text{ et } t \text{ réels}$	$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non colinéaires
Coplanarité de 4 points	$\overrightarrow{AD} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}$	A, B, C non alignés
Droite parallèle à un plan	vecteur directeur combinaison des vecteurs directeurs du plan	

Pièges à éviter

- Deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles : elles peuvent être non coplanaires.
- Pour l'intersection de deux droites paramétrées, prends deux paramètres différents (t et s).
- Dans l'espace, une seule égalité de produits en croix ne prouve pas la colinéarité : vérifie les trois coordonnées.



- Trois vecteurs deux à deux non colinéaires peuvent être coplanaires et donc ne pas former une base.
- Ne calcule pas de longueur avec la formule de distance dans un repère non orthonormé.
- Deux représentations paramétriques différentes peuvent décrire la même droite.

Je me teste

1. Que vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$? → Le vecteur nul.
2. $u \rightarrow (1 ; 2 ; 3)$ et $v \rightarrow (2 ; 4 ; 5)$ sont-ils colinéaires ? → Non, car $2 \times 3 = 6 \neq 5$.
3. Combien de vecteurs non colinéaires faut-il pour diriger un plan ? → Deux.
4. Que faut-il pour que trois vecteurs forment une base ? → Qu'ils soient non coplanaires.
5. Un point et un vecteur directeur de $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 3$? → Le point $(1 ; 0 ; 3)$ et le vecteur $(2 ; -1 ; 0)$.
6. Quelles positions possibles pour deux droites de l'espace ? → Parallèles, sécantes ou non coplanaires.
7. Deux plans distincts peuvent-ils avoir un seul point commun ? → Non, ils sont parallèles ou sécants selon une droite.
8. Comment savoir si D est dans le plan (ABC) ? → Chercher a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}$.
9. Que dit le théorème du toit ? → La droite d'intersection de deux plans contenant deux droites parallèles est parallèle à ces droites.
10. Quel segment correspond à $t \in [0 ; 1]$ dans la droite $A + t \cdot \overrightarrow{AB}$? → Le segment $[AB]$.



Fiche : Orthogonalité et distances dans l'espace

FICHE • M21 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se calcule dans un plan qui les contient : toutes les propriétés de Première restent vraies.
- Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- L'angle géométrique θ entre deux vecteurs non nuls vérifie $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$.
- Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes ; orthogonales et sécantes, elles sont perpendiculaires.
- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Un vecteur normal à un plan est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan.
- Dans un repère orthonormé, un plan de vecteur normal $\vec{n} \rightarrow (a ; b ; c)$ a une équation $ax + by + cz + d = 0$, et réciproquement.
- Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Une droite de vecteur directeur $\vec{u} \rightarrow$ est parallèle à un plan de vecteur normal $\vec{n} \rightarrow$ si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, orthogonale à ce plan si $\vec{u} \rightarrow$ est colinéaire à $\vec{n} \rightarrow$.
- Le projeté orthogonal de M sur une droite d est le point H de d tel que $\vec{MH} \rightarrow$ soit orthogonal à un vecteur directeur de d.
- Le projeté orthogonal de M sur un plan est l'intersection du plan avec la droite passant par M dirigée par un vecteur normal.
- Le projeté orthogonal est le point le plus proche de M : la distance de M au plan (ou à la droite) est MH.
- L'intersection d'une droite et d'un plan s'obtient en remplaçant la représentation paramétrique dans l'équation du plan.



- Deux plans sécants se coupent selon une droite dont le vecteur directeur est orthogonal aux deux vecteurs normaux.

Formules et définitions à connaître

Grandeur	Formule	Condition
Produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$	toujours
Produit scalaire en coordonnées	$xx' + yy' + zz'$	repère orthonormé
Polarisation	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2)(\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$	toujours
Projection	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$, H projeté de C sur (AB)	toujours
Plan (A ; $\vec{n}$)	$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $ax + by + cz + d = 0$	$\vec{n}$ non nul, repère orthonormé
Distance point-plan	valeur absolue de $(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$, divisée par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	repère orthonormé
Volume d'un tétraèdre	$V = (1/3) \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$	hauteur = distance sommet-plan

Pièges à éviter

- La formule $xx' + yy' + zz'$ n'est valable que dans un repère orthonormé.
- Un seul produit scalaire nul ne suffit pas pour prouver qu'une droite est orthogonale à un plan.
- Dans une équation de plan, (a ; b ; c) est un vecteur normal, pas un vecteur directeur.
- Droite parallèle à un plan : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; droite orthogonale à un plan : $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$. Ne les inverse pas.



- Dans la formule de distance, n'oublie ni la valeur absolue au numérateur ni la racine carrée au dénominateur.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$.

Je me teste

1. Produit scalaire de $(1 ; 2 ; 3)$ et $(3 ; 0 ; -1)$? $\rightarrow 3 + 0 - 3 = 0$, ils sont orthogonaux.
2. Un vecteur normal au plan $3x - y + 5 = 0$? $\rightarrow \vec{n}(3 ; -1 ; 0)$.
3. Deux droites orthogonales sont-elles sécantes ? $\rightarrow$ Pas forcément, elles peuvent être non coplanaires.
4. Combien de droites du plan faut-il tester pour l'orthogonalité droite-plan ? $\rightarrow$ Deux droites sécantes.
5. Plans $x + y = 1$ et $x + y = 3$? $\rightarrow$ Strictement parallèles.
6. Plans $x + y + z = 0$ et $x - y = 2$? $\rightarrow$ Perpendiculaires, car $1 - 1 + 0 = 0$.
7. Comment trouver le projeté de M sur un plan ? $\rightarrow$ Intersection du plan et de la droite passant par M dirigée par $\vec{n}$.
8. Distance de O au plan $x + 2y + 2z - 6 = 0$? $\rightarrow 6/3 = 2$.
9. Pourquoi le projeté est-il le point le plus proche ? $\rightarrow$ Par Pythagore, $MN^2 = MH^2 + HN^2 \geq MH^2$.
10. Comment contrôler la droite d'intersection de deux plans ? $\rightarrow$ Son vecteur directeur est orthogonal aux deux vecteurs normaux.

Fiche : Algorithmique et programmation

FICHE • M22 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- En Python, l'indentation fait partie de la syntaxe : elle délimite les blocs des boucles, des conditions et des fonctions.
- L'affectation $a = a + 1$ calcule d'abord $a + 1$ avec l'ancienne valeur, puis range le résultat dans a .
- Les types usuels sont `int`, `float`, `bool`, `str` et `list` ; le séparateur décimal est le point.
- `//` donne le quotient euclidien, `%` le reste, `/` un quotient décimal flottant, `**` la puissance.
- La boucle `for` s'utilise quand le nombre de tours est connu ; la boucle `while` quand on répète tant qu'une condition est vraie.
- `range(a, b)` donne les entiers de a à $b - 1$; les indices d'une liste vont de 0 à `len(L) - 1`.
- Une fonction renvoie un résultat avec `return`, qui termine immédiatement son exécution ; `print` ne fait qu'afficher.
- Une liste en compréhension s'écrit `[expression for x in L if condition]`.
- Un algorithme de seuil utilise une boucle `while` dont la condition est la négation de la condition d'arrêt.
- La dichotomie s'applique à une fonction continue qui change de signe sur $[a ; b]$: à chaque étape, l'intervalle est divisé par 2.
- Après n étapes de dichotomie, l'amplitude de l'encadrement vaut $(b - a)/2^n$.
- La méthode d'Euler approche la solution de $y' = F(x, y)$ par $y_{k+1} = y_k + h \times F(x_k, y_k)$ et $x_{k+1} = x_k + h$.
- Plus le pas h est petit, meilleure est l'approximation d'Euler, au prix de plus d'étapes.
- Le test `random() < p` simule un événement de probabilité p ; `randint(a, b)` inclut a et b .
- La fréquence observée sur n simulations se rapproche de la probabilité quand n grandit.
- Pour lire un algorithme, on dresse un tableau d'état des variables après chaque passage.



Formules et définitions à connaître

Outil	Écriture	À retenir
Somme par accumulation	$s = 0$ puis $s = s + \text{terme dans la boucle}$	initialiser à 0 (produit : à 1)
Parité	$n \% 2 == 0$	<code>==</code> teste, <code>=</code> affecte
Seuil	<code>while u < S</code> : mise à jour de u et de n	u et n avancent ensemble
Dichotomie	$m = (a + b)/2$; si $f(a) \times f(m) \leq 0$ alors $b = m$, sinon $a = m$	f continue, changement de signe
Nombre d'étapes	plus petit n tel que $(b - a)/2^n \leq e$	10 étapes pour 10^{-3} sur $[0 ; 1]$
Euler	$y_{k+1} = y_k + h \times F(x_k, y_k)$	nouveau y avec l'ancien x
Simulation	<code>random() < p</code>	vrai avec probabilité p
Fluctuation	$[p - 1/\sqrt{n} ; p + 1/\sqrt{n}]$	environ 95 % des échantillons, n grand

Pièges à éviter

- `range(1, n)` s'arrête à $n - 1$, et un parcours qui commence à l'indice 1 oublie le premier élément.
- Un `return` placé dans une boucle l'interrompt dès le premier passage.
- Une boucle `while` dont la variable testée n'est pas modifiée ne s'arrête jamais.
- Un `maximum` s'initialise au premier élément de la liste, pas à 0.
- Dans Euler, avancer x avant de calculer y fausse le calcul.
- On ne teste pas l'égalité de deux flottants : $0.1 + 0.2$ ne vaut pas exactement 0.3 en machine.

Je me teste

1. Que valent $17 // 5$ et $17 \% 5$? $\rightarrow 3$ et 2.
2. Quels entiers donne `range(2, 6)` ? $\rightarrow 2, 3, 4, 5$.
3. Que vaut `L[0]` pour `L = [4, 7, 1]` ? $\rightarrow 4$.
4. Quelle boucle pour un seuil ? $\rightarrow$ Une boucle `while`.
5. Différence entre `print` et `return` ? $\rightarrow$ `print` affiche, `return` transmet le résultat et termine la fonction.
6. Que donne `[k ** 2 for k in range(1, 4)]` ? $\rightarrow [1, 4, 9]$.
7. Combien d'étapes de dichotomie pour 10^{-3} sur un intervalle de longueur 1 ? $\rightarrow 10$, car $2^{10} = 1024$.
8. Relation d'Euler pour $y' = y$ avec un pas h ? $\rightarrow y_{k+1} = (1 + h) \times y_k$.
9. Que vaut $1,1^{10}$, approximation d'Euler de e avec $h = 0,1$? $\rightarrow$ Environ 2,594.
10. Comment simuler un événement de probabilité 0,3 ? $\rightarrow$ Tester `random() < 0.3`.