

Second degré

COURS • M01 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Reconnaître une fonction polynôme du second degré et identifier ses coefficients a , b et c .
- Passer d'une forme à l'autre : forme développée, forme canonique, forme factorisée.
- Déterminer la forme canonique par la méthode de complétion du carré ou par le calcul de α et β .
- Calculer le discriminant et en déduire le nombre et la valeur des racines d'un trinôme.
- Utiliser la somme et le produit des racines pour contrôler un calcul, trouver une racine manquante ou deux nombres de somme et de produit donnés.
- Dresser le tableau de signes d'un trinôme et résoudre une inéquation du second degré.
- Résoudre une équation qui se ramène au second degré (changement de variable, équation bicarrée, équation avec paramètre).
- Tracer l'allure d'une parabole à partir de son sommet, de son axe de symétrie et de ses éventuelles intersections avec l'axe des abscisses.
- Modéliser une situation concrète (aire, trajectoire, coût) par une fonction du second degré et en chercher l'extremum.

Cours

1. Fonction polynôme du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme du second degré**) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$. Cette écriture s'appelle la **forme développée** de f . Les nombres a , b et c sont les **coefficients** du trinôme ; c s'appelle aussi le terme constant.

La condition $a \neq 0$ est essentielle : si $a = 0$, la fonction devient $x \mapsto bx + c$, qui est affine, et sa courbe est une droite.

Exemples : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ($a = 3, b = -2, c = 1$) ; $g(x) = -x^2 + 4$ ($a = -1, b = 0, c = 4$) ; $h(x) = (x - 1)(2x + 3)$ est aussi du second degré, puisqu'en développant on obtient $h(x) = 2x^2 + x - 3$.

Un même trinôme peut s'écrire de plusieurs façons. Chaque forme sert à quelque chose :

Forme	Écriture	Ce qu'elle donne immédiatement
Développée	$ax^2 + bx + c$	l'image de 0 (c'est c), le coefficient a
Canonique	$a(x - \alpha)^2 + \beta$	le sommet $S(\alpha ; \beta)$, les variations, l'extremum
Factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	les racines, le signe

Savoir choisir la bonne forme selon la question posée est l'essentiel de ce chapitre.

2. Forme canonique

Propriété. Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) peut s'écrire de manière unique sous la forme

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$.

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f .

Démonstration (complétion du carré). Comme $a \neq 0$, on factorise par a :

$$f(x) = a[x^2 + (b/a)x + c/a].$$

On reconnaît dans $x^2 + (b/a)x$ le début du carré $(x + b/(2a))^2 = x^2 + (b/a)x + b^2/(4a^2)$. Donc $x^2 + (b/a)x = (x + b/(2a))^2 - b^2/(4a^2)$. En remplaçant :

$$f(x) = a[(x + b/(2a))^2 - b^2/(4a^2) + c/a] = a(x + b/(2a))^2 - b^2/(4a) + c.$$

On pose $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = c - b^2/(4a) = -(b^2 - 4ac)/(4a)$. On obtient bien $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. En remplaçant x par α , le carré s'annule et $f(\alpha) = \beta$.

En pratique, on retient seulement $\alpha = -b/(2a)$, puis on calcule $\beta = f(\alpha)$.

Exemple : $f(x) = x^2 - 4x + 7$. On a $\alpha = -(-4)/(2 \times 1) = 2$ et $\beta = f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$. Donc $f(x) = (x - 2)^2 + 3$.

Vérification en développant : $(x - 2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7$.

On peut aussi compléter le carré directement : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, donc $f(x) = (x - 2)^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3$.

3. Variations et parabole

Propriété. Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Elle admet un **minimum** égal à β , atteint en $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty ; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Elle admet un **maximum** égal à β , atteint en $x = \alpha$.

Justification pour $a > 0$. Pour tout réel x , $(x - \alpha)^2 \geq 0$, donc $a(x - \alpha)^2 \geq 0$ et $f(x) \geq \beta$, avec égalité seulement pour $x = \alpha$: β est bien le minimum. Soient maintenant $u < v$ deux réels de $[\alpha ; +\infty[$. Alors $0 \leq u - \alpha < v - \alpha$, et la fonction carré étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, $(u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2$. En multipliant par $a > 0$ puis en ajoutant β , on obtient $f(u) < f(v)$: f est strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Le raisonnement est symétrique sur $]-\infty ; \alpha]$, où $u - \alpha < v - \alpha \leq 0$ donne $(u - \alpha)^2 > (v - \alpha)^2$. Pour $a < 0$, la multiplication par a

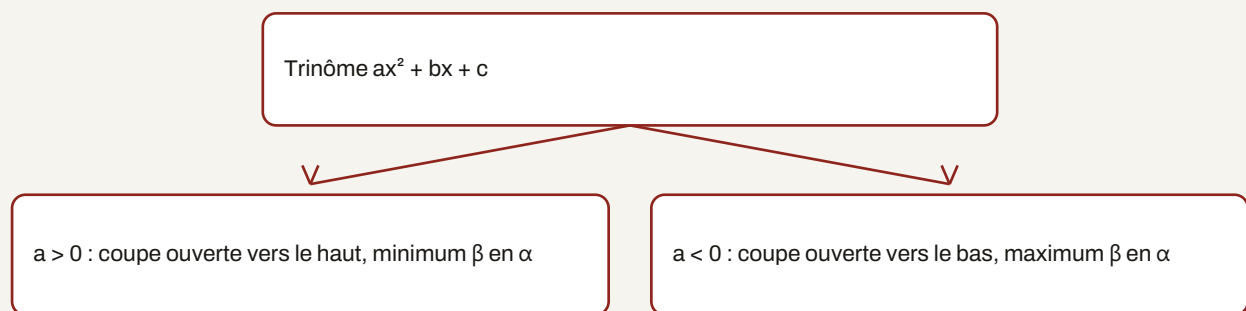
renverse les inégalités.

La parabole. Dans un repère, la courbe représentative d'un trinôme est une **parabole**.

- Son **sommet** est le point $S(\alpha ; \beta)$.
- Elle admet pour **axe de symétrie** la droite verticale d'équation $x = \alpha$. En effet, $f(\alpha + h) = ah^2 + \beta = f(\alpha - h)$ pour tout réel h : deux points de même hauteur sont symétriques par rapport à cette droite.
- Elle est « tournée vers le haut » (en forme de coupe) si $a > 0$, « tournée vers le bas » si $a < 0$.
- Plus $|a|$ est grand, plus la parabole est resserrée autour de son axe.
- Elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0 ; c)$.

Conséquence pratique : si l'on connaît deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors α est leur milieu, $\alpha = (x_1 + x_2)/2$. C'est une façon rapide de trouver l'axe de symétrie à partir des racines.

Allure de la parabole selon a



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

4. Discriminant et racines

On appelle **racine** du trinôme f tout réel x tel que $f(x) = 0$. Graphiquement, les racines sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Définition. Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème.

- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **deux solutions distinctes** : $x_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $x_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$.
- Si $\Delta = 0$, elle admet **une solution unique** (dite racine double) : $x_0 = -b/(2a)$.
- Si $\Delta < 0$, elle **n'admet aucune solution réelle**.

Démonstration. D'après le calcul de la partie 2, $f(x) = a[(x + b/(2a))^2 - \Delta/(4a^2)]$. Comme $a \neq 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $(x + b/(2a))^2 = \Delta/(4a^2)$.

- Si $\Delta < 0$, le membre de droite est strictement négatif alors qu'un carré est positif ou nul : aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, on obtient $(x + b/(2a))^2 = 0$, donc $x = -b/(2a)$.

- Si $\Delta > 0$, $\Delta/(4a^2) = (\sqrt{\Delta}/(2a))^2$, donc $x + b/(2a) = \sqrt{\Delta}/(2a)$ ou $x + b/(2a) = -\sqrt{\Delta}/(2a)$, ce qui donne les deux formules.

Interprétation graphique : $\Delta > 0$, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points ; $\Delta = 0$, elle lui est tangente en son sommet (alors $\beta = 0$) ; $\Delta < 0$, elle ne le rencontre pas. Le lien vient de la formule $\beta = -\Delta/(4a)$: par exemple si $a > 0$ et $\Delta < 0$, le minimum β est strictement positif, la parabole reste au-dessus de l'axe.

Avant toute formule, regarde si une méthode plus rapide existe : facteur commun ($2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$), identité remarquable ($x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$), racine évidente. Le discriminant est la méthode universelle, pas toujours la plus courte.

Cas particuliers fréquents :

- $b = 0$: $ax^2 + c = 0$ donne $x^2 = -c/a$, qui a des solutions seulement si $-c/a \geq 0$.
- $c = 0$: $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$ donne $x = 0$ ou $x = -b/a$.

5. Forme factorisée

Propriété.

- Si $\Delta > 0$, pour tout réel x : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, pour tout réel x : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, f ne peut pas s'écrire comme produit de facteurs du premier degré.

Justification. Si $\Delta > 0$, en reprenant $f(x) = a[(x + b/(2a))^2 - (\sqrt{\Delta}/(2a))^2]$ et l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, on obtient $f(x) = a(x + b/(2a) - \sqrt{\Delta}/(2a))(x + b/(2a) + \sqrt{\Delta}/(2a)) = a(x - x_2)(x - x_1)$. Le cas $\Delta = 0$ est immédiat. Si $\Delta < 0$, une factorisation $a(x - r)(x - s)$ donnerait des racines r et s , ce qui est impossible.

Ne jamais oublier le coefficient a devant les parenthèses : $2x^2 - 2x - 4$ a pour racines -1 et 2 , et vaut $2(x + 1)(x - 2)$, pas $(x + 1)(x - 2)$.

6. Somme et produit des racines

Propriété. Si $\Delta \geq 0$ et si x_1 et x_2 sont les racines (éventuellement confondues) de $ax^2 + bx + c$, alors

$$S = x_1 + x_2 = -b/a \text{ et } P = x_1 \times x_2 = c/a.$$

Démonstration. $x_1 + x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a) + (-b + \sqrt{\Delta})/(2a) = -2b/(2a) = -b/a$. Pour le produit, $(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta}) = b^2 - \Delta = b^2 - (b^2 - 4ac) = 4ac$, donc $x_1 x_2 = 4ac/(4a^2) = c/a$.

On peut aussi le voir en développant $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2$ et en identifiant avec $ax^2 + bx + c$.

Utilisations.

- **Racine évidente.** Si l'on remarque que 1 est racine de $3x^2 + 5x - 8$ (car $3 + 5 - 8 = 0$), le produit des racines vaut $-8/3$, donc l'autre racine est $-8/3$. Plus généralement, 1 est racine si $a + b + c = 0$ et -1 est racine si $a - b + c = 0$.
- **Deux nombres de somme S et de produit P .** Ce sont les solutions, si elles existent, de l'équation $X^2 - SX + P = 0$. Par exemple, deux nombres de somme 7 et de produit 12 sont solutions de $X^2 - 7X + 12 = 0$, c'est-à-dire 3 et 4 .
- **Contrôle.** Après avoir calculé deux racines, vérifier S et P détecte la plupart des erreurs de calcul.

- **Signes des racines sans les calculer.** Si $P < 0$, les racines sont de signes contraires. Si $P > 0$, elles ont le même signe, celui de S .

7. Signe du trinôme

Théorème.

- Si $\Delta > 0$ (racines $x_1 < x_2$) : $f(x)$ est du **signe de a à l'extérieur des racines** (pour $x < x_1$ ou $x > x_2$), du **signe contraire de a entre les racines**, et nul en x_1 et x_2 .
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$, et nul en x_0 .
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est **strictement du signe de a** pour tout réel x .

Justification. Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Pour $x < x_1$, les deux facteurs $(x - x_1)$ et $(x - x_2)$ sont négatifs, leur produit est positif et $f(x)$ a le signe de a . Entre x_1 et x_2 , un facteur est positif et l'autre négatif. Au-delà de x_2 , les deux sont positifs. Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec un carré positif. Si $\Delta < 0$, $f(x) = a[(x - \alpha)^2 + (-\Delta)/(4a^2)]$ et le crochet est strictement positif.

Tableau de signes pour $\Delta > 0$ et $a > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Moyen mnémotechnique graphique : on dessine rapidement la parabole (coupe vers le haut si $a > 0$) et on lit où elle est au-dessus ou au-dessous de l'axe.

8. Équations et inéquations du second degré

Méthode générale pour une inéquation.

1. Tout passer dans un seul membre pour se ramener à $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) \leq 0$, avec f trinôme.
2. Calculer Δ et les racines éventuelles.
3. Dresser le tableau de signes (règle du signe de a).
4. Lire l'ensemble des solutions, en faisant attention aux crochets : les racines sont incluses pour $\geq$ et $\leq$, exclues pour $>$ et $<$.

Exemple : $x^2 < 4x \iff x^2 - 4x < 0 \iff x(x - 4) < 0$. Les racines sont 0 et 4, $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines : $S =]0 ; 4[$.

Équations qui se ramènent au second degré.

- **Équation bicarrée** $ax^4 + bx^2 + c = 0$: on pose $X = x^2$ (avec $X \geq 0$), on résout $aX^2 + bX + c = 0$, puis on revient à x en ne gardant que les X positifs ou nuls.
- **Équation avec quotient** : on écrit les conditions d'existence (dénominateurs non nuls), on réduit au même dénominateur, puis on résout le numérateur égal à 0 en éliminant les valeurs interdites.
- **Intersection de deux courbes** : les abscisses des points communs à $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont les solutions de $f(x) = g(x)$. La position relative se lit sur le signe de $f(x) - g(x)$.

Équations avec paramètre. Lorsque les coefficients dépendent d'un réel m , le nombre de solutions dépend du signe de Δ , qui est lui-même une expression en m . On étudie donc le signe de $\Delta(m)$, parfois

lui-même un trinôme en m . Attention au cas où le coefficient de x^2 s'annule pour une valeur de m : l'équation n'est alors plus du second degré et se traite à part.

Résoudre une inéquation du second degré

1. tout ramener à $f(x)$ comparé à 0 • 2. calculer Δ • 3. trouver les racines • 4. appliquer la règle du signe de a • 5. lire l'intervalle avec les bons crochets

Exemples résolus

Exemple 1 : les trois formes d'un trinôme

Énoncé. Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$. a) Déterminer la forme canonique de f et en déduire son tableau de variations. b) Déterminer la forme factorisée de f . c) Contrôler les racines avec la somme et le produit.

Résolution. a) Ici $a = 2$, $b = -12$, $c = 10$. On calcule $\alpha = -b/(2a) = 12/4 = 3$, puis $\beta = f(3) = 2 \times 9 - 12 \times 3 + 10 = 18 - 36 + 10 = -8$. Donc $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$. Comme $a = 2 > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 3]$ et strictement croissante sur $[3 ; +\infty[$; son minimum est -8 , atteint en $x = 3$. Le sommet de la parabole est $S(3 ; -8)$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 80 = 64 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 8$. Les racines sont $x_1 = (12 - 8)/4 = 1$ et $x_2 = (12 + 8)/4 = 5$. Donc $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$.

On pouvait aussi partir de la forme canonique : $2(x - 3)^2 - 8 = 2[(x - 3)^2 - 4] = 2(x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = 2(x - 5)(x - 1)$.

c) $S = 1 + 5 = 6$ et $-b/a = 12/2 = 6$. $P = 1 \times 5 = 5$ et $c/a = 10/2 = 5$. Les deux contrôles sont bons. On remarque aussi que $\alpha = 3$ est bien le milieu de 1 et 5.

Bilan : $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8 = 2(x - 1)(x - 5)$, **minimum -8 en $x = 3$.**

Exemple 2 : une inéquation avec a négatif

Énoncé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + x + 6 \geq 0$.

Résolution. On étudie le signe de $g(x) = -x^2 + x + 6$, avec $a = -1$, $b = 1$, $c = 6$. $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 5$. $x_1 = (-1 - 5)/(2 \times (-1)) = (-6)/(-2) = 3$ et $x_2 = (-1 + 5)/(-2) = 4/(-2) = -2$. Contrôle : somme $3 + (-2) = 1 = -b/a = -1/(-1)$; produit $-6 = c/a = 6/(-1)$. Correct. Comme $a = -1 < 0$, $g(x)$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
g(x)		-	0	+	0	-	

On veut $g(x) \geq 0$, racines comprises : $S = [-2 ; 3]$.

Exemple 3 : un problème de rectangle

Énoncé. Un rectangle a un périmètre de 20 cm. a) On note x la longueur d'un côté. Exprimer l'aire $A(x)$ en fonction de x et préciser l'intervalle de x . b) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Que vaut-elle ? c) Déterminer les dimensions du rectangle lorsque son aire vaut 21 cm^2 .

Résolution. a) Le demi-périmètre vaut 10 cm, donc l'autre côté mesure $10 - x$. Pour que les deux longueurs soient strictement positives, $x \in]0 ; 10[$. Alors $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.

b) A est un trinôme avec $a = -1 < 0$: il admet un maximum en $\alpha = -b/(2a) = -10/(-2) = 5$, qui appartient bien à $]0 ; 10[$. $A(5) = 5 \times 5 = 25$. **L'aire est maximale pour $x = 5$ cm : c'est un carré de 25 cm^2 .**

c) On cherche x tel que $-x^2 + 10x = 21$, soit $x^2 - 10x + 21 = 0$. On cherche deux nombres de somme 10 et de produit 21 : ce sont 3 et 7. Vérification par le discriminant : $\Delta = 100 - 84 = 16$, $x = (10 \pm 4)/2$, soit 3 ou 7. Les deux valeurs sont dans $]0 ; 10[$ et donnent le même rectangle. **Le rectangle mesure 3 cm sur 7 cm.**

Méthodes et pièges

- Pour trouver le sommet, calcule $\alpha = -b/(2a)$ puis $\beta = f(\alpha)$: c'est plus sûr que la formule $\beta = -\Delta/(4a)$, qu'on retient mal.
- Avant d'appliquer le discriminant, cherche une factorisation directe (facteur commun, identité remarquable, racine évidente) : tu gagnes du temps et tu limites les erreurs.
- Attention aux signes dans $\Delta = b^2 - 4ac$: si b est négatif, b^2 reste positif ; si a et c sont de signes contraires, $-4ac$ est positif et Δ est forcément strictement positif.
- Dans les formules des racines, le dénominateur est $2a$, pas 2 : avec $a = -1$, le dénominateur vaut -2 .
- N'oublie jamais le coefficient a dans la forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Contrôle systématiquement tes racines avec $S = -b/a$ et $P = c/a$, en une ligne.
- Pour une inéquation, tout doit être d'un seul côté, comparé à 0. Ne divise jamais par une expression en x dont tu ne connais pas le signe : $2x^2 \geq 6x$ n'équivaut pas à $x \geq 3$ (tu perdrais les x négatifs).
- Lis bien le sens des crochets : inégalité large, racines incluses ; inégalité stricte, racines exclues ; vers l'infini, crochet toujours ouvert.
- $\Delta < 0$ ne veut pas dire « pas de solution » pour une inéquation : $f(x) > 0$ a pour solution $\mathbb{R}$ tout entier si $a > 0$, et aucune solution si $a < 0$.
- Dans une équation avec paramètre, examine à part la valeur qui annule le coefficient de x^2 .

Vers le PASS

En PASS, le second degré n'est plus un chapitre mais un réflexe de calcul. Il revient partout : quand on étudie le signe d'une dérivée qui est un trinôme, quand on résout une équation d'équilibre en chimie (calcul d'un avancement ou d'une concentration à partir d'une constante d'équilibre, qui mène très souvent à une équation du second degré dont on ne garde que la racine physiquement acceptable), en physique pour le mouvement d'un projectile ou l'énergie, et en biostatistique dans des calculs d'intervalles. Les QCM chronométrés exigent de reconnaître immédiatement une racine évidente, d'utiliser la somme et le produit pour éliminer des propositions sans tout recalculer, et de trier les solutions selon leur sens (une concentration négative est à rejeter).

Le calcul algébrique sûr, rapide et contrôlé (factoriser, développer, manipuler des fractions, vérifier un ordre de grandeur) est la base de tout l'enseignement quantitatif du PASS.

Suite en PASS : Unités, proportions et calcul algébrique

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Déterminer la forme canonique de $f(x) = x^2 + 6x + 5$, puis donner les coordonnées du sommet de sa parabole et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 5x - 2 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$, puis factoriser le trinôme.
4. Étudier le signe de $g(x) = -2x^2 + 3x - 5$ sur $\mathbb{R}$.
5. Sans calculer de discriminant, factoriser $x^2 - x - 12$ en cherchant deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.
a) Déterminer la forme canonique de f . b) Déterminer la forme factorisée de f . c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. d) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 5$.
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) $2x^2 + x - 6 < 0$; b) $x^2 > 2x + 3$.
8. On considère, pour un réel m , l'équation (E) : $x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$.
a) Exprimer le discriminant de (E) en fonction de m . b) Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle une solution unique ? Donner cette solution dans chaque cas. c) Pour quelles valeurs de m l'équation n'admet-elle aucune solution ?
9. Dans un repère, on considère la parabole P d'équation $y = x^2 - 3x + 1$ et la droite D d'équation $y = x - 2$.
a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P et D . b) Étudier la position relative de P et D .
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Niveau 3 : vers le PASS

11. Une balle est lancée verticalement. Sa hauteur, en mètres, t secondes après le lancer, est modélisée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.
a) À quel instant la hauteur est-elle maximale ? Quelle est cette hauteur ? b) À quels instants la balle est-elle à 16 m de hauteur ? c) À quel instant la balle touche-t-elle le sol ? Donner une valeur arrondie au centième.
12. On note x_1 et x_2 les racines de $2x^2 - 7x + 4 = 0$.
a) Justifier que ces racines existent, puis déterminer leur signe sans les calculer. b) Calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 . c) En déduire, sans calculer les racines, la valeur de $x_1^2 + x_2^2$ puis celle de $1/x_1 + 1/x_2$.
13. Déterminer l'ensemble des réels m tels que, pour tout réel x , $mx^2 + 4x + m > 0$.
14. Un éleveur dispose de 40 m de clôture pour fermer un enclos rectangulaire adossé à un mur (le côté le long du mur n'est pas clôturé). On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés

perpendiculaires au mur.

a) Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x et préciser l'intervalle de x . b) Déterminer l'aire maximale et les dimensions correspondantes. c) Pour quelles valeurs de x l'aire est-elle au moins égale à 150 m^2 ?

Corrigés

1. Ici $\alpha = -b/(2a) = -6/2 = -3$ et $\beta = f(-3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Donc $f(x) = (x + 3)^2 - 4$. Vérification : $(x + 3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5$. Le sommet est $S(-3 ; -4)$; comme $a = 1 > 0$, c'est un **minimum** : $f(x) \geq -4$ pour tout x .

2. $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$. $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$. $x_1 = (5 - 7)/6 = -2/6 = -1/3$ et $x_2 = (5 + 7)/6 = 2$. Contrôle : somme $-1/3 + 2 = 5/3 = -b/a$; produit $-2/3 = c/a$. $S = \{-1/3 ; 2\}$.

3. $\Delta = 144 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$. Racine double $x_0 = -b/(2a) = 12/8 = 3/2$. $S = \{3/2\}$ et $4x^2 - 12x + 9 = 4(x - 3/2)^2 = (2x - 3)^2$. On reconnaissait d'ailleurs l'identité remarquable $(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$.

4. $a = -2$, $b = 3$, $c = -5$. $\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times (-5) = 9 - 40 = -31 < 0$. Le trinôme n'a pas de racine et garde le signe de a , qui est négatif. $g(x) < 0$ pour tout réel x .

5. Si x_1 et x_2 sont les racines, $x_1 + x_2 = -b/a = 1$ et $x_1 x_2 = c/a = -12$. Deux nombres de somme 1 et de produit -12 : 4 et -3 ($4 - 3 = 1$ et $4 \times (-3) = -12$). Comme $a = 1$, $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$. Vérification : $(x - 4)(x + 3) = x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - x - 12$.

6. a) $a = -1$, $\alpha = -4/(-2) = 2$, $\beta = f(2) = -4 + 8 + 5 = 9$. $f(x) = -(x - 2)^2 + 9$.

b) $\Delta = 16 - 4 \times (-1) \times 5 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$. $x_1 = (-4 - 6)/(-2) = 5$, $x_2 = (-4 + 6)/(-2) = -1$. $f(x) = -(x + 1)(x - 5)$. Contrôle : $-(x + 1)(x - 5) = -(x^2 - 4x - 5) = -x^2 + 4x + 5$. c) Comme $a = -1 < 0$: **f est strictement croissante sur $]-\infty ; 2]$, strictement décroissante sur $[2 ; +\infty[$, maximum 9 en $x = 2$** . d) $f(x) \geq 5 \iff -x^2 + 4x \geq 0 \iff x(4 - x) \geq 0$. Le trinôme $-x^2 + 4x$ a pour racines 0 et 4 et $a = -1 < 0$: il est positif entre ses racines. $S = [0 ; 4]$.

7. a) $\Delta = 1 + 48 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, racines $(-1 - 7)/4 = -2$ et $(-1 + 7)/4 = 3/2$. $a = 2 > 0$: le trinôme est négatif strictement entre ses racines. $S =]-2 ; 3/2[$.

b) $x^2 > 2x + 3 \iff x^2 - 2x - 3 > 0$. Racine évidente -1 ($1 + 2 - 3 = 0$), produit $c/a = -3$ donc l'autre racine est 3. $a = 1 > 0$: positif à l'extérieur des racines. $S =]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

8. a) $\Delta = (m - 1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = (m - 1)^2 - 4$.

b) Solution unique $\iff \Delta = 0 \iff (m - 1)^2 = 4 \iff m - 1 = 2$ ou $m - 1 = -2 \iff m = 3$ ou $m = -1$. La solution vaut alors $x_0 = -(m - 1)/2$. Pour $m = 3$: $x_0 = -1$ (l'équation est $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$). Pour $m = -1$: $x_0 = 1$ (l'équation est $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$). **$m = 3$ avec $x = -1$, ou $m = -1$ avec $x = 1$** . c) Aucune solution $\iff (m - 1)^2 < 4 \iff -2 < m - 1 < 2 \iff -1 < m < 3$, soit $m \in]-1 ; 3[$.

9. a) Les abscisses communes vérifient $x^2 - 3x + 1 = x - 2$, soit $x^2 - 4x + 3 = 0$. Racine évidente 1 ($1 - 4 + 3 = 0$), produit 3 donc l'autre racine est 3. Ordonnées (sur D) : pour $x = 1$, $y = -1$; pour $x = 3$, $y = 1$.

Vérification sur P : $1 - 3 + 1 = -1$ et $9 - 9 + 1 = 1$. **Points d'intersection : (1 ; -1) et (3 ; 1)**.

b) On étudie $d(x) = (x^2 - 3x + 1) - (x - 2) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, positif à l'extérieur de $[1 ; 3]$ ($a = 1 > 0$). **P est au-dessus de D sur $]-\infty ; 1[$ et $]3 ; +\infty[$, en dessous sur $]1 ; 3[$.**

10. On pose $X = x^2$, avec $X \geq 0$. L'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$. Racine évidente 1, produit 4 donc l'autre racine est 4. Les deux valeurs sont positives. $x^2 = 1$ donne $x = -1$ ou $x = 1$; $x^2 = 4$ donne $x = -2$ ou $x = 2$. $S = \{-2 ; -1 ; 1 ; 2\}$.

11. a) h est un trinôme avec $a = -5 < 0$: maximum en $t = -20/(2 \times (-5)) = 2$ s. $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$.

Hauteur maximale 21 m, atteinte à $t = 2$ s.

b) $-5t^2 + 20t + 1 = 16 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 15 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$ (division par -5). Racines 1 et 3 (somme 4, produit 3). **La balle est à 16 m à $t = 1$ s (en montant) et $t = 3$ s (en descendant).** On retrouve la symétrie autour de $t = 2$. c) $-5t^2 + 20t + 1 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 20t - 1 = 0$. $\Delta = 400 + 20 = 420$, $\sqrt{420} \approx 20,494$. Racines $(20 - 20,494)/10 \approx -0,05$ (à rejeter, $t \geq 0$) et $(20 + 20,494)/10 \approx 4,049$. **La balle touche le sol à $t \approx 4,05$ s.**

12. a) $\Delta = 49 - 32 = 17 > 0$: deux racines distinctes. Leur produit $c/a = 4/2 = 2$ est positif, elles ont donc le même signe, celui de leur somme $7/2 > 0$. **Les deux racines sont strictement positives.**

b) $x_1 + x_2 = -b/a = 7/2$ et $x_1 x_2 = c/a = 2$. c) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 49/4 - 4 = 49/4 - 16/4 = 33/4$. Et $1/x_1 + 1/x_2 = (x_1 + x_2)/(x_1 x_2) = (7/2)/2 = 7/4$.

13. Si $m = 0$, l'expression vaut $4x$, qui n'est pas strictement positive pour $x = -1$: $m = 0$ ne convient pas.

Si $m \neq 0$, on a un trinôme. Il est strictement positif pour tout x si et seulement s'il n'a pas de racine ($\Delta < 0$) et si son coefficient de x^2 est positif ($m > 0$). $\Delta = 16 - 4m^2$, donc $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow m < -2$ ou $m > 2$. Avec $m > 0$, il reste $m > 2$. **L'ensemble cherché est $]2 ; +\infty[$.**

14. a) Les deux côtés perpendiculaires mesurent x et le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$. Il faut $x > 0$ et $40 - 2x > 0$, donc $x \in]0 ; 20[$. $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.

b) $a = -2 < 0$: maximum en $x = -40/(2 \times (-2)) = 10$. $A(10) = 10 \times 20 = 200$. **Aire maximale 200 m^2 , pour des côtés de 10 m et un côté de 20 m le long du mur.** c) $-2x^2 + 40x \geq 150 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 150 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 \leq 0$ (division par -2 , qui renverse l'inégalité). $\Delta = 400 - 300 = 100$, racines $(20 - 10)/2 = 5$ et $(20 + 10)/2 = 15$. Le trinôme $x^2 - 20x + 75$ est négatif entre ses racines. **L'aire est au moins 150 m^2 pour $x \in [5 ; 15]$.**

Suites numériques : généralités, arithmétiques et géométriques

COURS • M02 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer des termes d'une suite définie de façon explicite ou par une relation de récurrence.
- Représenter graphiquement une suite par un nuage de points et interpréter ce graphique.
- Étudier le sens de variation d'une suite par le signe de $u(n+1) - u(n)$, par le quotient $u(n+1)/u(n)$ ou par les variations d'une fonction.
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, déterminer sa raison et son premier terme.
- Exprimer le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique en fonction de n .
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Modéliser une évolution à accroissements constants (arithmétique) ou à taux constant (géométrique).
- Conjecturer le comportement d'une suite quand n devient grand (limite finie, infinie, absence de limite).
- Écrire et comprendre un algorithme qui calcule un terme, une somme ou un seuil.

Cours

1. Définition et modes de génération

Une **suite numérique** u est une fonction qui, à tout entier naturel n (éventuellement à partir d'un certain rang), associe un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n , appelé **terme de rang n** ou terme d'indice n . La suite elle-même se note u ou (u_n) . Il ne faut pas confondre la suite (u_n) , qui est un objet entier, et le nombre u_n , qui est un de ses termes.

Le terme qui suit u_n est $u(n+1)$; celui qui le précède est $u(n-1)$. Attention : $u(n+1)$ n'est pas $u_n + 1$. Le premier est le terme suivant, le second est le terme u_n augmenté de 1.

Il existe deux grands modes de génération au programme.

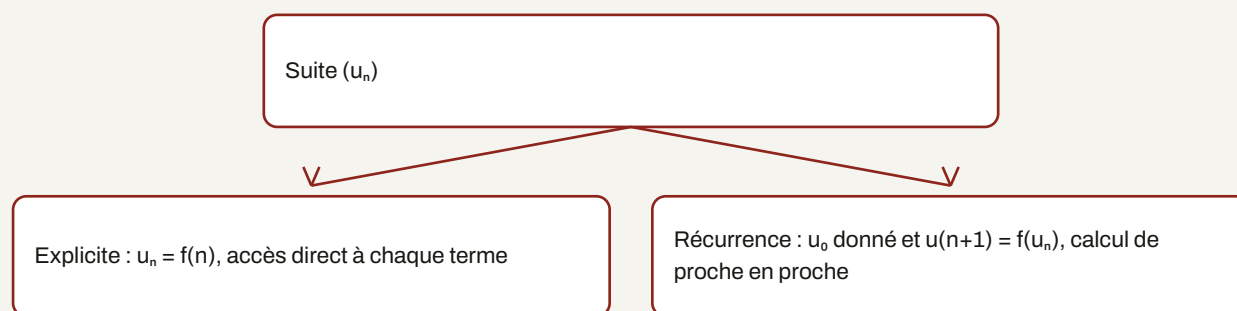
Mode explicite. On donne u_n directement en fonction de n : $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$. Par exemple $u_n = 3n^2 - 1$. On calcule n'importe quel terme directement : $u_{100} = 3 \times 100 - 1 = 299$.

Mode par récurrence. On donne le premier terme et une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent : $u_0 = 2$ et $u(n+1) = f(u_n)$. Par exemple $u_0 = 2$ et $u(n+1) = 3u_n - 1$. On obtient $u_1 = 3 \times 2 - 1 = 5$, $u_2 = 3 \times 5 - 1 = 14$, $u_3 = 41$. Pour calculer u_{100} , il faut en principe calculer tous les termes précédents : c'est là qu'un algorithme devient utile.

Une même suite peut parfois être décrite des deux façons. La suite des nombres pairs vérifie $u_n = 2n$ (explicite) et aussi $u_0 = 0$, $u(n+1) = u_n + 2$ (récurrence).

Représentation graphique. Dans un repère, une suite se représente par le nuage des points de coordonnées $(n ; u_n)$. Ce ne sont que des points isolés : on ne les relie pas, puisque la suite n'est pas définie entre deux entiers. Pour une suite $u(n+1) = f(u_n)$, on peut aussi construire les termes sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ (construction « en escalier » ou « en escargot »), qui permet de conjecturer le comportement de la suite.

Deux façons de définir une suite



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

2. Sens de variation

Définitions. Une suite (u_n) est :

- **croissante** si, pour tout n , $u(n+1) \geq u_n$;
- **strictement croissante** si, pour tout n , $u(n+1) > u_n$;
- **décroissante** si, pour tout n , $u(n+1) \leq u_n$;
- **strictement décroissante** si, pour tout n , $u(n+1) < u_n$;
- **constante** (ou stationnaire) si, pour tout n , $u(n+1) = u_n$;
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Ces propriétés peuvent n'être vraies qu'à partir d'un certain rang : on dit alors « croissante à partir du rang p ». Une suite peut aussi n'être ni croissante ni décroissante, comme $u_n = (-1)^n$ qui vaut alternativement 1 et -1.

Méthode 1 : signe de la différence. On calcule $u(n+1) - u_n$ et on étudie son signe. Si elle est positive pour tout n , la suite est croissante ; négative, décroissante. C'est la méthode la plus générale.

Exemple : $u_n = n^2 - 6n + 1$. On a $u(n+1) - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 1 - (n^2 - 6n + 1) = 2n + 1 - 6 = 2n - 5$. Cette différence est négative pour $n \leq 2$ et positive pour $n \geq 3$: la suite décroît de u_0 à u_3 puis croît à partir du rang 3.

Méthode 2 : quotient. Si tous les termes sont strictement positifs, on compare $u(n+1)/u_n$ à 1. Si le quotient est supérieur ou égal à 1 pour tout n , la suite est croissante ; s'il est inférieur ou égal à 1, elle est décroissante. Cette méthode est adaptée aux produits et aux puissances. La condition de positivité est indispensable : pour des termes négatifs, multiplier par u_n renverserait l'inégalité.

Méthode 3 : fonction associée (suites explicites). Si $u_n = f(n)$ et si f est monotone sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) a le même sens de variation que f . Par exemple $u_n = \sqrt{n+2}$ est croissante car $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est croissante. Attention : la réciproque est fautive, et cette méthode ne s'applique pas aux suites définies par récurrence ($u(n+1) = f(u_n)$ avec f croissante ne donne pas une suite croissante en général).

3. Suites arithmétiques

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout n , $u(n+1) = u_n + r$. Le réel r est la **raison** de la suite. On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre.

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u(n+1) - u_n$ et on montre que le résultat est une constante (indépendante de n). Pour démontrer qu'elle ne l'est pas, il suffit de trouver deux écarts consécutifs différents, par exemple $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Terme général. Si (u_n) est arithmétique de raison r , alors pour tout n :

$u_n = u_0 + nr$, et plus généralement $u_n = u(p) + (n - p)r$ pour tous entiers n et p .

Justification : pour passer de u_0 à u_n , on ajoute n fois la raison r .

Variations. Puisque $u(n+1) - u_n = r$: si $r > 0$, la suite est strictement croissante ; si $r < 0$, strictement décroissante ; si $r = 0$, constante.

Représentation graphique. Les points $(n ; u_0 + nr)$ sont **alignés** sur la droite d'équation $y = rx + u_0$. Une suite arithmétique modélise une **croissance linéaire** : l'augmentation absolue est la même à chaque étape.

Somme des premiers entiers. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2.$$

Démonstration : on écrit la somme S deux fois, dans un sens puis dans l'autre, et on additionne terme à terme : $S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$ $S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$ $2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1)$, car il y a n termes égaux à $n+1$.

Par exemple $1 + 2 + \dots + 100 = 100 \times 101/2 = 5\,050$.

Somme de termes consécutifs. Pour une suite arithmétique, la même idée donne :

somme = (nombre de termes) $\times$ (premier terme + dernier terme)/2.

Ainsi $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)(u_0 + u_n)/2$. Attention : de u_0 à u_n , il y a $n+1$ termes ; de $u(p)$ à u_n , il y en a $n - p + 1$.

4. Suites géométriques

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout n , $u(n+1) = q \times u_n$. Le réel q est la **raison**. On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre.

Pour démontrer qu'une suite à termes non nuls est géométrique, on montre que $u(n+1)/u_n$ est constant, ou on écrit directement $u(n+1)$ sous la forme $q \times u_n$. Pour démontrer qu'elle ne l'est pas, on trouve deux quotients consécutifs différents.

Terme général. Si (u_n) est géométrique de raison q , alors pour tout n :

$$u_n = u_0 \times q^n, \text{ et plus généralement } u_n = u(p) \times q^{n-p}.$$

Variations (cas $u_0 > 0$ et $q > 0$) :

- si $q > 1$, la suite est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, elle est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, elle est constante.

Justification : $u(n+1) - u_n = u_0 q^n (q - 1)$, du signe de $q - 1$ lorsque $u_0 > 0$ et $q > 0$. Si $u_0 < 0$, les sens sont inversés. Si $q < 0$, les termes changent de signe à chaque rang : la suite n'est pas monotone.

Évolutions en pourcentage. Augmenter une quantité de $t\%$ revient à la multiplier par $1 + t/100$; la diminuer de $t\%$ revient à la multiplier par $1 - t/100$. Une quantité qui évolue chaque année du même pourcentage est donc modélisée par une suite géométrique : c'est la **croissance exponentielle** (ou décroissance exponentielle). Par exemple, une hausse de 3% par an correspond à $q = 1,03$; une baisse de 20% à $q = 0,8$. Attention : deux hausses successives de 10% font une hausse de 21% ($1,1 \times 1,1 = 1,21$), pas de 20% .

Somme des puissances. Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier n :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q).$$

Démonstration : notons S cette somme. Alors $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. En soustrayant, presque tous les termes disparaissent : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$, et on divise par $1 - q \neq 0$. Si $q = 1$, la somme vaut simplement $n + 1$.

Somme de termes consécutifs. Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\text{somme} = (\text{premier terme}) \times (1 - q^{\text{nombre de termes}})/(1 - q).$$

$$\text{Ainsi } u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0(1 - q^{n+1})/(1 - q).$$

	Arithmétique	Géométrique
Récurrence	$u(n+1) = u_n + r$	$u(n+1) = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Entre deux rangs	$u_n = u(p) + (n - p)r$	$u_n = u(p) \times q^{n-p}$
Somme	nombre de termes $\times$ (premier + dernier)/2	premier $\times (1 - q^{\text{nombre de termes}})/(1 - q)$
Modèle	croissance linéaire	croissance exponentielle

	Arithmétique	Géométrie
Graphique	points alignés	points sur une courbe qui s'envole ou s'écrase

5. Approche intuitive de la limite

On s'intéresse au comportement des termes quand n devient très grand. En Première, cette étude est **intuitive** : on conjecture à l'aide d'un tableau de valeurs, d'un graphique ou d'un algorithme.

- On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ si ses termes finissent par dépasser n'importe quel nombre fixé, aussi grand soit-il, et restent au-dessus. Exemple : $u_n = n^2$, ou toute suite arithmétique de raison $r > 0$.
- On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ si ses termes finissent par devenir inférieurs à n'importe quel nombre fixé.
- On dit que (u_n) **converge vers un réel** ℓ si ses termes finissent par être aussi proches de ℓ qu'on le souhaite. Exemple : $u_n = 1/n$ tend vers 0 ; $u_n = 2 + 1/(n + 1)$ tend vers 2.
- Une suite peut n'avoir **aucune limite** : $u_n = (-1)^n$ oscille entre -1 et 1 sans se stabiliser.

Cas des suites géométriques q^n (conjectures admises en Première) :

- si $q > 1$, q^n tend vers $+\infty$;
- si $q = 1$, q^n vaut toujours 1 ;
- si $-1 < q < 1$, q^n tend vers 0 ;
- si $q \leq -1$, q^n n'a pas de limite.

Conséquence : si $0 < q < 1$, la somme $1 + q + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$ se rapproche de $1/(1 - q)$. Par exemple $1 + 1/2 + 1/4 + \dots$ se rapproche de 2.

Une suite arithmétique de raison $r \neq 0$ tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$. Croissance exponentielle et croissance linéaire tendent toutes deux vers $+\infty$, mais la première finit toujours par dépasser la seconde, même si elle part plus bas.

6. Algorithmes : terme, somme et seuil

Les algorithmes sont écrits en langage Python.

Calcul d'un terme d'une suite récurrente. Pour $u_0 = 2$ et $u(n+1) = 3u_n - 1$:

```
def terme(n):
    u = 2
    for k in range(n):
        u = 3 * u - 1
    return u
```

La boucle s'exécute n fois : après le passage k , la variable u contient $u(k+1)$. Ainsi `terme(3)` renvoie 41.

Calcul d'une somme. Pour obtenir $u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

```
def somme(n):
    u = 2
    s = u
```



```
for k in range(n):  
    u = 3 * u - 1  
    s = s + u  
return s
```

Recherche d'un seuil. On cherche le plus petit rang n tel que u_n dépasse une valeur A . On ne connaît pas à l'avance le nombre d'étapes : on utilise une boucle « tant que ».

```
def seuil(A):  
    n = 0  
    u = 2  
    while u <= A:  
        n = n + 1  
        u = 3 * u - 1  
    return n
```

La condition de la boucle est la **négarion** de ce qu'on cherche : on continue tant que le seuil n'est pas atteint. Il faut aussi être sûr que le seuil sera atteint, sinon la boucle ne s'arrête jamais (par exemple chercher $u_n > 3$ pour une suite qui tend vers 2).

Algorithme de seuil

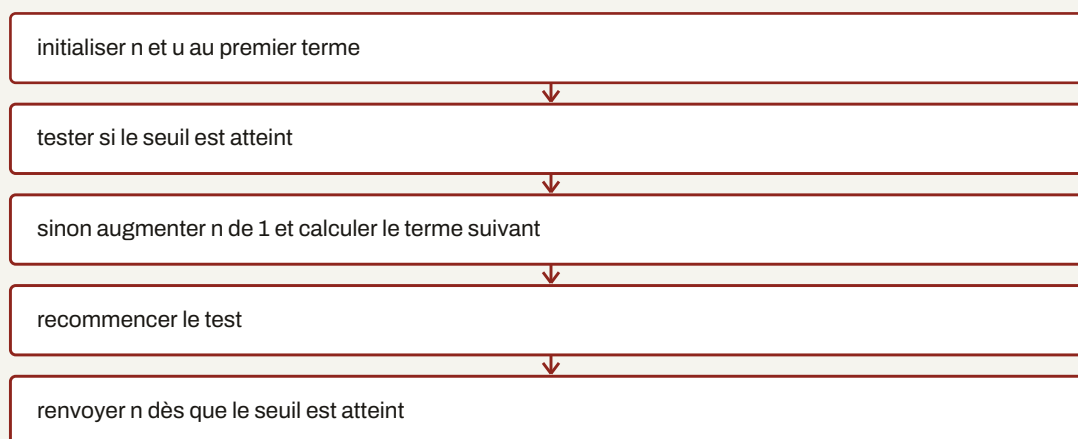


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Exemples résolus

Exemple 1 : une suite arithmétique

Énoncé. Soit $u_0 = 2$ et, pour tout n , $u(n+1) = u_n + 3$. a) Quelle est la nature de la suite ? Exprimer u_n en fonction de n . b) Calculer u_{20} . c) Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

Résolution. a) Pour tout n , $u(n+1) - u_n = 3$, constante : (u_n) est **arithmétique de raison $r = 3$** et de premier terme $u_0 = 2$. Donc $u_n = u_0 + nr = 2 + 3n$. b) $u_{20} = 2 + 3 \times 20 = 62$. c) De u_0 à u_{20} , il y a 21 termes. $S = 21 \times (u_0 + u_{20})/2 = 21 \times (2 + 62)/2 = 21 \times 32 = 672$.

Exemple 2 : une croissance bactérienne

Énoncé. Une culture contient 500 bactéries. Leur nombre augmente de 20 % par heure. On note v_n le nombre de bactéries au bout de n heures. a) Justifier que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n . b) Calculer v_5 (arrondi à l'unité). c) Déterminer au bout de combien d'heures entières la population dépasse 5 000 bactéries.

Résolution. a) Augmenter de 20 % revient à multiplier par $1 + 20/100 = 1,2$. Donc $v_{n+1} = 1,2 v_n$: la suite est **géométrique de raison $q = 1,2$** et de premier terme $v_0 = 500$. Ainsi $v_n = 500 \times 1,2^n$. b) $v_5 = 500 \times 1,2^5 = 500 \times 2,48832 = 1\,244,16$, soit **environ 1 244 bactéries**. c) Comme $v_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est strictement croissante. On cherche le plus petit n tel que $500 \times 1,2^n > 5\,000$, c'est-à-dire $1,2^n > 10$. À la calculatrice : $1,2^{12} \approx 8,916$ et $1,2^{13} \approx 10,699$. Donc $v_{12} \approx 4\,458 < 5\,000$ et $v_{13} \approx 5\,350 > 5\,000$. **La population dépasse 5 000 bactéries au bout de 13 heures.** On obtient la même réponse avec l'algorithme de seuil, en initialisant $u = 500$, en remplaçant la mise à jour par $u = 1.2 * u$ et en appelant `seuil(5000)`.

Exemple 3 : deux études de sens de variation

Énoncé. Étudier le sens de variation des suites définies pour tout n par : a) $u_n = n^2 - 6n + 1$; b) $w_n = 2^n/(n+1)$.

Résolution. a) $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 1 - n^2 + 6n - 1 = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 1 - n^2 + 6n - 1 = 2n - 5$. Pour $n \in \{0 ; 1 ; 2\}$, $2n - 5 < 0$; pour $n \geq 3$, $2n - 5 > 0$. Valeurs : $u_0 = 1$, $u_1 = -4$, $u_2 = -7$, $u_3 = -8$, $u_4 = -7$. **La suite décroît de u_0 à u_3 , puis est strictement croissante à partir du rang 3.** b) Pour tout n , $w_n > 0$: on peut utiliser le quotient. $w_{n+1}/w_n = [2^{n+1}/(n+2)] \times [(n+1)/2^n] = 2(n+1)/(n+2)$. Or $2(n+1)/(n+2) \geq 1 \iff 2n+2 \geq n+2$ (car $n+2 > 0$) $\iff n \geq 0$, ce qui est toujours vrai. **La suite (w_n) est croissante** (strictement à partir du rang 1, puisque le quotient vaut 1 pour $n = 0$: $w_0 = w_1 = 1$).

Méthodes et pièges

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, calcule $u_{n+1} - u_n$ et obtiens une constante ; pour une suite géométrique, écris $u_{n+1} = q \times u_n$. Des exemples numériques ne suffisent jamais à le prouver, mais un seul contre-exemple suffit à le réfuter.
- Compte bien les termes d'une somme : de u_0 à u_n , il y a $n+1$ termes ; de u_1 à u_n , il y en a n .
- Ne confonds pas u_{n+1} (terme suivant) avec $u_n + 1$ (terme augmenté de 1).
- Une évolution de t % se traduit par une multiplication par $1 + t/100$, pas par une addition : c'est une suite géométrique, pas arithmétique.
- La méthode du quotient exige des termes strictement positifs ; sinon, utilise la différence.
- Pour une suite explicite $u_n = f(n)$, les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ donnent celles de la suite, mais ce raccourci ne vaut pas pour une suite récurrente.
- Dans un algorithme de seuil, la condition du « tant que » est le contraire de l'objectif : pour chercher $u_n > A$, on boucle tant que $u \leq A$.
- Pour un seuil, vérifie toujours les deux rangs encadrants (celui qui ne suffit pas et celui qui suffit) et réponds par un entier, avec une phrase dans l'unité du problème.
- Une limite se conjecture en Première : écris « il semble que la suite tende vers... », en t'appuyant sur des valeurs ou un graphique.

Vers le PASS

Les suites géométriques sont la version discrète de la croissance et de la décroissance exponentielles, omniprésentes en santé : dilutions successives au laboratoire (chaque dilution au dixième multiplie la concentration par 0,1), décroissance radioactive en médecine nucléaire comptée en demi-vies (la quantité est multipliée par 1/2 à chaque période), élimination d'un médicament dont une fraction fixe disparaît à chaque intervalle, croissance d'une population cellulaire. Les doses répétées d'un traitement mènent à des suites de la forme $u(n+1) = q u_n + d$, dont l'étude passe par une suite géométrique auxiliaire, et la somme géométrique explique pourquoi la quantité se stabilise vers un plateau.

En PASS, ces modèles sont réécrits avec l'exponentielle et le logarithme, qui permettent de résoudre directement $q^n > A$ sans tâtonner, et de passer sans difficulté d'une échelle multiplicative à une échelle additive (pH, décibels, échelles logarithmiques des graphiques).

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soit $u_n = 3n - 7$ pour tout entier naturel n . Calculer u_0 , u_1 et u_{10} , puis montrer que la suite est arithmétique et préciser sa raison.
2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison 2. Exprimer v_n en fonction de n , calculer v_6 , puis la somme $v_0 + v_1 + \dots + v_6$.
3. Soit $u_0 = 1$ et $u(n+1) = 2u_n - 3$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. Calculer la somme des entiers de 1 à 100, puis la somme des nombres impairs $1 + 3 + 5 + \dots + 99$.
5. Le prix d'un appareil est de 200 euros. Il baisse de 5 % chaque année. On note p_n son prix au bout de n années. Exprimer p_n en fonction de n et calculer p_3 au centime près.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $u_n = n^2 + n$ pour tout entier naturel n .
a) Étudier le sens de variation de (u_n) . b) Conjecturer la limite de (u_n) . c) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
7. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 17$ et $u_{12} = 38$.
a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0 . b) Calculer la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{12}$. c) Existe-t-il un rang n tel que $u_n = 101$? Si oui, lequel ?
8. (v_n) est une suite géométrique à termes positifs telle que $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$.
a) Déterminer la raison q et v_0 . b) Exprimer v_n en fonction de n . c) Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_9$.
9. On injecte à un patient une dose de 10 mg d'un médicament. Chaque heure, l'organisme élimine 30 % de la quantité présente. On note d_n la quantité, en mg, présente au bout de n heures.
a) Exprimer d_n en fonction de n et calculer d_3 . b) Au bout de combien d'heures entières la quantité devient-elle inférieure à 1 mg ? c) Écrire un algorithme en Python qui renvoie ce rang. d) Conjecturer la limite de (d_n) et l'interpréter.

10. Un salarié a le choix entre deux contrats, avec un salaire mensuel initial de 1 000 euros la première année. Contrat A : augmentation de 50 euros par an. Contrat B : augmentation de 4 % par an. On note a_n et b_n les salaires mensuels de l'année n ($n = 0$ pour la première année).

a) Exprimer a_n et b_n en fonction de n . b) Calculer a_{10} et b_{10} (b_{10} au centime près). c) À partir de quelle année le contrat B devient-il plus avantageux ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Un patient reçoit chaque jour une même dose de médicament. On modélise la quantité présente dans le sang juste après chaque prise par $u_0 = 10$ et $u(n+1) = 0,8u_n + 4$ (en mg).

a) Calculer u_1 et u_2 . b) On pose $v_n = u_n - 20$. Montrer que (v_n) est géométrique. c) En déduire u_n en fonction de n , puis u_5 au millième près. d) Étudier le sens de variation de (u_n) et conjecturer sa limite. Interpréter.

12. Calculer la somme $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 1\,458$, en justifiant le nombre de termes.

13. Pour tout n , on pose $S_n = 1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n . b) Conjecturer la limite de (S_n) . c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geq 1,999$.

14. Un échantillon radioactif a une activité initiale de 8 000 Bq. Son activité est divisée par 2 toutes les 6 heures. On note A_n l'activité au bout de n périodes de 6 heures.

a) Exprimer A_n en fonction de n et calculer l'activité au bout de 24 heures. b) Quelle proportion des noyaux initiaux s'est désintégrée au bout de 18 heures ? c) Au bout de combien d'heures l'activité devient-elle inférieure à 100 Bq (en nombre entier de périodes) ?

Corrigés

1. $u_0 = 3 \times 0 - 7 = -7$; $u_1 = 3 - 7 = -4$; $u_{10} = 30 - 7 = 23$. Pour tout n , $u(n+1) - u_n = 3(n+1) - 7 - (3n - 7) = 3$, constante. **(u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme -7 ; $u_{10} = 23$.**

2. $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 2^n$. $v_6 = 5 \times 64 = 320$. De v_0 à v_6 , il y a 7 termes : somme = $5 \times (1 - 2^7)/(1 - 2) = 5 \times (1 - 128)/(-1) = 5 \times 127 = 635$. Contrôle : $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 = 635$.

3. $u_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$; $u_2 = 2 \times (-1) - 3 = -5$; $u_3 = 2 \times (-5) - 3 = -13$. Les écarts $u_1 - u_0 = -2$ et $u_2 - u_1 = -4$ sont différents : **la suite n'est pas arithmétique**. Les quotients $u_1/u_0 = -1$ et $u_2/u_1 = 5$ sont différents : **elle n'est pas géométrique**.

4. $1 + 2 + \dots + 100 = 100 \times 101/2 = 5\,050$. Les impairs de 1 à 99 forment une suite arithmétique de raison 2 ; le k -ième impair est $2k - 1$, et $2k - 1 = 99$ donne $k = 50$: il y a 50 termes. Somme = $50 \times (1 + 99)/2 = 2\,500$.

5. Une baisse de 5 % revient à multiplier par 0,95 : $p_n = 200 \times 0,95^n$ (suite géométrique de raison 0,95). $p_3 = 200 \times 0,95^3 = 200 \times 0,857375 = 171,475$, soit $p_3 \approx 171,48$ euros (arrondi au centime).

6. a) $u(n+1) - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 > 0$. **La suite est strictement croissante.**

b) Les termes $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$, $u_{10} = 110$, $u_{100} = 10\,100$ grandissent sans borne : **il semble que (u_n) tende vers $+\infty$** . c) L'écart $u(n+1) - u_n = 2n + 2$ dépend de n (2 puis 4 puis 6) : **la suite n'est pas arithmétique**.

7. a) $u_{12} = u_5 + 7r$, donc $38 = 17 + 7r$ et $r = 3$. Puis $u_0 = u_5 - 5r = 17 - 15 = 2$. Ainsi $u_n = 2 + 3n$.

b) 13 termes de $u_0 = 2$ à $u_{12} = 38$: somme = $13 \times (2 + 38)/2 = 13 \times 20 = 260$. c) $2 + 3n = 101 \iff 3n = 99 \iff n = 33$, entier. **Oui : $u_{33} = 101$.**

8. a) $v_5 = v_2 \times q^3$, donc $q^3 = 96/12 = 8$. La suite étant à termes positifs, $q > 0$ et $q = 2$. Puis $v_2 = v_0 \times q^2$, donc $v_0 = 12/4 = 3$.

b) $v_n = 3 \times 2^n$. c) 10 termes de v_0 à v_9 : somme = $3 \times (1 - 2^{10})/(1 - 2) = 3 \times 1\,023 = 3\,069$.

9. a) Éliminer 30 % revient à multiplier par 0,7 : $d_n = 10 \times 0,7^n$. $d_3 = 10 \times 0,343 = 3,43$ mg.

b) On cherche le plus petit n tel que $10 \times 0,7^n < 1$, soit $0,7^n < 0,1$. Or $0,7^6 = 0,117649$ et $0,7^7 \approx 0,0824$. Donc $d_6 \approx 1,18$ mg et $d_7 \approx 0,82$ mg. **La quantité passe sous 1 mg au bout de 7 heures.** c) Un algorithme possible :

```
def seuil():
    n = 0
    d = 10
    while d >= 1:
        n = n + 1
        d = 0.7 * d
    return n
```

Il renvoie 7. d) La raison 0,7 est comprise entre 0 et 1, donc $0,7^n$ tend vers 0. **(d_n) semble tendre vers 0 : le médicament finit par être presque totalement éliminé.**

10. a) $a_n = 1\,000 + 50n$ (arithmétique de raison 50) et $b_n = 1\,000 \times 1,04^n$ (géométrique de raison 1,04).

b) $a_{10} = 1\,000 + 500 = 1\,500$ euros. $b_{10} = 1\,000 \times 1,04^{10} \approx 1\,000 \times 1,480244 \approx 1\,480,24$ euros. c) On compare : $a_{11} = 1\,550$ et $b_{11} \approx 1\,539,45$; $a_{12} = 1\,600$ et $b_{12} \approx 1\,601,03$. Donc $b_{11} < a_{11}$ mais $b_{12} > a_{12}$. **Le contrat B devient plus avantageux à partir de $n = 12$, c'est-à-dire la treizième année.** On retrouve le fait qu'une croissance exponentielle finit par dépasser une croissance linéaire.

11. a) $u_1 = 0,8 \times 10 + 4 = 12$; $u_2 = 0,8 \times 12 + 4 = 13,6$.

b) $v(n+1) = u(n+1) - 20 = 0,8u_n + 4 - 20 = 0,8u_n - 16 = 0,8(u_n - 20) = 0,8v_n$. **(v_n) est géométrique de raison 0,8**, de premier terme $v_0 = 10 - 20 = -10$. c) $v_n = -10 \times 0,8^n$, donc $u_n = v_n + 20 = 20 - 10 \times 0,8^n$. Contrôle : $u_1 = 20 - 8 = 12$. $u_5 = 20 - 10 \times 0,32768 = 20 - 3,2768 = 16,723$ (au millième). d) $u(n+1) - u_n = -10 \times 0,8^{n+1} + 10 \times 0,8^n = 10 \times 0,8^n \times (1 - 0,8) = 2 \times 0,8^n > 0$: **(u_n) est strictement croissante.** Comme $0,8^n$ tend vers 0, **u_n semble tendre vers 20** : la quantité après chaque prise augmente et se stabilise vers un plateau de 20 mg.

12. Les termes sont multipliés par 3 à chaque fois ($6/2 = 18/6 = 54/18 = 3$) : suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3, de terme 2×3^k . $2 \times 3^k = 1\,458 \iff 3^k = 729 = 3^6$, donc $k = 6$: les termes vont de $k = 0$ à $k = 6$, soit 7 termes. $S = 2 \times (1 - 3^7)/(1 - 3) = 2 \times (1 - 2\,187)/(-2) = 2\,186$. **$S = 2\,186$.**

13. a) Somme géométrique de raison 1/2, de $n + 1$ termes : $S_n = (1 - (1/2)^{n+1})/(1 - 1/2) = 2(1 - (1/2)^{n+1}) = 2 - 1/2^n$.

b) $(1/2)^n$ tend vers 0, donc **S_n semble tendre vers 2.** c) $S_n \geq 1,999 \iff 1/2^n \leq 0,001 \iff 2^n \geq 1\,000$. Or $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$. **Le plus petit entier est $n = 10$.**

14. a) L'activité est multipliée par 1/2 à chaque période : $A_n = 8\,000 \times (1/2)^n$. 24 heures correspondent à 4 périodes : $A_4 = 8\,000/16 = 500$ Bq.

b) 18 heures font 3 périodes : il reste $(1/2)^3 = 1/8 = 12,5$ % des noyaux. **87,5 % des noyaux initiaux se sont désintégrés.** c) $A_n < 100 \iff 8\,000/2^n < 100 \iff 2^n > 80$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$: $A_6 = 125$ Bq et $A_7 = 62,5$ Bq. **Il faut 7 périodes, soit 42 heures.**

Dérivation : nombre dérivé et fonction dérivée

COURS • M03 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer un taux de variation et l'interpréter comme coefficient directeur d'une sécante ou comme vitesse moyenne.
- Calculer un nombre dérivé à partir de la définition (limite du taux de variation).
- Lire graphiquement un nombre dérivé comme pente d'une tangente.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.
- Connaître et utiliser les dérivées des fonctions usuelles.
- Dériver une somme, un produit par un réel, un produit, un inverse, un quotient et une fonction $x \mapsto g(ax + b)$.
- Étudier le signe d'une dérivée et en déduire le tableau de variations d'une fonction.
- Déterminer un extremum local ou global et résoudre un problème d'optimisation.
- Utiliser l'étude d'une fonction pour démontrer une inégalité ou étudier la position relative de deux courbes.

Cours

1. Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a, b deux réels distincts de I . Le **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b est le nombre

$$(f(b) - f(a)) / (b - a).$$

Interprétation graphique. Si $A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$ sont deux points de la courbe C de f , ce taux est le **coefficient directeur de la droite (AB)**, appelée sécante. Il mesure la pente moyenne de la courbe entre a et b .

Interprétation physique. Si $f(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t , le taux de variation entre t_1 et t_2 est sa **vitesse moyenne** sur cet intervalle. Plus généralement, il mesure la variation moyenne de f par unité de variable.

On écrit souvent $b = a + h$, avec $h \neq 0$:

$$\tau(h) = (f(a + h) - f(a))/h.$$

Exemple : pour $f(x) = x^2$, entre 1 et 3, le taux vaut $(9 - 1)/(3 - 1) = 4$.

2. Nombre dérivé

Définition. On dit que f est **dérivable en a** si le taux de variation $(f(a + h) - f(a))/h$ tend vers un nombre réel L quand h tend vers 0. Ce nombre L est appelé **nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$:

$$f'(a) = \text{limite quand } h \text{ tend vers } 0 \text{ de } (f(a + h) - f(a))/h.$$

En Première, la notion de limite est abordée de manière intuitive : on simplifie le taux de variation par h (qui est non nul), puis on regarde ce que devient l'expression lorsque h devient aussi proche de 0 qu'on veut.

Exemple : $f(x) = x^2$ en un réel a quelconque. $(f(a + h) - f(a))/h = (a^2 + 2ah + h^2 - a^2)/h = (2ah + h^2)/h = 2a + h$. Quand h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Le nombre dérivé est un **taux de variation instantané** : la vitesse instantanée d'un mobile, le débit instantané, la vitesse de réaction à un instant donné.

Une fonction n'est pas toujours dérivable. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 : $(\sqrt{h} - \sqrt{0})/h = 1/\sqrt{h}$ pour $h > 0$, et $1/\sqrt{h}$ devient aussi grand qu'on veut quand h tend vers 0. Il n'y a pas de limite finie. Graphiquement, la courbe a en l'origine une tangente verticale. De même, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 : le taux $(|h| - 0)/h$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$, il ne se rapproche d'aucun nombre unique (la courbe forme un angle).

3. Tangente à une courbe

Quand h tend vers 0, le point $B(a + h ; f(a + h))$ se rapproche de A le long de la courbe et la sécante (AB) se rapproche d'une droite limite passant par A , de coefficient directeur $f'(a)$.

Définition. Si f est dérivable en a , la **tangente** à la courbe C au point $A(a ; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété. Son équation réduite est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Justification. Une droite non verticale de coefficient directeur m passant par $A(a ; f(a))$ a une équation de la forme $y = mx + p$, avec $f(a) = ma + p$, donc $p = f(a) - ma$ et $y = m(x - a) + f(a)$. On remplace m par $f'(a)$.

Conséquences graphiques :

- $f'(a) > 0$: la tangente « monte » ; $f'(a) < 0$: elle « descend » ;
- $f'(a) = 0$: la tangente est horizontale.

Lecture graphique : pour lire $f'(a)$, on repère deux points de la tangente et on calcule (différence des ordonnées)/(différence des abscisses).

Au voisinage de a , la courbe est très proche de sa tangente : $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ pour h petit. C'est l'**approximation affine** de f en a . Par exemple, avec $f(x) = x^2$ en $a = 1$: $1,01^2 \approx 1 + 2 \times 0,01 = 1,02$ (valeur

exacte 1,0201).

4. Fonction dérivée et dérivées usuelles

Définition. Si f est dérivable en tout réel x d'un intervalle I , on dit que f est **dérivable sur I** . La fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f et se note f' .

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n (n entier, $n \geq 1$)	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$1/x$	$-1/x^2$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty [$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$] 0 ; +\infty [$

Démonstration pour $1/x$. Pour $a \neq 0$ et $h \neq 0$ assez petit pour que $a + h \neq 0$: $(1/(a + h) - 1/a)/h = [(a - (a + h))/(a(a + h))]/h = -h/(a(a + h)h) = -1/(a(a + h))$. Quand h tend vers 0 , cette expression tend vers $-1/a^2$. Donc la dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$.

Démonstration pour $\sqrt{x}$ ($a > 0$). On multiplie par la quantité conjuguée : $(\sqrt{a + h} - \sqrt{a})/h = (\sqrt{a + h} - \sqrt{a})(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})/(h(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})) = (a + h - a)/(h(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})) = 1/(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})$. Quand h tend vers 0 , cela tend vers $1/(2\sqrt{a})$.

Démonstration pour x^3 . $(a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$, donc le taux vaut $3a^2 + 3ah + h^2$, qui tend vers $3a^2$.

5. Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Fonction	Dérivée	Condition
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
$1/v$	$-v'/v^2$	v ne s'annule pas sur I
u/v	$(u'v - uv')/v^2$	v ne s'annule pas sur I

Fonction	Dérivée	Condition
$x \mapsto g(ax + b)$	$x \mapsto a \times g'(ax + b)$	$ax + b$ dans l'intervalle de dérivabilité de g

Démonstration de la dérivée d'un produit. Notons $f = uv$. Pour $h \neq 0$: $f(a + h) - f(a) = u(a + h)v(a + h) - u(a)v(a) = [u(a + h) - u(a)]v(a + h) + u(a)[v(a + h) - v(a)]$ (on a ajouté et retranché $u(a)v(a + h)$). En divisant par h : $(f(a + h) - f(a))/h = [(u(a + h) - u(a))/h] \times v(a + h) + u(a) \times [(v(a + h) - v(a))/h]$. Quand h tend vers 0, le premier crochet tend vers $u'(a)$, $v(a + h)$ tend vers $v(a)$ (une fonction dérivable est continue), le dernier crochet tend vers $v'(a)$. D'où $f'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Conséquences.

- Une fonction polynôme se dérive terme à terme : $(5x^3 - 2x + 7)' = 15x^2 - 2$.
- La formule du quotient s'obtient en écrivant $u/v = u \times (1/v)$.
- Erreur à ne jamais faire : $(uv)'$ n'est pas $u'v'$. Par exemple $(x \times x)' = 2x$, alors que $1 \times 1 = 1$.

Dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$. Le facteur a vient de ce qu'une variation h de x provoque une variation ah de $ax + b$. Exemples :

- $(2x + 1)^5$ a pour dérivée $2 \times 5(2x + 1)^4 = 10(2x + 1)^4$;
- $\sqrt{3x - 6}$ a pour dérivée $3/(2\sqrt{3x - 6})$ sur $]2; +\infty[$;
- $1/(4 - x)$ a pour dérivée $(-1) \times (-1/(4 - x)^2) = 1/(4 - x)^2$ sur $\mathbb{R}$ privé de 4.

Calculer une dérivée sans erreur

1. reconnaître la structure (somme, produit, quotient, composée affine) • 2. nommer u et v et calculer u' et v' • 3. appliquer la formule • 4. factoriser le résultat pour étudier son signe

6. Signe de la dérivée et variations

Théorème (admis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est constante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est **strictement** croissante sur I (de même pour décroissante avec $f' < 0$).

La réciproque partielle est intuitive : si f est croissante sur I , ses taux de variation sont positifs, donc ses nombres dérivés aussi.

L'hypothèse « intervalle » est indispensable : la fonction inverse a une dérivée $-1/x^2$ strictement négative, pourtant elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ privé de 0 (on a $-1 < 1$ et $f(-1) = -1 < f(1) = 1$). Elle est décroissante sur chacun des deux intervalles séparément.

Méthode d'étude des variations.

1. Préciser l'ensemble de définition et de dérivabilité.
2. Calculer $f'(x)$.

3. Factoriser $f'(x)$ pour en étudier le signe (tableau de signes, trinôme, quotient dont le dénominateur est un carré positif...).

4. Dresser le tableau de variations, avec les valeurs de f aux bornes et aux points où f' s'annule.

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, positive à l'extérieur de $[-1 ; 1]$ et négative à l'intérieur. f est croissante sur $]-\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 1]$, croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$.

7. Extremums

Définitions. Soit f définie sur I et c un réel de I .

- $f(c)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de I ; c'est un **minimum** si $f(x) \geq f(c)$ pour tout x de I .
- $f(c)$ est un **maximum local** (ou minimum local) s'il existe un intervalle ouvert J contenant c tel que $f(c)$ soit le maximum (ou minimum) de f sur $J \cap I$.
- Un **extremum** désigne un maximum ou un minimum.

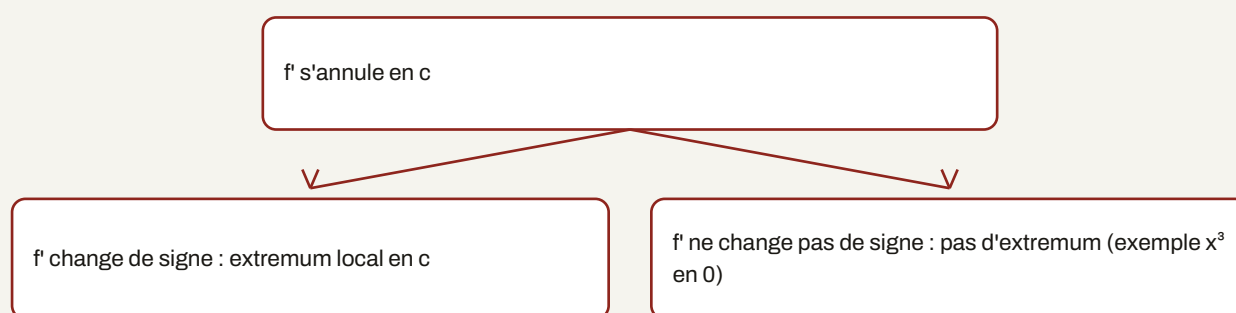
Propriété. Si f est dérivable sur un intervalle **ouvert** I et admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$: la tangente y est horizontale.

Attention, la réciproque est fausse. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: il n'y a pas d'extremum en 0 (la courbe traverse sa tangente horizontale).

Propriété (condition suffisante). Si f' s'annule en c **en changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local : un maximum si f' passe de positive à négative, un minimum si elle passe de négative à positive.

Sur un intervalle fermé $[a ; b]$, le maximum et le minimum peuvent aussi être atteints aux bornes, où f' n'a aucune raison de s'annuler : il faut toujours comparer les valeurs aux points critiques et aux bornes.

$f'(c) = 0$ en un point intérieur



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

8. Applications

Optimisation. Pour maximiser ou minimiser une grandeur (aire, volume, coût, concentration), on l'exprime en fonction d'une variable x , on précise l'intervalle des valeurs possibles de x , puis on étudie les variations de la fonction obtenue.

Démontrer une inégalité. Pour démontrer que $f(x) \geq g(x)$ sur I , on étudie $d(x) = f(x) - g(x)$: si son minimum sur I est positif ou nul, l'inégalité est prouvée.

Position d'une courbe et d'une tangente. On étudie le signe de $f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$.

Cinématique. Si $x(t)$ est la position d'un point mobile sur un axe, $v(t) = x'(t)$ est sa vitesse instantanée et $a(t) = v'(t)$ son accélération.

Exemples résolus

Exemple 1 : nombre dérivé par la définition et tangente

Énoncé. Soit $f(x) = x^2 - 3x$. a) Calculer $f'(2)$ à l'aide de la définition. b) En déduire l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Résolution. a) $f(2) = 4 - 6 = -2$. Pour $h \neq 0$: $f(2 + h) = (2 + h)^2 - 3(2 + h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = -2 + h + h^2$. Le taux de variation vaut $(f(2 + h) - f(2))/h = (h + h^2)/h = 1 + h$. Quand h tend vers 0, $1 + h$ tend vers 1. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$. Contrôle avec les formules : $f'(x) = 2x - 3$, $f'(2) = 1$. b) $T : y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 1 \times (x - 2) - 2$, soit $T : y = x - 4$.

Exemple 2 : étude complète d'une fonction polynôme

Énoncé. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f et préciser ses extremums locaux.

Résolution. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$. Le trinôme $x^2 - 2x - 3$ a pour racine évidente -1 ($1 + 2 - 3 = 0$), et le produit des racines vaut -3, donc l'autre racine est 3. Ainsi $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$, positive à l'extérieur de $[-1 ; 3]$ et négative entre -1 et 3. $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ et $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	croissante	10	décroissant e	-22	croissante

f admet un maximum local 10 en $x = -1$ et un minimum local -22 en $x = 3$. Ce ne sont pas des extremums globaux sur $\mathbb{R}$ (par exemple $f(10) = 1\,000 - 300 - 90 + 5 = 615 > 10$).

Exemple 3 : une fonction quotient

Énoncé. Soit $g(x) = (2x + 1)/(x^2 + 2)$, définie sur $\mathbb{R}$. a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$. b) Étudier les variations de g et déterminer ses extremums.

Résolution. a) Pour tout x , $x^2 + 2 \geq 2 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient. Avec $u = 2x + 1$, $u' = 2$, $v = x^2 + 2$, $v' = 2x$: $g'(x) = (2(x^2 + 2) - (2x + 1)(2x))/(x^2 + 2)^2 = (2x^2 + 4 - 4x^2 - 2x)/(x^2 + 2)^2 = (-2x^2 - 2x + 4)/(x^2 + 2)^2$. On factorise : $-2x^2 - 2x + 4 = -2(x^2 + x - 2) = -2(x - 1)(x + 2)$ (racine évidente 1, produit -2). Donc $g'(x) = -2(x - 1)(x + 2)/(x^2 + 2)^2$. b) Le dénominateur est strictement positif, $g'(x)$ a le signe de $-2(x - 1)(x + 2)$: trinôme de coefficient $-2 < 0$, négatif à l'extérieur de $[-2 ; 1]$, positif entre -2 et 1. g est décroissante sur $]-\infty ; -2]$, croissante sur $[-2 ; 1]$, décroissante sur $[1 ; +\infty[$. $g(-2) = (-3)/6 = -1/2$ et $g(1) = 3/3 = 1$. **Minimum local -1/2 en $x = -2$, maximum local 1 en $x = 1$.**

Méthodes et pièges

- Pour une tangente, calcule séparément $f(a)$ et $f'(a)$, puis applique $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: ne confonds pas $f(a)$ et $f'(a)$.
- Pour un nombre dérivé par la définition, simplifie toujours par h avant de faire tendre h vers 0 ; écrire $h = 0$ avant de simplifier donne une forme $0/0$ sans sens.
- $(uv)' = u'v + uv'$ et $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$: dans le quotient, l'ordre compte et le signe moins est sur uv' .
- Pour $g(ax + b)$, n'oublie pas le facteur a : la dérivée de $(3x - 1)^4$ est $12(3x - 1)^3$, pas $4(3x - 1)^3$.
- Factorise toujours $f'(x)$ avant d'étudier son signe : un tableau de signes se fait sur un produit, pas sur une somme.
- Un dénominateur au carré est positif : le signe d'une dérivée de quotient est celui de son numérateur.
- Le lien entre signe de f' et variations ne vaut que sur un intervalle : découpe l'ensemble de définition en intervalles.
- $f'(c) = 0$ ne suffit pas pour un extremum : vérifie le changement de signe (contre-exemple x^3 en 0).
- Sur un intervalle fermé, compare aussi les valeurs aux bornes avant de conclure sur le maximum ou le minimum.
- Dans un problème concret, précise l'intervalle de la variable et donne la réponse avec son unité.

Vers le PASS

En PASS, la dérivée est d'abord un outil de **taux de variation** : vitesse d'une réaction, débit, vitesse d'élimination d'un médicament, pente d'une courbe dose-réponse. On y apprend à dériver des fonctions composées plus générales (exponentielles, logarithmes, puissances) et des fonctions de plusieurs variables par dérivées partielles, qui servent à **propager les incertitudes** de mesure. L'approximation affine $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$, vue ici comme proximité de la courbe et de sa tangente, devient la base des calculs d'incertitude relative. L'étude de signe et l'optimisation reviennent dans les modèles de pharmacocinétique (instant du pic de concentration) et en biophysique.

Les QCM demandent souvent de reconnaître en quelques secondes une dérivée fautive dans une liste ou de lire un extremum sur un graphe de dérivée : la rigueur sur les formules de ce chapitre est donc décisive.

Suite en PASS : Fonctions, dérivées et optimisation

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soit $f(x) = x^2$.
a) Calculer le taux de variation de f entre 1 et 3. b) Calculer, à l'aide de la définition, le nombre dérivé de f en 1.
2. Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.
a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = 3/x$ sur $]0 ; +\infty[$; c) $h(x) = 2\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$; d) $k(x) = x^5/5$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la dérivée de :

a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = (x + 1)/(x - 2)$ sur $]2 ; +\infty[$.

4. Calculer la dérivée de :

a) $f(x) = (3x - 1)^4$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = \sqrt{2x + 6}$ sur $] -3 ; +\infty[$; c) $h(x) = 1/(5 - x)$ sur $] -\infty ; 5[$.

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ au point d'abscisse 1.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ définie sur $[-2 ; 3]$.

a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. b) Dresser le tableau de variations de f . c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-2 ; 3]$. d) Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

7. Soit $f(x) = x^3 - 2x$ et C sa courbe.

a) Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1. b) Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) - (x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$. c) En déduire la position relative de C et T .

8. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $x + 1/x \geq 2$, et préciser le cas d'égalité.

9. Dans une plaque carrée de carton de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x cm, puis on relève les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.

a) Montrer que le volume de la boîte est $V(x) = x(30 - 2x)^2$, pour $x \in]0 ; 15[$. b) Montrer que $V'(x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$. c) En déduire la valeur de x qui rend le volume maximal et ce volume.

10. Une entreprise fabrique q objets par jour, avec $1 \leq q \leq 50$. Le coût total, en euros, est $C(q) = q^2 + 10q + 100$. Le coût moyen est $CM(q) = C(q)/q$.

a) Exprimer $CM(q)$ sous la forme $q + 10 + 100/q$. b) Étudier les variations de CM sur $[1 ; 50]$. c) Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Que vaut-il ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Après une prise orale, la concentration d'un médicament dans le sang est modélisée par $C(t) = 20t/(t^2 + 4)$, en mg/L, où $t \geq 0$ est le temps en heures.

a) Calculer $C'(t)$ et étudier son signe. b) À quel instant la concentration est-elle maximale ? Que vaut-elle ? c) Calculer $C'(0)$ et l'interpréter. d) Pendant quelle période la concentration est-elle supérieure ou égale à 4 mg/L ?

12. On cherche les réels a et b tels que la courbe de $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ passe par le point $A(1 ; -2)$ et admette en ce point une tangente horizontale.

a) Traduire ces conditions par deux équations, puis déterminer a et b . b) Le point A correspond-il à un maximum local, un minimum local ou ni l'un ni l'autre ?

13. Un point mobile se déplace sur un axe. Sa position, en mètres, à l'instant t (en secondes) est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, pour $t \in [0 ; 5]$.

a) Calculer la vitesse $v(t) = x'(t)$. Pendant quelle période le mobile recule-t-il ? b) Calculer la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 3$. Commenter. c) Quelle est la plus grande vitesse, en valeur absolue, atteinte sur $[0 ; 5]$?

14. Soit $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Montrer à l'aide de la définition que, pour $a > 0$, $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$. b) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. c) En utilisant l'approximation affine en $a = 100$, donner une valeur approchée de $\sqrt{101}$, puis

comparer à la valeur de la calculatrice.

Corrigés

1. a) $(f(3) - f(1))/(3 - 1) = (9 - 1)/2 = 4$.
- b) Pour $h \neq 0$: $(f(1+h) - f(1))/h = (1 + 2h + h^2 - 1)/h = (2h + h^2)/h = 2 + h$. Quand h tend vers 0, $2 + h$ tend vers 2. $f'(1) = 2$.
2. a) $f'(x) = 12x^2 - 10x + 7$ (dérivation terme à terme : $4 \times 3x^2$, $5 \times 2x$, 7).
- b) $g = 3 \times (1/x)$, donc $g'(x) = 3 \times (-1/x^2) = -3/x^2$. c) $h'(x) = 2 \times 1/(2\sqrt{x})$, soit $h'(x) = 1/\sqrt{x}$. d) $k'(x) = 5x^4/5$, soit $k'(x) = x^4$.
3. a) $u = 2x + 1$, $u' = 2$; $v = x^2 - 3$, $v' = 2x$. $f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.
Contrôle en développant $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$, dont la dérivée est bien $6x^2 + 2x - 6$.
- b) $u = x + 1$, $u' = 1$; $v = x - 2$, $v' = 1$. $g'(x) = (1 \times (x - 2) - (x + 1) \times 1)/(x - 2)^2 = (x - 2 - x - 1)/(x - 2)^2 = -3/(x - 2)^2$.
4. a) Forme $g(ax + b)$ avec $g(X) = X^4$, $a = 3$: $f'(x) = 3 \times 4(3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3$.
- b) $g(X) = \sqrt{X}$, $a = 2$: $g'(x) = 2 \times 1/(2\sqrt{2x + 6}) = 1/\sqrt{2x + 6}$, valable car $2x + 6 > 0$ sur $]-3; +\infty[$. c) $g(X) = 1/X$, $a = -1$: $h'(x) = (-1) \times (-1/(5 - x)^2) = 1/(5 - x)^2$.
5. $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$. Tangente : $y = 3(x - 1) + 1$, soit $y = 3x - 2$.
6. a) $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x - 1)(x + 1)$. Trinôme de coefficient $-3 < 0$: $f'(x) < 0$ sur $[-2; -1[$ et sur $]1; 3]$, $f'(x) > 0$ sur $] -1; 1[$, $f'(-1) = f'(1) = 0$.
- b) $f(-2) = 8 - 6 + 2 = 4$; $f(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$; $f(1) = -1 + 3 + 2 = 4$; $f(3) = -27 + 9 + 2 = -16$. f est décroissante sur $[-2; -1]$ (de 4 à 0), croissante sur $[-1; 1]$ (de 0 à 4), décroissante sur $[1; 3]$ (de 4 à -16). c) On compare les valeurs aux bornes et aux points critiques : 4, 0, 4, -16. Le maximum est 4, atteint en $x = -2$ et en $x = 1$; le minimum est -16, atteint en $x = 3$. Le minimum est atteint à une borne, où f' ne s'annule pas. d) $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$. Tangente : $y = 3x + 2$.
7. a) $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f(1) = 1 - 2 = -1$; $f'(1) = 1$. T : $y = 1 \times (x - 1) - 1$, soit T : $y = x - 2$.
- b) $(x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2$. Et $f(x) - (x - 2) = x^3 - 2x - x + 2 = x^3 - 3x + 2$. L'égalité est vérifiée. c) $(x - 1)^2 \geq 0$, donc la différence a le signe de $x + 2$ (et s'annule en $x = 1$). C est au-dessus de T sur $]-2; +\infty[$ (en touchant T en $x = 1$), en dessous sur $]-\infty; -2[$, et les deux se coupent en $x = -2$.
8. Soit $f(x) = x + 1/x$ sur $]0; +\infty[$. $f'(x) = 1 - 1/x^2 = (x^2 - 1)/x^2 = (x - 1)(x + 1)/x^2$. Sur $]0; +\infty[$, $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$: son minimum est $f(1) = 2$. Donc $x + 1/x \geq 2$ pour tout $x > 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
9. a) Le fond de la boîte est un carré de côté $30 - 2x$ et la hauteur vaut x . Il faut $x > 0$ et $30 - 2x > 0$, soit $x \in]0; 15[$. $V(x) = x(30 - 2x)^2$.
- b) Produit $u \times w$ avec $u = x$, $u' = 1$, $w = (30 - 2x)^2$, $w' = (-2) \times 2(30 - 2x) = -4(30 - 2x)$. $V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)[(30 - 2x) - 4x] = (30 - 2x)(30 - 6x)$. c) Sur $]0; 15[$, $30 - 2x > 0$, donc $V'(x)$ a le signe de $30 - 6x$: positif pour $x < 5$, négatif pour $x > 5$. V est croissante sur $]0; 5]$ et décroissante sur $[5; 15[$. $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$. Volume maximal 2 000 cm³ (soit 2 L) pour $x = 5$ cm.
10. a) $CM(q) = (q^2 + 10q + 100)/q = q + 10 + 100/q$.
- b) $CM'(q) = 1 - 100/q^2 = (q^2 - 100)/q^2 = (q - 10)(q + 10)/q^2$. Sur $[1; 50]$, $q + 10 > 0$ et $q^2 > 0$: le signe est celui de $q - 10$. CM est décroissante sur $[1; 10]$ et croissante sur $[10; 50]$. c) $CM(10) = 10 + 10 + 10 = 30$. Le

coût moyen est minimal pour 10 objets par jour : 30 euros par objet.

11. a) $u = 20t$, $u' = 20$; $v = t^2 + 4$, $v' = 2t$. $C'(t) = (20(t^2 + 4) - 20t \times 2t)/(t^2 + 4)^2 = (80 - 20t^2)/(t^2 + 4)^2 = 20(4 - t^2)/(t^2 + 4)^2 = 20(2 - t)(2 + t)/(t^2 + 4)^2$. Sur $[0 ; +\infty[$, $2 + t > 0$ et le dénominateur est positif : $C'(t) > 0$ sur $[0 ; 2[$, $C'(2) = 0$, $C'(t) < 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

b) C est croissante sur $[0 ; 2]$ puis décroissante. $C(2) = 40/8 = 5$. **Concentration maximale 5 mg/L, atteinte 2 heures après la prise.** c) $C'(0) = 20 \times 4/16 = 5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$: au moment de la prise, la concentration augmente à la vitesse instantanée de 5 mg/L par heure. d) $C(t) \geq 4 \iff 20t \geq 4(t^2 + 4)$ (car $t^2 + 4 > 0$) $\iff 4t^2 - 20t + 16 \leq 0 \iff t^2 - 5t + 4 \leq 0$. Racines 1 et 4 (somme 5, produit 4), trinôme négatif entre ses racines. **La concentration est au moins 4 mg/L entre $t = 1 \text{ h}$ et $t = 4 \text{ h}$, soit pendant 3 heures.**

12. a) A sur la courbe : $f(1) = 1 + a + b = -2$, soit $a + b = -3$. Tangente horizontale : $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ et $f'(1) = 3 + 2a + b = 0$, soit $2a + b = -3$. En soustrayant la première équation de la seconde : $a = 0$, puis $b = -3$. **$a = 0$ et $b = -3$, $f(x) = x^3 - 3x$.** Vérification : $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f'(1) = 3 - 3 = 0$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ est négative sur $] -1 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$: elle change de signe en 1, du négatif au positif. **A correspond à un minimum local.**

13. a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3)$. Coefficient $3 > 0$: $v(t) < 0$ entre 1 et 3. **Le mobile recule pour $t \in]1 ; 3[$.**

b) $x(0) = 0$ et $x(3) = 27 - 54 + 27 = 0$. Vitesse moyenne $= (0 - 0)/3 = 0 \text{ m/s}$. Le mobile n'est pas resté immobile : il a avancé jusqu'à $x(1) = 4 \text{ m}$ puis est revenu à son point de départ. La vitesse moyenne ne renseigne que sur le déplacement global. c) v est un trinôme de coefficient positif, minimal en $t = 12/6 = 2$, avec $v(2) = 12 - 24 + 9 = -3$. Aux bornes : $v(0) = 9$ et $v(5) = 75 - 60 + 9 = 24$. Sur $[0 ; 5]$, $v(t)$ varie donc entre -3 et 24, et $|v(t)| \leq 24$. **La plus grande vitesse en valeur absolue est 24 m/s, atteinte à $t = 5 \text{ s}$.**

14. a) Pour $h \neq 0$ avec $a + h > 0$: $(\sqrt{a + h} - \sqrt{a})/h = ((a + h) - a)/(h(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})) = 1/(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})$, en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{a + h} + \sqrt{a}$. Quand h tend vers 0, $\sqrt{a + h}$ tend vers $\sqrt{a}$, donc le quotient tend vers $1/(2\sqrt{a})$. **$f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.**

b) Pour $h > 0$: $(\sqrt{h} - 0)/h = 1/\sqrt{h}$. Quand h tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 et $1/\sqrt{h}$ devient aussi grand qu'on veut : pas de limite finie. **f n'est pas dérivable en 0** (tangente verticale à l'origine). c) $f(100) = 10$ et $f'(100) = 1/20 = 0,05$. $f(100 + h) \approx f(100) + f'(100)h$ avec $h = 1$: $\sqrt{101} \approx 10,05$. La calculatrice donne $\sqrt{101} \approx 10,0499$: l'écart est d'environ 0,0001.

Fonction exponentielle

COURS • M04 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Connaître la définition de la fonction exponentielle comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Démontrer que la fonction exponentielle ne s'annule pas et que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.
- Utiliser les propriétés algébriques (produit, inverse, quotient, puissance) pour simplifier une expression.
- Utiliser la notation e^x et connaître une valeur approchée du nombre e .
- Connaître le signe, la dérivée et les variations de la fonction exponentielle, et l'allure de sa courbe.
- Résoudre des équations et des inéquations du type $e^u = e^v$ ou $e^u < e^v$.
- Dériver les fonctions $x \mapsto e^{ax+b}$ et des produits ou quotients faisant intervenir l'exponentielle.
- Étudier les fonctions $x \mapsto e^{kx}$ et $x \mapsto e^{-kx}$ ($k > 0$) et les utiliser pour modéliser une croissance ou une décroissance.
- Faire le lien entre la suite (e^{na}) et une suite géométrique de raison e^a .

Cours

1. Définition de la fonction exponentielle

Théorème (existence admise). Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle** et se note **exp**. Ainsi, pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$, et $\exp(0) = 1$.

L'idée : on cherche une fonction dont la vitesse de variation en chaque point est égale à sa valeur. Plus elle est grande, plus elle augmente vite. C'est exactement le comportement d'une population qui se reproduit sans contrainte : plus il y a d'individus, plus il en naît.

On admet l'existence. On démontre en revanche deux propriétés fondamentales.

Propriété 1. Pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. En particulier, **exp ne s'annule jamais**.

Démonstration. Posons $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. La fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est de la forme $x \mapsto h(ax + b)$ avec $a = -1$, donc sa dérivée est $x \mapsto -\exp'(-x) = -\exp(-x)$. Par la formule du produit : $g'(x) = \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp(-x)) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$. La dérivée de g est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc g est constante, égale à $g(0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1$. Si $\exp(x)$ était nul pour un réel x , le produit vaudrait 0 et non 1 : $\exp$ ne s'annule donc jamais.

Propriété 2 (unicité). Si h est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $h' = h$ et $h(0) = 1$, alors $h = \exp$.

Démonstration. Comme $\exp$ ne s'annule pas, on peut poser $k = h/\exp$. Par la formule du quotient : $k' = (h' \times \exp - h \times \exp')/\exp^2 = (h \times \exp - h \times \exp)/\exp^2 = 0$. Donc k est constante, égale à $k(0) = h(0)/\exp(0) = 1$, et $h = \exp$.

2. Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle. Pour tous réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Démonstration. Fixons b et posons $\varphi(x) = \exp(x + b) \times \exp(-x)$. Alors $\varphi'(x) = \exp(x + b)\exp(-x) - \exp(x + b)\exp(-x) = 0$: φ est constante, égale à $\varphi(0) = \exp(b)$. Donc $\exp(x + b) \times \exp(-x) = \exp(b)$. En multipliant les deux membres par $\exp(x)$, et puisque $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$, on obtient $\exp(x + b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

Cette relation transforme une **somme** en **produit** : c'est la propriété clé de l'exponentielle.

Conséquences. Pour tous réels a , b et tout entier relatif n :

- $\exp(-a) = 1/\exp(a)$;
- $\exp(a - b) = \exp(a)/\exp(b)$;
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Justifications : la première est la propriété 1. Pour la deuxième, $\exp(a - b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a)/\exp(b)$. Pour la troisième avec n entier naturel, on applique la relation fonctionnelle n fois : $\exp(a + a + \dots + a) = \exp(a) \times \dots \times \exp(a)$; pour n négatif, on utilise l'inverse.

Le nombre e et la notation e^x . On note $e = \exp(1)$. Sa valeur approchée est $e \approx 2,718$. D'après la dernière propriété, pour tout entier n , $\exp(n) = \exp(1 \times n) = e^n$. On étend cette notation à tout réel x en posant :

$$\exp(x) = e^x.$$

Les règles de calcul sur les exponentielles sont alors les mêmes que celles des puissances :

Règle	En notation exp	En notation e
Valeur en 0	$\exp(0) = 1$	$e^0 = 1$
Produit	$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
Inverse	$\exp(-a) = 1/\exp(a)$	$e^{-a} = 1/e^a$
Quotient	$\exp(a - b) = \exp(a)/\exp(b)$	$e^{a-b} = e^a/e^b$
Puissance	$\exp(na) = \exp(a)^n$	$e^{na} = (e^a)^n$

Exemple : $(e^{2x} \times e^{-3})/e^{x-1} = e^{2x-3-(x-1)} = e^{x-2}$.

Attention : e^{a+b} n'est pas $e^a + e^b$. Par exemple $e^{1+1} = e^2 \approx 7,39$ alors que $e^1 + e^1 \approx 5,44$.

3. Signe, variations et courbe

Signe. Pour tout réel x , $e^x > 0$. Démonstration : $e^x = e^{x/2 + x/2} = (e^{x/2})^2$, qui est un carré, donc positif ou nul ; et il n'est pas nul, car $\exp$ ne s'annule jamais.

Variations. La dérivée de $\exp$ est $\exp$ elle-même, strictement positive : **la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Conséquences pour les équations et inéquations. Pour tous réels a et b :

- $e^a = e^b \iff a = b$;
- $e^a < e^b \iff a < b$;
- $e^a \leq e^b \iff a \leq b$.

En effet, une fonction strictement croissante conserve l'ordre et prend deux valeurs différentes en deux points différents. En particulier $e^x > 1 \iff x > 0$ et $e^x < 1 \iff x < 0$, puisque $1 = e^0$.

Une équation comme $e^x = -2$ n'a aucune solution, puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

Courbe représentative.

- Elle passe par les points $(0 ; 1)$ et $(1 ; e)$.
- Elle est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses.
- Sa tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\exp'(0) = \exp(0) = 1$, donc pour équation $y = x + 1$. La courbe est au-dessus de cette tangente : pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$ (démonstration à l'exercice 10).
- Observation graphique : quand x devient grand, e^x devient très grand, et très vite ($e^{10} \approx 22\,026$) ; quand x devient très négatif, e^x se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre ($e^{-10} \approx 0,000045$). L'étude précise de ces limites relève de la classe de Terminale.

Valeurs utiles à la calculatrice : $e^{-1} \approx 0,368$; $e^{0,5} \approx 1,649$; $e^2 \approx 7,389$; $e^3 \approx 20,09$.

4. Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$

D'après la règle de dérivation de $x \mapsto g(ax+b)$, avec $g = \exp$:

la dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto a e^{ax+b}$.

Exemples :

- $(e^{3x})' = 3e^{3x}$;
- $(e^{-x})' = -e^{-x}$;
- $(e^{-0,2x+5})' = -0,2 e^{-0,2x+5}$.

On combine avec les formules du produit et du quotient. Par exemple, pour $f(x) = x e^x$: $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$. Comme $e^x > 0$, **le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$** : c'est la méthode à retenir. Dans une dérivée où l'exponentielle apparaît en facteur, on factorise par elle et on étudie le signe de l'autre facteur seulement.



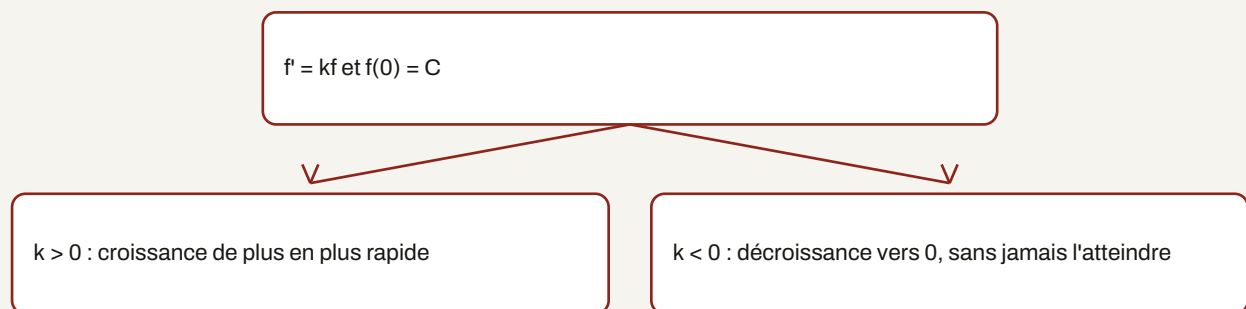
5. Les fonctions $x \mapsto e^{kx}$

Soit k un réel et $f(x) = e^{kx}$.

- $f(0) = 1$: toutes ces courbes passent par le point $(0 ; 1)$.
- $f'(x) = k e^{kx} = k f(x)$: la fonction vérifie la relation $f' = kf$. La vitesse de variation est proportionnelle à la valeur.
- Si $k > 0$, f' est strictement positive : f est **strictement croissante** ; plus k est grand, plus la croissance est rapide.
- Si $k < 0$, f est **strictement décroissante**. En écrivant $k = -\lambda$ avec $\lambda > 0$, on obtient $x \mapsto e^{-\lambda x}$, décroissante, qui se rapproche de 0 quand x devient grand.
- Si $k = 0$, f est constante égale à 1.

Plus généralement, pour un réel C , la fonction $x \mapsto C e^{kx}$ vérifie aussi $f' = kf$, avec $f(0) = C$.

Comportement de $x \mapsto C e^{kx}$ avec $C > 0$



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

6. Lien avec les suites géométriques

Soit a un réel et $u_n = e^{na}$ pour tout entier naturel n . Alors :

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na} \times e^a = e^a \times u_n.$$

La suite (e^{na}) est **géométrique de raison $q = e^a$** et de premier terme $u_0 = 1$. Comme $e^a > 0$: si $a > 0$, $q > 1$ et la suite est croissante ; si $a < 0$, $0 < q < 1$ et la suite est décroissante.

Plus généralement, si $f(t) = C e^{kt}$, les valeurs prises à intervalles de temps réguliers Δt forment une suite géométrique de raison $e^{k\Delta t}$: $f(t + \Delta t) = e^{k\Delta t} \times f(t)$. Une évolution exponentielle continue, observée à pas réguliers, est donc une évolution à **pourcentage constant**. C'est pour cela que la suite géométrique est le modèle discret et la fonction exponentielle le modèle continu d'un même phénomène.



Du continu au discret

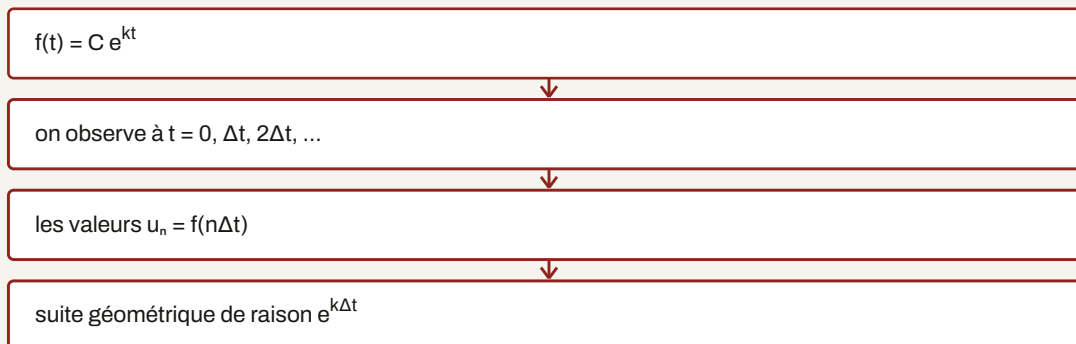


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

7. Modèles de croissance et de décroissance

Croissance exponentielle. Une population de bactéries en milieu favorable, un capital placé à taux continu, une épidémie à ses débuts : la quantité $N(t) = N_0 e^{kt}$ ($k > 0$) augmente d'un même pourcentage sur des durées égales. Elle **double** toujours en un même temps T , défini par $e^{kT} = 2$, quel que soit l'instant de départ, puisque $N(t + T) = e^{kT} \times N(t) = 2N(t)$.

Décroissance exponentielle. Le nombre de noyaux d'un échantillon radioactif, la concentration d'un médicament éliminé par l'organisme, la température d'un objet qui se rapproche de celle de la pièce (pour l'écart de température) : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$). La quantité est **divisée par 2** sur chaque durée égale à la **demi-vie** $t_{1/2}$, définie par $e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$. Après 2 demi-vies il reste un quart, après 3 un huitième, après n demi-vies une fraction $(1/2)^n$: on retrouve une suite géométrique.

En Première, sans la fonction logarithme (vue en Terminale), on détermine la durée nécessaire pour atteindre un seuil par tableau de valeurs, par lecture graphique ou par un algorithme de seuil.

Situation	Modèle	Paramètre
Croissance	$N_0 e^{kt}$, $k > 0$	temps de doublement
Décroissance	$N_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$	demi-vie
Observation à pas régulier	suite géométrique	raison $e^{k\Delta t}$

Exemples résolus

Exemple 1 : calcul algébrique, équation et inéquation

Énoncé. a) Simplifier $A = (e^{3x} \times e^{-x})/e^{x+1}$. b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x-1} = e^{x+3}$. c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2} \geq e^{4x-3}$.

Résolution. a) $A = e^{3x + (-x) - (x+1)} = e^{3x - x - x - 1} = e^{x-1}$. b) Comme $e^a = e^b \iff a = b$: $2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$. $S = \{4\}$. c) La fonction exponentielle étant strictement croissante, $e^{x^2} \geq e^{4x-3} \iff x^2 \geq 4x - 3 \iff x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Ce trinôme a pour racines 1 et 3 (somme 4, produit 3) et un coefficient $a = 1 > 0$: il est positif à l'extérieur de ses racines. $S =]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$.

Exemple 2 : étude d'une fonction

Énoncé. Soit $f(x) = (x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$. a) Calculer $f'(x)$. b) Étudier les variations de f et préciser son minimum. c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Résolution. a) Produit de $u = x - 1$ ($u' = 1$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$) : $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$. b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de x : négatif sur $]-\infty ; 0[$, positif sur $]0 ; +\infty[$. f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$. **Son minimum est $f(0) = (0 - 1) \times 1 = -1$.** c) $f(1) = 0 \times e = 0$ et $f'(1) = 1 \times e = e$. La tangente a pour équation $y = e(x - 1) + 0$, soit $y = e x - e$.

Exemple 3 : élimination d'un médicament

Énoncé. Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang est $C(t) = 12e^{-0,2t}$, en mg/L, où t est le temps en heures. a) Donner la concentration initiale et étudier les variations de C . b) Calculer $C(5)$ au centième. c) Montrer que les valeurs $C(0)$, $C(1)$, $C(2)$, ... forment une suite géométrique ; donner sa raison au dix-millième et interpréter en pourcentage. d) Au bout de combien d'heures entières la concentration devient-elle inférieure à 1 mg/L ?

Résolution. a) $C(0) = 12e^0 = 12$ mg/L. $C'(t) = 12 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -2,4 e^{-0,2t} < 0$: C est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$. b) $C(5) = 12e^{-1} \approx 12 \times 0,36788 \approx 4,41$ mg/L. c) Posons $c_n = C(n) = 12e^{-0,2n}$. Alors $c(n+1) = 12e^{-0,2(n+1)} = e^{-0,2} \times c_n$: suite géométrique de raison $q = e^{-0,2} \approx 0,8187$. Chaque heure, la concentration est multipliée par 0,8187 environ : **elle baisse d'environ 18,1 % par heure.** d) On cherche le plus petit entier n tel que $12e^{-0,2n} < 1$. Par calcul : $C(12) = 12e^{-2,4} \approx 12 \times 0,0907 \approx 1,09$ et $C(13) = 12e^{-2,6} \approx 12 \times 0,0743 \approx 0,89$. Comme C est décroissante, **la concentration passe sous 1 mg/L au bout de 13 heures.**

Méthodes et pièges

- Pour simplifier, transforme tout en une seule exponentielle en additionnant ou soustrayant les exposants ; ne mélange pas exposants et facteurs.
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$, jamais $e^a + e^b$; et $(e^a)^2 = e^{2a}$, pas e^{a^2} .
- Pour résoudre $e^x = e^a$ ou $e^x < e^a$, compare directement les exposants : la fonction exponentielle est strictement croissante, l'ordre est conservé.
- Une exponentielle est toujours strictement positive : $e^x = 0$ ou $e^x = -2$ n'ont pas de solution, et $e^x > -5$ est vraie pour tout x .
- Dans une dérivée, factorise par l'exponentielle : son signe est connu (positif), il ne reste qu'à étudier l'autre facteur.
- N'oublie pas le facteur a dans la dérivée de e^{ax+b} : $(e^{-3x})' = -3e^{-3x}$.
- Une équation du type $e^{2x} + b e^x + c = 0$ se ramène au second degré en posant $X = e^x$, en ne gardant que les solutions $X > 0$.
- Pour un modèle à pas régulier, pense au lien $e^{k(t+1)} = e^k \times e^{kt}$: la raison de la suite géométrique est e^k , et l'évolution en pourcentage est $e^k - 1$.
- Pour un seuil sans logarithme, encadre la réponse entre deux valeurs calculées et justifie par le sens de variation.

Vers le PASS

L'exponentielle est la fonction la plus utilisée en sciences de la santé. En PASS, elle décrit la décroissance radioactive en médecine nucléaire et en radioprotection (loi $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, demi-vie, activité), l'atténuation d'un faisceau de rayons X qui traverse un tissu (loi exponentielle d'atténuation), l'élimination d'un médicament en pharmacocinétique (cinétique d'ordre 1, demi-vie d'élimination), la charge et la décharge d'un condensateur dans les modèles de membrane cellulaire, ou encore la croissance bactérienne. Toutes ces lois sont des solutions de l'équation $f' = kf$, qui généralise la définition vue ici.

En PASS, on lui associe immédiatement sa fonction réciproque, le logarithme népérien, qui permet de calculer une demi-vie ou un seuil en une ligne ($t_{1/2} = \ln 2/\lambda$), et les échelles logarithmiques (pH, décibels, graphiques semi-logarithmiques où une exponentielle devient une droite).

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Simplifier :

a) $e^3 \times e^{-5}$; b) $(e^2)^3$; c) e^{x+2}/e^{x-1} ; d) $(e^2)^2 \times e^{-2x}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{3x} = e^6$; b) $e^{x^2} = e$; c) $e^{2x+1} > 1$; d) $e^x = -2$.

3. Calculer la dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3e^x - x^2$; b) $g(x) = e^{-4x+1}$; c) $h(x) = x e^x$; d) $k(x) = (2x+3)e^{2x}$.

4. Donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f(x) = e^{-0,5x}$ et $g(x) = 5e^{0,3x}$, ainsi que leurs valeurs en 0.

5. Soit $u_n = e^{0,5n}$ pour tout entier naturel n . Montrer que (u_n) est géométrique, préciser sa raison (valeur exacte et valeur approchée au millièmes) et son sens de variation.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = (2-x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f'(x) = (1-x)e^x$. b) Dresser le tableau de variations de f et donner son maximum. c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. d) Résoudre $f(x) = 0$ et étudier le signe de $f(x)$.

7. a) Vérifier que la fonction $f(x) = 3e^{2x}$ vérifie $f' = 2f$ et $f(0) = 3$.

b) Vérifier que la fonction $g(t) = 50e^{-0,1t}$ vérifie $g' = -0,1g$ et $g(0) = 50$. Quel est son sens de variation ?

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x^2-1} \leq e^{3(x-1)}$; b) $e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$ (on pourra poser $X = e^x$).

9. Une population de bactéries compte $N(t) = 1\,000e^{0,3t}$ individus au bout de t heures.

a) Calculer $N(0)$ et $N(2)$ (à l'unité). b) Étudier le sens de variation de N . c) Montrer que $N(t+1) = e^{0,3} \times N(t)$ et en déduire le pourcentage d'augmentation par heure (à 0,1 % près). d) Au bout de combien

d'heures entières la population dépasse-t-elle 10 000 bactéries ?

10. Soit $g(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. b) En déduire les variations de g et son minimum. c) Conclure que, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$. Interpréter graphiquement. d) Utiliser l'approximation affine de $\exp$ en 0 pour donner une valeur approchée de $e^{0,01}$.

Niveau 3 : vers le PASS

11. L'iode 131, utilisé en médecine nucléaire, a une demi-vie de 8 jours. On modélise le nombre de noyaux restants par $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, t en jours, avec $\lambda \approx 0,0866 \text{ j}^{-1}$.

a) Calculer $e^{-8\lambda}$ avec cette valeur de λ (au dix-millième) et vérifier qu'il vaut environ 1/2. b) Montrer que, pour tout n , $N(8n) = N_0 \times (1/2)^n$ à cette approximation près. Quelle proportion des noyaux reste-t-il au bout de 24 jours ? c) Au bout de combien de demi-vies, puis de jours, reste-t-il moins de 1 % des noyaux initiaux ?

12. Après une prise orale, la concentration d'un médicament est modélisée par $C(t) = 10t e^{-0,5t}$, en mg/L, pour $t \geq 0$ en heures.

a) Montrer que $C'(t) = 5(2 - t)e^{-0,5t}$. b) Déterminer l'instant du pic de concentration et la concentration maximale (au centième). c) Calculer $C'(0)$ et l'interpréter. d) Calculer $C(6)$ au centième et commenter.

13. Pour un réel k , on note $f_k(x) = e^{kx}$ et C_k sa courbe.

a) Montrer que toutes les courbes C_k passent par un même point. b) Déterminer k pour que la tangente à C_k en 0 passe par le point $B(2; 5)$. c) Montrer que, pour tout x , $f_k(x) \times f_{-k}(x) = 1$, et en déduire que les courbes C_k et C_{-k} sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

14. Soit $g(x) = (e^x + e^{-x})/2$ sur $\mathbb{R}$ (fonction qui décrit la forme d'un câble suspendu).

a) Calculer $g(0)$ et montrer que $g(-x) = g(x)$ pour tout x . b) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) > 0 \iff x > 0$. c) En déduire les variations et le minimum de g . d) Démontrer que, pour tout x , $g(2x) = 2g(x)^2 - 1$.

Corrigés

1. a) $e^3 \times e^{-5} = e^{3-5} = e^{-2}$.

b) $(e^2)^3 = e^{2 \times 3} = e^6$. c) $e^{x+2}/e^{x-1} = e^{x+2-x+1} = e^3$. d) $(e^x)^2 \times e^{-2x} = e^{2x} \times e^{-2x} = e^0 = 1$.

2. a) $e^{3x} = e^6 \iff 3x = 6 \iff x = 2$.

b) $e^{x^2} = e^1 \iff x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1$. c) $1 = e^0$, donc $e^{2x+1} > e^0 \iff 2x+1 > 0 \iff x > -1/2$. $S =]-1/2; +\infty[$.

d) Une exponentielle est strictement positive : **aucune solution**, $S = \emptyset$.

3. a) $f'(x) = 3e^x - 2x$.

b) $g'(x) = -4e^{-4x+1}$. c) $h'(x) = 1 \times e^x + x e^x = (x+1)e^x$. d) $k'(x) = 2 \times e^{2x} + (2x+3) \times 2e^{2x} = (2+4x+6)e^{2x} = (4x+8)e^{2x}$.

4. $f'(x) = -0,5e^{-0,5x} < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$. $g'(x) = 5 \times 0,3e^{0,3x} = 1,5e^{0,3x} > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $g(0) = 5$. On retrouve la règle : e^{kx} décroît si $k < 0$, croît si $k > 0$.

5. $u(n+1) = e^{0,5(n+1)} = e^{0,5n} \times e^{0,5} = e^{0,5} \times u_n$. (u_n) est géométrique de raison $q = e^{0,5} \approx 1,649$, de premier terme $u_0 = 1$. Comme $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est strictement croissante.

6. a) Produit de $u = 2 - x$ ($u' = -1$) et $v = e^x$: $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$.

b) $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - x$: positif sur $]-\infty ; 1[$, négatif sur $]1 ; +\infty[$. **f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[$, strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$; son maximum est $f(1) = e \approx 2,718$.** c) $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$. **Tangente : $y = x + 2$.** d) $f(x) = 0 \iff 2 - x = 0$ (car $e^x \neq 0$) $\iff x = 2$. Le signe de $f(x)$ est celui de $2 - x$: **$f(x) > 0$ sur $]-\infty ; 2[$, $f(x) < 0$ sur $]2 ; +\infty[$.**

7. a) $f'(x) = 3 \times 2e^{2x} = 6e^{2x} = 2 \times 3e^{2x} = 2f(x)$, et $f(0) = 3e^0 = 3$. **Les deux conditions sont vérifiées.**

b) $g'(t) = 50 \times (-0,1)e^{-0,1t} = -0,1 \times 50e^{-0,1t} = -0,1 g(t)$, et $g(0) = 50$. **Les conditions sont vérifiées.** $g'(t) = -5e^{-0,1t} < 0$: **g est strictement décroissante.**

8. a) Par stricte croissance de $\exp$: $x^2 - 1 \leq 3x - 3 \iff x^2 - 3x + 2 \leq 0$. Racines 1 et 2 (somme 3, produit 2), coefficient positif : trinôme négatif entre ses racines. **$S = [1 ; 2]$.**

b) Avec $X = e^x$ ($X > 0$), $e^{2x} = X^2$ et l'équation devient $X^2 - (e + 1)X + e = 0$. Deux nombres de somme $e + 1$ et de produit e : 1 et e . Donc $X = 1$ ou $X = e$, tous deux strictement positifs. $e^x = 1 \iff x = 0$; $e^x = e \iff x = 1$. **$S = \{0 ; 1\}$.**

9. a) $N(0) = 1\,000 \times e^0 = 1\,000$ bactéries ; $N(2) = 1\,000e^{0,6} \approx 1\,000 \times 1,82212 \approx 1\,822$ bactéries.

b) $N'(t) = 1\,000 \times 0,3e^{0,3t} = 300e^{0,3t} > 0$: **N est strictement croissante.** c) $N(t + 1) = 1\,000e^{0,3t + 0,3} = e^{0,3} \times 1\,000e^{0,3t} = e^{0,3} \times N(t)$. Or $e^{0,3} \approx 1,34986$: **la population augmente d'environ 35,0 % par heure.** d) On cherche le plus petit entier t tel que $1\,000e^{0,3t} > 10\,000$, soit $e^{0,3t} > 10$. $N(7) = 1\,000e^{2,1} \approx 8\,166$ et $N(8) = 1\,000e^{2,4} \approx 11\,023$. **N étant croissante, la population dépasse 10 000 bactéries au bout de 8 heures.**

10. a) $g'(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$. Donc **$g'(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[$, $g'(0) = 0$, $g'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.**

b) g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$. **Son minimum est $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.** c) Pour tout x , $g(x) \geq 0$, donc **$e^x \geq x + 1$.** Graphiquement, la courbe de l'exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = x + 1$, et ne la touche qu'en $(0 ; 1)$. d) Près de 0, $e^x \approx 1 + h$. **$e^{0,01} \approx 1,01$** (valeur calculatrice : 1,01005).

11. a) $8\lambda \approx 8 \times 0,0866 = 0,6928$, et $e^{-0,6928} \approx 0,5002$, qui vaut bien environ $1/2$.

b) $N(8n) = N_0 e^{-\lambda \times 8n} = N_0 (e^{-8\lambda})^n \approx N_0 \times (1/2)^n$: les valeurs à chaque demi-vie forment une suite géométrique de raison $1/2$. 24 jours = 3 demi-vies : il reste $(1/2)^3 = 1/8$, soit 12,5 % des noyaux. c) On cherche le plus petit n tel que $(1/2)^n < 0,01$, soit $2^n > 100$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$. Il faut 7 demi-vies, soit 56 jours (il reste alors $1/128 \approx 0,78\%$).

12. a) Produit de $u = 10t$ ($u' = 10$) et $v = e^{-0,5t}$ ($v' = -0,5e^{-0,5t}$) : $C'(t) = 10e^{-0,5t} + 10t \times (-0,5)e^{-0,5t} = (10 - 5t)e^{-0,5t} = 5(2 - t)e^{-0,5t}$.

b) $e^{-0,5t} > 0$, donc $C'(t)$ a le signe de $2 - t$: C est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$. $C(2) = 20e^{-1} \approx 20 \times 0,36788 \approx 7,36$. Le pic est atteint 2 heures après la prise, avec environ 7,36 mg/L. c) $C'(0) = 5 \times 2 \times 1 = 10 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$: juste après la prise, la concentration augmente à la vitesse de 10 mg/L par heure. d) $C(6) = 60e^{-3} \approx 60 \times 0,049787 \approx 2,99 \text{ mg/L}$. Quatre heures après le pic, la concentration est redescendue à environ 41 % de sa valeur maximale ($2,99/7,36 \approx 0,41$) : la phase d'élimination domine.

13. a) Pour tout k , $f_k(0) = e^0 = 1$: toutes les courbes passent par le point (0 ; 1).

b) $f_k'(x) = k e^{kx}$, donc $f_k'(0) = k$ et la tangente en 0 a pour équation $y = k(x - 0) + 1 = kx + 1$. Elle passe par $B(2 ; 5)$ si et seulement si $2k + 1 = 5$, soit $k = 2$. c) $f_k(x) \times f_{-k}(x) = e^{kx} \times e^{-kx} = e^0 = 1$. De plus $f_{-k}(x) = e^{-kx} = e^{k(-x)} = f_k(-x)$: le point $(x ; y)$ appartient à C_{-k} si et seulement si le point $(-x ; y)$ appartient à C_k . Les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

14. a) $g(0) = (1 + 1)/2 = 1$. $g(-x) = (e^{-x} + e^x)/2 = g(x)$: g est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) $g'(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Or $g'(x) > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x$ (stricte croissance de $\exp$) $\iff x > 0$. c) g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. Son minimum est $g(0) = 1$.

d) $2g(x)^2 - 1 = 2 \times (e^x + e^{-x})^2/4 - 1 = (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x})/2 - 1 = (e^{2x} + 2 + e^{-2x})/2 - 1 = (e^{2x} + e^{-2x})/2 = g(2x)$. L'égalité $g(2x) = 2g(x)^2 - 1$ est démontrée.



Trigonométrie et fonctions cosinus et sinus

COURS • M05 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Convertir une mesure d'angle des degrés en radians et inversement.
- Placer sur le cercle trigonométrique le point associé à un réel donné, par enroulement de la droite des réels.
- Déterminer la mesure principale d'un réel, dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
- Lire le cosinus et le sinus d'un réel sur le cercle trigonométrique et connaître les valeurs remarquables.
- Utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour calculer un cosinus à partir d'un sinus, ou l'inverse, en tenant compte du signe.
- Exprimer $\cos(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\cos(\pi + x)$, $\cos(\pi/2 - x)$, $\cos(\pi/2 + x)$ et leurs analogues pour le sinus à l'aide de $\cos x$ et $\sin x$.
- Résoudre sur un intervalle donné les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$, et des inéquations simples, à l'aide du cercle.
- Justifier la parité et la périodicité des fonctions cosinus et sinus et en déduire leurs courbes.
- Dresser le tableau de variations des fonctions cosinus et sinus sur une période et tracer leurs courbes représentatives.

Cours

1. Le radian, unité naturelle des angles

On travaille dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I, J)$. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre), appelé aussi sens trigonométrique.

Un cercle de rayon 1 a pour périmètre 2π . Sur ce cercle, la longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle au centre qui l'intercepte : le tour complet, 360° , correspond à une longueur 2π . C'est cette proportionnalité qui fonde une nouvelle unité.

Définition. Un **radian** (symbole rad) est la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon 1, un arc de longueur 1.

Ainsi un tour complet mesure 2π rad, un demi-tour π rad, et la correspondance s'écrit :

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

On en déduit la règle de conversion par proportionnalité : un angle de mesure d en degrés et r en radians vérifie $r = d \times \pi / 180$, et $d = r \times 180 / \pi$. Par exemple $60^\circ = 60\pi/180 = \pi/3$ rad, et $3\pi/4$ rad $= 3 \times 180/4 = 135^\circ$. Un radian vaut environ $57,3^\circ$.

Pourquoi préférer le radian au degré ? Parce que sur un cercle de rayon R , un angle de θ radians intercepte un arc de longueur exactement $R \times \theta$, sans coefficient parasite. Cette simplicité rend les formules d'analyse (dérivées, limites, vitesses angulaires) beaucoup plus naturelles. En physique, une vitesse angulaire s'exprime en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ pour cette raison.

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180	360
Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	2π

2. Enroulement de la droite des réels

Imaginons la droite des réels tangente au cercle trigonométrique au point $I(1; 0)$, graduée avec la même unité que le repère, et orientée vers le haut. On « enroule » cette droite sur le cercle : la partie positive dans le sens direct, la partie négative dans le sens indirect. Chaque réel x vient alors se placer sur un unique point M du cercle : on dit que M est le **point image** de x , ou que x est une **mesure** de l'arc orienté de I à M .

Enrouler la droite des réels

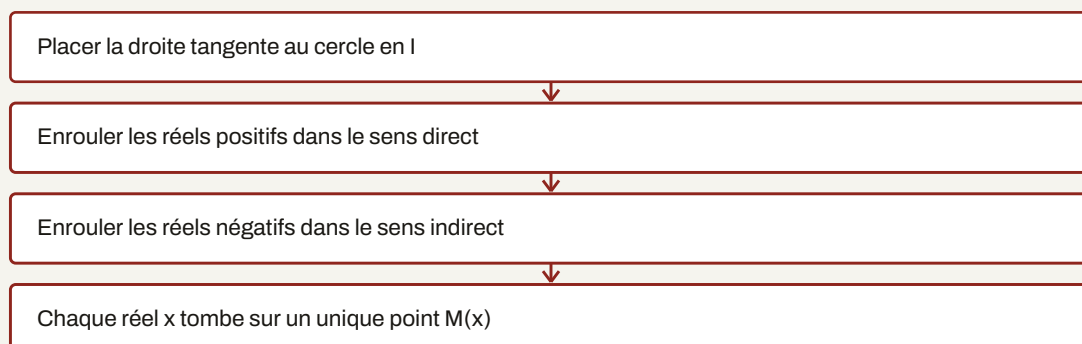


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Le point image de x est celui qu'on atteint en parcourant, depuis I , une longueur $|x|$ sur le cercle, dans le sens direct si $x > 0$ et dans le sens indirect si $x < 0$. Par exemple $\pi/2$ a pour image $J(0; 1)$, π a pour image le point $I'(-1; 0)$, et $-\pi/2$ a pour image $J'(0; -1)$.

Comme le périmètre vaut 2π , avancer de 2π ramène au point de départ. Il en découle une propriété essentielle :

Propriété. Les réels x et $x + 2k\pi$, où k est un entier relatif, ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Réciproquement, deux réels ayant le même point image diffèrent d'un multiple entier de 2π .

Un point du cercle est donc l'image d'une infinité de réels. Parmi eux, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: on l'appelle la **mesure principale**.

Méthode pour trouver la mesure principale d'un réel de la forme $p\pi/q$: on retire ou on ajoute des multiples de 2π (c'est-à-dire $2q\pi/q$) jusqu'à tomber dans $]-\pi ; \pi]$. Pour $17\pi/3$: $17\pi/3 - 6\pi = 17\pi/3 - 18\pi/3 = -\pi/3$, qui est bien dans $]-\pi ; \pi]$. La mesure principale de $17\pi/3$ est $-\pi/3$.

3. Cosinus et sinus d'un réel

Définition. Soit x un réel et M son point image sur le cercle trigonométrique. Le **cosinus** de x , noté $\cos x$, est l'abscisse de M ; le **sinus** de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée de M . Ainsi M a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.

Cette définition prolonge celle du collège. Si x est dans $]0 ; \pi/2[$, on considère le point H , projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H , d'hypoténuse $OM = 1$, et on retrouve $\cos x = OH/OM = OH$ et $\sin x = HM/OM = HM$. La nouvelle définition a l'avantage de donner un sens au cosinus et au sinus de n'importe quel réel, y compris négatif ou supérieur à $\pi/2$.

Conséquences immédiates de la définition :

- Puisque M est sur un cercle de rayon 1, ses coordonnées sont comprises entre -1 et 1 : pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Comme $OM = 1$, le théorème de Pythagore (ou la formule de la distance) donne $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Pour tout réel x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(on note $\cos^2 x$ pour $(\cos x)^2$).

- Puisque x et $x + 2k\pi$ ont la même image : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout entier relatif k .

Signes selon le quadrant. Le signe du cosinus est celui de l'abscisse de M , celui du sinus est celui de l'ordonnée.

Position de M (mesure principale x)	$\cos x$	$\sin x$
$0 < x < \pi/2$ (en haut à droite)	positif	positif
$\pi/2 < x < \pi$ (en haut à gauche)	négatif	positif
$-\pi < x < -\pi/2$ (en bas à gauche)	négatif	négatif
$-\pi/2 < x < 0$ (en bas à droite)	positif	négatif

Utiliser la relation fondamentale. Si l'on connaît $\sin x$, on obtient $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, donc $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ ou $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$. La relation seule ne tranche pas : c'est la position de x (son quadrant) qui donne le signe. Ne jamais oublier cette étape.

4. Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes se retrouvent par la géométrie.

- Pour $\pi/4$: le point M est sur la bissectrice $y = x$, donc $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = c$ avec $2c^2 = 1$, d'où $c = \sqrt{2}/2$ (positif).
- Pour $\pi/3$: le triangle OIM est isocèle en O avec un angle de 60° , donc équilatéral. Le pied de la hauteur issue de M est le milieu de [OI], d'où $\cos(\pi/3) = 1/2$, puis $\sin(\pi/3) = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$.
- Pour $\pi/6$: le point image de $\pi/6$ est le symétrique de celui de $\pi/3$ par rapport à la droite $y = x$, ce qui échange abscisse et ordonnée : $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(\pi/6) = 1/2$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Repère mnémotechnique : de 0 à $\pi/2$, le sinus prend les valeurs $\sqrt{0}/2, \sqrt{1}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{4}/2$, et le cosinus les mêmes dans l'ordre inverse.

Valeurs approchées utiles : $\sqrt{2}/2 \approx 0,707$ et $\sqrt{3}/2 \approx 0,866$.

5. Angles associés

Les symétries du cercle permettent de ramener le calcul de cos et sin de nombreux réels aux valeurs du premier quadrant.

Symétries du cercle et angles associés

$-x$: symétrie par rapport à l'axe des abscisses

$\pi - x$: symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

$\pi + x$: symétrie par rapport à l'origine O

$\pi/2 - x$: symétrie par rapport à la droite $y = x$

Repères complémentaires, sans séquence causale

- **Réel $-x$.** Le point image de $-x$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à l'axe des abscisses : même abscisse, ordonnée opposée.

$$\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

- **Réel $\pi - x$.** Symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : abscisse opposée, même ordonnée.

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin x.$$

- **Réel $\pi + x$.** Symétrique par rapport à l'origine (demi-tour) : les deux coordonnées sont opposées.

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \text{ et } \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

- **Réel $\pi/2 - x$.** Symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$: abscisse et ordonnée s'échangent.

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \text{ et } \sin(\pi/2 - x) = \cos x.$$

- **Réel $\pi/2 + x$.** Quart de tour direct : le point $(a ; b)$ devient $(-b ; a)$.

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x \text{ et } \sin(\pi/2 + x) = \cos x.$$

Application. $\cos(5\pi/6) = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, et $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi/6) = 1/2$. De même, $\sin(4\pi/3) = \sin(\pi + \pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.

Plutôt que d'apprendre ces formules par cœur, il est plus sûr de les **retrouver en dessinant** le cercle, le point $M(x)$ dans le premier quadrant et son symétrique : le dessin dit immédiatement quelle coordonnée change de signe.

6. Équations et inéquations trigonométriques

Équation $\cos x = a$. Si $a > 1$ ou $a < -1$, elle n'a pas de solution. Si $-1 \leq a \leq 1$, on cherche les points du cercle d'abscisse a : ce sont les intersections du cercle avec la droite verticale $x = a$. En général il y a deux points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Si α est un réel tel que $\cos \alpha = a$, alors :

$$\cos x = \cos \alpha \text{ équivaut à } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

Équation $\sin x = a$. Pour $-1 \leq a \leq 1$, on coupe le cercle par la droite horizontale $y = a$. Les deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Si $\sin \alpha = a$:

$$\sin x = \sin \alpha \text{ équivaut à } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

Cas particuliers : $\cos x = 1$ pour $x = 2k\pi$; $\cos x = -1$ pour $x = \pi + 2k\pi$; $\cos x = 0$ pour $x = \pi/2 + k\pi$; $\sin x = 0$ pour $x = k\pi$; $\sin x = 1$ pour $x = \pi/2 + 2k\pi$.

Résoudre $\cos x = a$ sur un intervalle

1. Vérifier que $-1 \leq a \leq 1$
2. Trouver un réel α tel que $\cos \alpha = a$
3. Tracer la droite verticale d'abscisse a
4. Lire les deux points $\pm \alpha + 2k\pi$
5. Garder les solutions de l'intervalle demandé

Dans la pratique, au lycée, on résout sur un intervalle précis, le plus souvent $]-\pi ; \pi]$ ou $[0 ; 2\pi[$, et on ne retient que les solutions de cet intervalle.

Inéquations. Pour résoudre $\cos x \geq a$ sur un intervalle, on repère les points du cercle dont l'abscisse est supérieure ou égale à a : ils forment un arc, à droite de la droite $x = a$. On lit cet arc avec les bornes de l'intervalle imposé. Par exemple, sur $]-\pi ; \pi]$, $\cos x \geq 0$ équivaut à $x \in [-\pi/2 ; \pi/2]$. Pour $\sin x \geq a$, on garde l'arc situé au-dessus de la droite $y = a$.

7. Les fonctions cosinus et sinus

Définition. La fonction **cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos x$. La fonction **sinus** associe à tout réel x le réel $\sin x$.

Périodicité. Pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On dit que ces fonctions sont **périodiques de période 2π** . Graphiquement, la courbe se reproduit identique par translation de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$ (où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses). Il suffit donc d'étudier ces fonctions sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $]-\pi ; \pi]$.

Parité. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x ; sa courbe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x ; sa courbe est alors symétrique par rapport à l'origine O .

- Puisque $\cos(-x) = \cos x$, la fonction **cosinus est paire**.
- Puisque $\sin(-x) = -\sin x$, la fonction **sinus est impaire**.

Grâce à la parité, on peut réduire encore l'étude à $[0 ; \pi]$, puis compléter par symétrie, puis par périodicité.

Tracer une courbe trigonométrique

Étudier sur $[0 ; \pi]$



Compléter sur $[-\pi ; \pi]$ par parité



Reproduire sur $\mathbb{R}$ par translations de 2π

Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Variations sur $[0 ; \pi]$. Quand x croît de 0 à π , le point M parcourt le demi-cercle supérieur de I vers I' . Son abscisse diminue constamment de 1 à -1 : la fonction cosinus est **strictement décroissante** sur $[0 ; \pi]$. Son ordonnée augmente de 0 à 1 entre 0 et $\pi/2$, puis diminue de 1 à 0 entre $\pi/2$ et π : la fonction sinus est **strictement croissante** sur $[0 ; \pi/2]$ et **strictement décroissante** sur $[\pi/2 ; \pi]$.

Par parité on obtient les variations sur $[-\pi ; 0]$: cosinus y est croissante (de -1 à 1) ; sinus est décroissante sur $[-\pi ; -\pi/2]$ (de 0 à -1) puis croissante sur $[-\pi/2 ; 0]$ (de -1 à 0).

Intervalle	$[-\pi ; -\pi/2]$	$[-\pi/2 ; 0]$	$[0 ; \pi/2]$	$[\pi/2 ; \pi]$
cosinus	croissante, de -1 à 0	croissante, de 0 à 1	décroissante, de 1 à 0	décroissante, de 0 à -1
sinus	décroissante, de 0 à -1	croissante, de -1 à 0	croissante, de 0 à 1	décroissante, de 1 à 0

Courbes. Les courbes de cosinus et de sinus sont des **sinusoïdes**, ondulations régulières comprises entre les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$.

- La courbe du sinus passe par l'origine, monte jusqu'à 1 en $\pi/2$, redescend à 0 en π , atteint -1 en $3\pi/2$ et revient à 0 en 2π .
- La courbe du cosinus part de 1 en 0, s'annule en $\pi/2$, vaut -1 en π , s'annule en $3\pi/2$ et revaut 1 en 2π .

Comme $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, la courbe du cosinus se déduit de celle du sinus par une translation de $\pi/2$ vers la gauche : les deux courbes ont exactement la même forme, décalée d'un quart de période.

Fonctions de la forme $x \mapsto \cos(\omega x)$ ou $\sin(\omega x)$. Pour un réel $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto \sin(\omega x)$ est périodique de période $2\pi/\omega$: en effet $\sin(\omega(x + 2\pi/\omega)) = \sin(\omega x + 2\pi) = \sin(\omega x)$. Ce type de fonction modélise les phénomènes périodiques (oscillations, signaux, rythmes biologiques) ; la **fréquence** associée est l'inverse de la période.

Exemples résolus

Exemple 1 : mesures principales et lecture sur le cercle

Énoncé. Déterminer la mesure principale de $31\pi/6$ et de $-17\pi/4$, puis en déduire le cosinus et le sinus de chacun de ces réels.

Résolution. Pour $31\pi/6$: un tour vaut $2\pi = 12\pi/6$. On retire deux tours : $31\pi/6 - 24\pi/6 = 7\pi/6$. Or $7\pi/6 > \pi$, on retire encore un tour : $7\pi/6 - 12\pi/6 = -5\pi/6$. Comme $-\pi < -5\pi/6 \leq \pi$, la mesure principale de $31\pi/6$ est $-5\pi/6$. Le point image est le symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, de celui de $5\pi/6 = \pi - \pi/6$. Donc $\cos(31\pi/6) = \cos(-5\pi/6) = \cos(5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ et $\sin(31\pi/6) = \sin(-5\pi/6) = -\sin(5\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$.

Pour $-17\pi/4$: un tour vaut $8\pi/4$. On ajoute deux tours : $-17\pi/4 + 16\pi/4 = -\pi/4$, qui appartient à $]-\pi ; \pi]$. La mesure principale est $-\pi/4$. Donc $\cos(-17\pi/4) = \cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\sin(-17\pi/4) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$.

Exemple 2 : passer du sinus au cosinus

Énoncé. Soit x un réel de $[\pi/2 ; \pi]$ tel que $\sin x = 3/5$. Calculer $\cos x$, puis $\cos(\pi - x)$ et $\sin(x + \pi)$.

Résolution. D'après la relation fondamentale, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - 9/25 = 16/25$. Donc $\cos x = 4/5$ ou $\cos x = -4/5$. Comme $x \in [\pi/2 ; \pi]$, le point image est dans le demi-plan des abscisses négatives ou nulles : $\cos x \leq 0$. Donc $\cos x = -4/5$. Ensuite $\cos(\pi - x) = -\cos x = 4/5$, et $\sin(x + \pi) = \sin(\pi + x) = -\sin x = -3/5$. Vérification : $(-4/5)^2 + (3/5)^2 = 16/25 + 9/25 = 1$.

Exemple 3 : équation et inéquation sur un intervalle

Énoncé. a) Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation $2\cos x + 1 = 0$. b) Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$.

Résolution. a) $2\cos x + 1 = 0$ équivaut à $\cos x = -1/2$. On cherche un réel de cosinus $-1/2$: $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$. Les points du cercle d'abscisse $-1/2$ sont les images de $2\pi/3$ et de $-2\pi/3$, qui sont tous deux dans $]-\pi ; \pi]$. L'ensemble des solutions est $S = \{-2\pi/3 ; 2\pi/3\}$.

b) $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$ équivaut à $\sin x \geq \sqrt{3}/2$. Les points d'ordonnée égale à $\sqrt{3}/2$ sont les images de $\pi/3$ et de $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$. Les points d'ordonnée supérieure ou égale à $\sqrt{3}/2$ forment l'arc du haut compris entre ces deux points. Sur $[0 ; 2\pi[$, cela correspond à $S = [\pi/3 ; 2\pi/3]$.

Méthodes et pièges

- Pour une mesure principale, ajoute ou retire des multiples de 2π écrits avec le même dénominateur ($2\pi = 6\pi/3 = 8\pi/4 = 12\pi/6$), puis vérifie que le résultat est bien dans $]-\pi ; \pi]$: la borne $-\pi$ est exclue, π est incluse.
- Dessine toujours le cercle avant d'écrire une formule d'angle associé : le dessin te dit quelle coordonnée change de signe, la mémoire peut te trahir.
- Après $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ne choisis jamais le signe au hasard : c'est l'intervalle où se trouve x qui tranche.
- Ne confonds pas les symétries : $\cos(-x) = \cos x$ (cosinus paire), mais $\sin(-x) = -\sin x$ (sinus impaire).

- L'équation $\cos x = a$ a deux familles de solutions, $\pm\alpha + 2k\pi$. Pour $\sin x = a$, ce sont $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$, pas $-\alpha$.
- Vérifie que a est dans $[-1; 1]$ avant de résoudre : $\cos x = 1,2$ n'a aucune solution.
- Sur un intervalle imposé, liste les solutions une par une et contrôle chaque borne : sur $[0; 2\pi]$, $-\pi/3$ n'est pas accepté, il faut écrire $5\pi/3$.
- Ta calculatrice doit être en mode radian pour les fonctions trigonométriques de ce chapitre ; en mode degré, $\cos(\pi/3)$ ne vaudra pas 0,5.
- Écris $\cos^2 x$ pour $(\cos x)^2$, et ne confonds pas avec $\cos(x^2)$, qui est une autre fonction.

Vers le PASS

En PASS, la trigonométrie est un outil plus qu'un sujet. Elle sert à décomposer une force ou un vecteur selon deux axes (projections $F \cdot \cos \theta$ et $F \cdot \sin \theta$), à décrire un mouvement circulaire ou un phénomène oscillant (onde sonore, signal électrique, rythme cardiaque modélisé par une sinusoïde), et à calculer des angles dans les problèmes de biomécanique et d'optique. Les dérivées de $\sin$ et $\cos$, vues en Terminale, interviennent dans les vitesses et accélérations des mouvements périodiques. Le réflexe à garder : travailler en radians, connaître sans hésitation les valeurs remarquables et savoir retrouver un signe sur le cercle, car les QCM jouent souvent sur une erreur de signe ou une confusion degré et radian.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Convertir en radians : 150° et 36° . Convertir en degrés : $7\pi/4$ rad et 1 rad (valeur approchée au dixième).
2. Déterminer la mesure principale de chacun des réels suivants : $13\pi/3$; $-25\pi/6$; $101\pi/4$.
3. Donner la valeur exacte de : $\cos(5\pi/6)$; $\sin(-\pi/3)$; $\cos(3\pi/4)$; $\sin(7\pi/6)$; $\cos(-2\pi/3)$; $\sin(11\pi/4)$.
4. Soit x un réel de $[-\pi/2; 0]$ tel que $\cos x = 5/13$. Calculer $\sin x$.
5. Simplifier, pour tout réel x , l'expression $A = \sin(\pi - x) + \sin(-x) + \cos(\pi/2 - x) + \cos(x + \pi)$.

Niveau 2 : type bac

6. a) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $2\sin x + 1 = 0$.
- b) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$. c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = 0$.
7. a) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos x \geq 1/2$.
- b) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin x < 0$. c) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation $\cos x < -\sqrt{2}/2$.
8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x)$.
 - a) Montrer que f est périodique de période π .
 - b) Étudier la parité de f .
 - c) Calculer $f(0)$, $f(\pi/4)$ et $f(\pi/2)$.
 - d) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
 - e) En utilisant les variations de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$, donner les variations de f sur $[0; \pi/2]$.
9. On veut résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E) : $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

a) On pose $X = \cos x$. Écrire l'équation vérifiée par X et la résoudre. b) En déduire les solutions de (E).

Niveau 3 : vers le PASS

10. Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'équation $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$. (Indication : exprimer $\cos^2 x$ à l'aide de $\sin x$.)

11. On modélise la pression dans une artère, en mmHg, par $P(t) = 100 + 20 \sin(2,5\pi t)$, où t est le temps en secondes.

a) Déterminer la période T de la fonction P et en déduire le nombre de cycles par minute. b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de $P(t)$. c) Déterminer le premier instant $t > 0$ où la pression vaut 110 mmHg.

12. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

A. Pour tout réel x , $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi)$. B. Pour tout réel x , $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$. C. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin x \times \cos x$ est paire. D. L'équation $\cos x = 1,2$ admet au moins une solution réelle. E. Il existe un réel x tel que $\cos x = 0,6$ et $\sin x = 0,7$.

13. Pour tout entier k , on note M_k le point image du réel $k\pi/3$ sur le cercle trigonométrique.

a) Combien de points distincts obtient-on ? Quelle figure forment-ils ? b) Calculer la distance M_0M_1 , puis le périmètre et l'aire de cette figure. c) Même question a) avec les images des réels $k\pi/4$, puis calculer la distance entre les images de 0 et de $\pi/4$ (valeur exacte puis approchée au centième).

Corrigés

1. On utilise $r = d \times \pi/180$.

$150^\circ : 150\pi/180 = 5\pi/6$ rad. $36^\circ : 36\pi/180 = \pi/5$ rad. Pour passer en degrés, $d = r \times 180/\pi$. $7\pi/4$ rad : $7 \times 180/4 = 315^\circ$. 1 rad : $180/\pi \approx 57,295\dots$, soit **environ $57,3^\circ$** .

2. On ajoute ou retire des multiples de 2π écrits avec le même dénominateur.

$13\pi/3 : 2\pi = 6\pi/3$, on retire deux tours : $13\pi/3 - 12\pi/3 = \pi/3$. Mesure principale : $\pi/3$. $-25\pi/6 : 2\pi = 12\pi/6$, on ajoute deux tours : $-25\pi/6 + 24\pi/6 = -\pi/6$. Mesure principale : $-\pi/6$. $101\pi/4 : 2\pi = 8\pi/4$. $101 = 12 \times 8 + 5$, donc on retire douze tours : $101\pi/4 - 96\pi/4 = 5\pi/4$. Comme $5\pi/4 > \pi$, on retire encore un tour : $5\pi/4 - 8\pi/4 = -3\pi/4$. Mesure principale : $-3\pi/4$.

3. On ramène chaque réel au premier quadrant grâce aux angles associés.

$\cos(5\pi/6) = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$. $\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$. $\cos(3\pi/4) = \cos(\pi - \pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. $\sin(7\pi/6) = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$. $\cos(-2\pi/3) = \cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$. $\sin(11\pi/4) : 11\pi/4 - 2\pi = 3\pi/4$, donc $\sin(11\pi/4) = \sin(3\pi/4) = \sin(\pi - \pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

4. Relation fondamentale : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. $1 - 25/169 = 144/169$. Donc $\sin x = 12/13$ ou $\sin x = -12/13$.

Comme $x \in [-\pi/2 ; 0]$, le point image est dans le demi-plan des ordonnées négatives ou nulles, donc $\sin x \leq 0$. Conclusion : **$\sin x = -12/13$** . Vérification : $(5/13)^2 + (12/13)^2 = (25 + 144)/169 = 1$.

5. On transforme chaque terme :

$\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$; $\cos(x + \pi) = -\cos x$. $A = \sin x - \sin x + \sin x - \cos x$, donc **$A = \sin x - \cos x$** .

6. a) $2\sin x + 1 = 0$ équivaut à $\sin x = -1/2$. On a $\sin(\pi/6) = 1/2$, donc $\sin(-\pi/6) = -1/2$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x = -\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = \pi - (-\pi/6) + 2k\pi = 7\pi/6 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$: $-\pi/6 + 2\pi = 11\pi/6$ et $7\pi/6$.

$S = \{7\pi/6; 11\pi/6\}$. b) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$ équivaut à $\cos x = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = \cos(\pi/4)$. Solutions dans $\mathbb{R}$: $x = \pi/4 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/4 + 2k\pi$. Dans $]-\pi; \pi]$: $S = \{-\pi/4; \pi/4\}$. c) Les points du cercle d'abscisse nulle sont $J(0; 1)$ et $J'(0; -1)$, images de $\pi/2$ et de $-\pi/2$. Ces deux points sont diamétralement opposés, donc séparés d'un demi-tour. $S = \{\pi/2 + k\pi, k \text{ entier relatif}\}$.

7. a) $\cos(\pi/3) = 1/2$; les points d'abscisse $1/2$ sont les images de $\pi/3$ et $-\pi/3$. Les points d'abscisse supérieure ou égale à $1/2$ forment l'arc de droite compris entre eux.

$S = [-\pi/3; \pi/3]$. b) $\sin x < 0$: le point image doit être strictement sous l'axe des abscisses. Sur $]-\pi; \pi]$, cela correspond aux réels strictement compris entre $-\pi$ et 0 (en $-\pi$, qui est d'ailleurs exclu de l'intervalle, et en 0 , le sinus est nul). $S =]-\pi; 0[$. c) $\cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ et, sur $[0; 2\pi[$, l'autre réel de cosinus $-\sqrt{2}/2$ est $2\pi - 3\pi/4 = 5\pi/4$. Les points d'abscisse strictement inférieure à $-\sqrt{2}/2$ forment l'arc de gauche entre ces deux points, bornes exclues. $S =]3\pi/4; 5\pi/4[$.

8. a) Pour tout réel x , $f(x + \pi) = \cos(2(x + \pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$. Donc **f est périodique de période π** .

b) Pour tout réel x , $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$, car la fonction cosinus est paire. Donc **f est paire**. c) $f(0) = \cos 0 = 1$; $f(\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0$; $f(\pi/2) = \cos \pi = -1$. d) $f(x) = 0$ équivaut à $\cos(2x) = 0$, soit $2x = \pi/2 + k\pi$, c'est-à-dire $x = \pi/4 + k\pi/2$. Dans $[0; \pi]$: $k = 0$ donne $\pi/4$ et $k = 1$ donne $3\pi/4$ ($k = 2$ donne $5\pi/4 > \pi$). $S = \{\pi/4; 3\pi/4\}$. e) Quand x parcourt $[0; \pi/2]$, $2x$ parcourt $[0; \pi]$ en croissant. Or cosinus est strictement décroissant sur $[0; \pi]$. Donc si $0 \leq a < b \leq \pi/2$, on a $0 \leq 2a < 2b \leq \pi$ et $\cos(2a) > \cos(2b)$. **f est strictement décroissante sur $[0; \pi/2]$, de 1 à -1.**

9. a) L'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$. Discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$, donc $\sqrt{\Delta} = 3$.

$X_1 = (1 - 3)/4 = -1/2$ et $X_2 = (1 + 3)/4 = 1$. **$X = -1/2$ ou $X = 1$** . b) $\cos x = 1$ dans $[0; 2\pi[$ donne $x = 0$. $\cos x = -1/2 = \cos(2\pi/3)$ donne $x = 2\pi/3$ ou $x = -2\pi/3 + 2\pi = 4\pi/3$. **$S = \{0; 2\pi/3; 4\pi/3\}$** .

10. Comme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, l'équation devient $2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$, soit $-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$, c'est-à-dire $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

On pose $X = \sin x$: $2X^2 - X - 1 = 0$, de discriminant 9, de racines $X = 1$ et $X = -1/2$ (même calcul qu'à l'exercice 9). $\sin x = 1$ dans $[0; 2\pi[$: $x = \pi/2$. $\sin x = -1/2$: $\sin(-\pi/6) = -1/2$, d'où $x = -\pi/6 + 2\pi = 11\pi/6$ et $x = \pi - (-\pi/6) = 7\pi/6$. **$S = \{\pi/2; 7\pi/6; 11\pi/6\}$** . Vérification pour $x = 7\pi/6$: $\cos^2 x = (-\sqrt{3}/2)^2 = 3/4$, donc $2 \times 3/4 + (-1/2) - 1 = 3/2 - 3/2 = 0$.

11. a) La fonction $t \mapsto \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2,5\pi$ a pour période $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(2,5\pi) = 0,8$. Donc **$T = 0,8$ s.**



Nombre de cycles par minute : $60/0,8 = 75$ cycles par minute (fréquence $1/0,8 = 1,25$ Hz). b) Comme $-1 \leq \sin(2,5\pi t) \leq 1$, on a $100 - 20 \leq P(t) \leq 100 + 20$. Ces bornes sont atteintes (le sinus prend les valeurs 1 et -1). **Maximum : 120 mmHg ; minimum : 80 mmHg.** c) $P(t) = 110$ équivaut à $20 \sin(2,5\pi t) = 10$, soit $\sin(2,5\pi t) = 1/2$. Les solutions vérifient $2,5\pi t = \pi/6 + 2k\pi$ ou $2,5\pi t = 5\pi/6 + 2k\pi$. La plus petite valeur positive de $2,5\pi t$ est $\pi/6$, d'où $t = (\pi/6)/(2,5\pi) = 1/15$. $t = 1/15$ s $\approx 0,067$ s.

12. A. **Vrai.** Les réels $x + \pi$ et $x - \pi$ diffèrent de 2π , ils ont donc la même image sur le cercle et le même cosinus.

B. **Vrai.** C'est la formule du quart de tour : le point image de $\pi/2 + x$ a pour ordonnée l'abscisse de $M(x)$, donc $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$. C. **Faux.** $g(-x) = \sin(-x) \times \cos(-x) = (-\sin x) \times \cos x = -g(x)$: g est impaire. Elle n'est pas paire puisque, par exemple, $g(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$ et $g(-\pi/4) = -1/2 \neq 1/2$. D. **Faux.** Pour tout réel x , $\cos x \leq 1 < 1,2$. E. **Faux.** On aurait $\cos^2 x + \sin^2 x = 0,36 + 0,49 = 0,85 \neq 1$, ce qui contredit la relation fondamentale.

13. a) Les réels $k\pi/3$ et $(k + 6)\pi/3$ diffèrent de 2π , donc les points se répètent tous les 6 indices. Pour $k = 0, 1, \dots, 5$, on obtient des points distincts régulièrement espacés d'un arc $\pi/3$. **On obtient 6 points, sommets d'un hexagone régulier** inscrit dans le cercle.

b) $M_0 = I(1 ; 0)$ et $M_1(\cos(\pi/3) ; \sin(\pi/3)) = (1/2 ; \sqrt{3}/2)$. $M_0M_1 = \sqrt{((1/2 - 1)^2 + (\sqrt{3}/2)^2)} = \sqrt{(1/4 + 3/4)} = 1$. Périmètre : $6 \times 1 = 6$. L'hexagone se découpe en 6 triangles équilatéraux de côté 1 (de sommet O), chacun d'aire $\sqrt{3}/4$. Aire : $6 \times \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/2 \approx 2,60$ (unités d'aire). c) Avec $k\pi/4$, les points se répètent tous les 8 indices : **8 points, sommets d'un octogone régulier.** Distance entre $I(1 ; 0)$ et le point $(\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2)$: $d^2 = (\sqrt{2}/2 - 1)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 = (1/2 - \sqrt{2} + 1) + 1/2 = 2 - \sqrt{2}$. $d = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,77$.

Produit scalaire et géométrie repérée

COURS • M06 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer un produit scalaire par la formule avec les normes et le cosinus de l'angle.
- Calculer un produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal.
- Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées dans un repère orthonormé.
- Utiliser la symétrie, la bilinéarité et les identités remarquables du produit scalaire.
- Démontrer et caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs ou de deux droites.
- Appliquer la formule d'Al-Kashi pour calculer une longueur ou un angle dans un triangle quelconque.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (cercle de diamètre $[AB]$).
- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un vecteur normal, et les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Déterminer et reconnaître une équation de cercle, en trouver le centre et le rayon.
- Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, et étudier son intersection avec une droite.

Cours

1. Définition par les normes et l'angle

On travaille dans le plan. La **norme** d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est sa longueur : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = AB$. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre réel** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne une mesure de l'angle entre les deux vecteurs. Si l'un des vecteurs est nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Quelques remarques essentielles :

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**, pas un vecteur.
- Comme $\cos(-\theta) = \cos \theta$, le sens de l'angle n'a pas d'importance : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Avec des points : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\text{BAC})$, où BAC est l'angle géométrique en A.
- Le **signe** du produit scalaire renseigne sur l'angle : il est positif si l'angle est aigu ($\cos > 0$), nul si l'angle est droit, négatif si l'angle est obtus.

Le **carré scalaire** de $\vec{u}$ est $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$. On le note $\vec{u}^2$. En particulier $\vec{AB}^2 = AB^2$. C'est le lien fondamental entre produit scalaire et longueurs.

Exemple. Si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 2\pi/3$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 \times \cos(2\pi/3) = 6 \times (-1/2) = -3$.

2. Produit scalaire et projeté orthogonal

Définition. Le **projeté orthogonal** d'un point C sur une droite (AB) est le point H de (AB) tel que (CH) soit perpendiculaire à (AB) (si C est sur (AB), $H = C$).

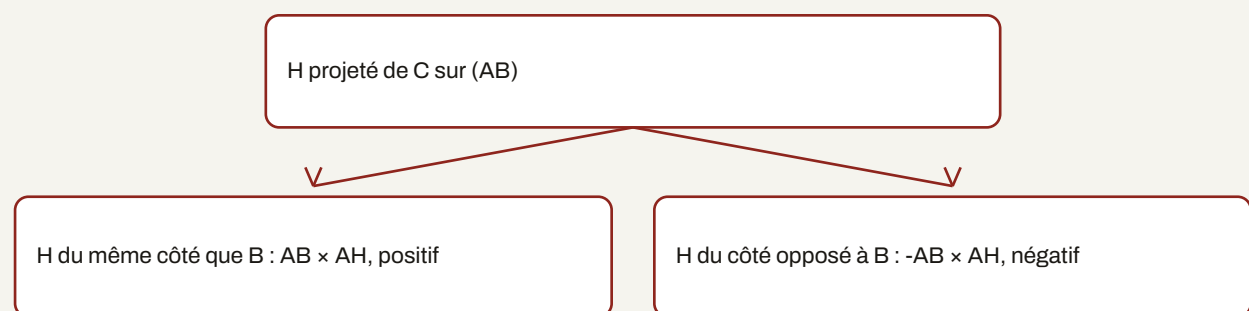
Propriété. Soient A, B, C trois points avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$. Par conséquent :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de même sens ;

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de sens contraires.

Justification. Si l'angle BAC est aigu, H est sur la demi-droite [AB) et, dans le triangle AHC rectangle en H, $\cos(\text{BAC}) = AH/AC$. Donc $AB \times AC \times \cos(\text{BAC}) = AB \times AH$. Si l'angle est obtus, H est de l'autre côté de A et $\cos(\text{BAC}) = -\cos(\text{HAC}) = -AH/AC$, ce qui donne $-AB \times AH$.

Signe de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ par projection



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Cette méthode est la plus rapide dans les figures géométriques (carré, rectangle, triangle équilatéral) où les projetés sont évidents.

Exemple. ABCD est un carré de côté a. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = a^2$.

3. Expressions à l'aide des normes et des coordonnées

Formules de polarisation. En développant $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ grâce aux propriétés du paragraphe 4, on obtient $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, d'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2) \times (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\text{et de même } \vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2) \times (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Avec des points, la seconde formule donne : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1/2) \times (AB^2 + AC^2 - BC^2)$, puisque $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. On peut donc calculer un produit scalaire **en ne connaissant que les trois longueurs** d'un triangle.

Propriété (coordonnées). Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u} \rightarrow (x ; y)$ et $\vec{v} \rightarrow (x' ; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$. Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2 = 2xx' + 2yy'$. En divisant par 2, on obtient le résultat. Cette démonstration utilise la formule de la norme $\sqrt{x^2 + y^2}$, qui n'est valable que dans un repère orthonormé : c'est la condition de validité de la formule.

Exemple. $\vec{u} \rightarrow (2 ; -3)$ et $\vec{v} \rightarrow (4 ; 1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-3) \times 1 = 5$.

Calcul d'un angle. En combinant la définition et les coordonnées, on obtient $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} / (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$, ce qui permet de déterminer un angle à la calculatrice.

Quatre façons de calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

normes et cosinus de l'angle

projeté orthogonal

normes seules (polarisation)

coordonnées en repère orthonormé

Repères complémentaires, sans séquence causale

4. Propriétés de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Ces règles se vérifient immédiatement avec les coordonnées. Elles permettent de développer comme avec des nombres, d'où les **identités remarquables** :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Attention : il n'existe pas de « simplification » par un vecteur. De $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ on ne peut pas déduire $\vec{v} = \vec{w}$; on en déduit seulement $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$, c'est-à-dire que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$.

On utilise souvent la **relation de Chasles** pour décomposer un vecteur avant de développer : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

5. Orthogonalité

Définition et propriété. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire à un angle droit. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Théorème de Pythagore revisité. D'après l'identité remarquable, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Appliqué à $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$, on obtient : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ si et seulement si ABC est rectangle en B. Le produit scalaire contient le théorème et sa réciproque.

Cercle de diamètre [AB]. Soit I le milieu de [AB]. En écrivant $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{MI} - \vec{IA}$, on obtient :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2 = MI^2 - AB^2/4$$

Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ équivaut à $MI = AB/2$: l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre [AB]**. On retrouve que l'angle AMB est droit lorsque M est sur ce cercle (et distinct de A et B).

6. Formule d'Al-Kashi

Théorème (Al-Kashi). Dans un triangle ABC, en notant $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\hat{A}$ l'angle en A :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$\text{et de même } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \hat{C}.$$

Démonstration. $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Donc $BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AB^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$.

Cette formule généralise le théorème de Pythagore : si $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos \hat{A} = 0$ et on retrouve $a^2 = b^2 + c^2$. Elle sert dans deux situations :

- on connaît deux côtés et l'angle compris : on calcule le troisième côté ;
- on connaît les trois côtés : on calcule un angle, avec $\cos \hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$.

Calculer un angle avec Al-Kashi

1. Repérer le côté opposé à l'angle cherché
2. Écrire $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
3. Isoler $\cos \hat{A}$
4. Conclure à la calculatrice en degrés ou radians

7. Équations de droites et vecteur normal

Définition. Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .

Propriété. Dans un repère orthonormé, la droite passant par $A(x_0 ; y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (a ; b)$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Elle admet donc une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Réciproquement, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) admet $\vec{n} = (a ; b)$ comme vecteur normal et $\vec{u} = (-b ; a)$ comme vecteur directeur.

Conséquences pratiques :

- Deux droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont **perpendiculaires** si et seulement si $aa' + bb' = 0$.
- La **hauteur** d'un triangle ABC issue de C est la droite passant par C et de vecteur normal $\vec{AB}$.
- La **médiatrice** de $[AB]$ est la droite passant par le milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\vec{AB}$.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Pour trouver le projeté H de $A(x_0 ; y_0)$ sur la droite d d'équation $ax + by + c = 0$: H est sur la droite passant par A et dirigée par $\vec{n} = (a ; b)$. On écrit $H(x_0 + ta ; y_0 + tb)$, on remplace dans l'équation de d pour trouver t , puis on en déduit H . La distance du point A à la droite d est alors AH , la plus courte distance entre A et un point de d .

8. Équation de cercle et parabole

Propriété. Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\Omega M^2 = r^2$, c'est-à-dire :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

En développant, on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Réciproquement, une telle équation ne représente pas toujours un cercle : on la met sous **forme canonique** en complétant les carrés ($x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, par exemple), on obtient $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, et :

- si $k > 0$, c'est le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon $\sqrt{k}$;
- si $k = 0$, c'est le seul point Ω ;
- si $k < 0$, l'ensemble est vide.

Tangente à un cercle. La tangente au cercle de centre Ω en un point A du cercle est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$: elle a pour vecteur normal $\vec{\Omega A}$.

Parabole. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) dans un repère est une **parabole**. En utilisant la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$:

- son **sommet** est le point $S(\alpha ; \beta)$;
- elle admet pour **axe de symétrie** la droite verticale d'équation $x = \alpha$;
- elle est « tournée vers le haut » si $a > 0$ (S est le point le plus bas) et « vers le bas » si $a < 0$.

Intersection d'une parabole et d'une droite. Pour trouver les points communs à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ et à la droite $y = mx + p$, on résout $ax^2 + bx + c = mx + p$, équation du second degré : deux, une ou zéro solution selon le signe du discriminant, donc deux, un ou aucun point d'intersection.

Exemples résolus

Exemple 1 : longueur avec Al-Kashi

Énoncé. Dans un triangle ABC, $AB = 5$, $AC = 4$ et l'angle BAC mesure 60° . Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis la longueur BC.

Résolution. Par définition, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos 60^\circ = 5 \times 4 \times 1/2 = 10$. D'après Al-Kashi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 25 + 16 - 2 \times 10 = 21$. Donc $BC = \sqrt{21} \approx 4,58$ (dans l'unité de longueur de l'énoncé).

Exemple 2 : angle, hauteur et projeté en repère orthonormé

Énoncé. Dans un repère orthonormé, $A(1 ; 2)$, $B(4 ; 3)$ et $C(2 ; 5)$. a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et en déduire une mesure de l'angle BAC au dixième de degré. b) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. c) Déterminer les coordonnées du pied H de cette hauteur.

Résolution. a) $\vec{AB} = (3 ; 1)$ et $\vec{AC} = (1 ; 3)$. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 1 + 1 \times 3 = 6$. $AB = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Donc $\cos(\text{BAC}) = 6/(\sqrt{10} \times \sqrt{10}) = 6/10 = 0,6$, et $\text{BAC} \approx 53,1^\circ$. b) La hauteur issue de C passe par C et a pour vecteur normal $\vec{AB} = (3 ; 1)$. Elle a une équation de la forme $3x + y + c = 0$. Comme C est dessus : $3 \times 2 + 5 + c = 0$, donc $c = -11$. Équation : $3x + y - 11 = 0$. c) H est sur (AB). Un point de (AB) s'écrit $M(1 + 3t ; 2 + t)$ avec t réel ($A + t \vec{AB}$). On impose qu'il soit sur la hauteur : $3(1 + 3t) + (2 + t) - 11 = 0$, soit $10t - 6 = 0$, donc $t = 0,6$. D'où $H(2,8 ; 2,6)$. Vérification : $\vec{CH} = (0,8 ; -2,4)$ et $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0,8 \times 3 + (-2,4) \times 1 = 0$. Le résultat est cohérent.

Exemple 3 : reconnaître un cercle et tracer une tangente

Énoncé. Soit (C) l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. a) Montrer que (C) est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon. b) Vérifier que $A(5 ; 1)$ appartient à (C) et déterminer une équation de la tangente à (C) en A.

Résolution. a) On complète les carrés : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ et $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$. L'équation devient $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 12 = 0$, soit $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. (C) est le **cercle de centre $\Omega(2 ; -3)$ et de rayon 5**. b) $(5 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 9 + 16 = 25$: **A appartient à (C)**. La tangente en A est perpendiculaire à (ΩA), donc admet $\vec{\Omega A} = (3 ; 4)$ comme vecteur normal : $3x + 4y + c = 0$. Avec A : $15 + 4 + c = 0$, donc $c = -19$. Équation : $3x + 4y - 19 = 0$.

Méthodes et pièges

- Choisis la bonne formule selon les données : angle connu, utilise les normes et le cosinus ; figure avec angles droits, utilise un projeté ; repère orthonormé, utilise les coordonnées ; trois longueurs, utilise la polarisation.
- Le produit scalaire est un nombre : n'écris jamais de flèche sur le résultat.
- La formule $xx' + yy'$ n'est valable que dans un repère orthonormé.
- Avec un projeté, contrôle le sens : si H et B sont de part et d'autre de A, le produit scalaire est négatif.
- Ne simplifie jamais par un vecteur : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$.
- Dans Al-Kashi, le côté isolé à gauche est celui **opposé** à l'angle utilisé dans le cosinus.

- Pour une équation de droite, ne confonds pas vecteur normal $\vec{n} \rightarrow (a ; b)$ et vecteur directeur $\vec{u} \rightarrow (-b ; a)$.
- Avant de conclure qu'une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est un cercle, mets-la sous forme canonique et vérifie que le second membre est strictement positif.
- Pour prouver qu'un triangle est rectangle, un produit scalaire nul entre deux côtés issus du même sommet suffit, et c'est souvent plus rapide que Pythagore.

Vers le PASS

En PASS, le produit scalaire sert d'abord en physique : le **travail d'une force** est $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ (en joules), ce qui explique qu'une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas. La projection d'une force sur un axe (composante utile d'une traction musculaire, force exercée sur une articulation) est un produit scalaire avec un vecteur unitaire. En biophysique, on retrouve aussi le produit scalaire dans le flux d'un champ et dans l'énergie d'un dipôle placé dans un champ électrique. Les équations de droites et de cercles servent à lire des graphiques et à modéliser des trajectoires. Les QCM testent souvent le signe d'un produit scalaire, l'orthogonalité par les coordonnées et l'usage d'Al-Kashi.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soient $\vec{u} \rightarrow$ et $\vec{v} \rightarrow$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 4$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ mesure : a) $\pi/3$; b) $3\pi/4$; c) $\pi/2$.
2. Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \rightarrow (2 ; -3)$, $\vec{v} \rightarrow (4 ; 1)$ et $\vec{w} \rightarrow (6 ; 4)$.
a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$. Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$? b) Déterminer le réel m tel que les vecteurs $(m ; 2)$ et $(3 ; -1)$ soient orthogonaux.
3. ABCD est un carré de côté 4 et I est le milieu de [CD]. Calculer, en utilisant des projetés orthogonaux : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$; $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$.
4. Dans un repère orthonormé :
a) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A(2 ; -1) et de vecteur normal $\vec{n} \rightarrow (3 ; 5)$.
b) Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de la droite d'équation $2x - y + 7 = 0$.
5. a) Écrire une équation du cercle de centre $\Omega(-1 ; 3)$ et de rayon 4, puis la développer.
b) Le point B(3 ; 3) appartient-il à ce cercle ?

Niveau 2 : type bac

6. ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$.
a) Calculer $\cos \hat{A}$, puis une mesure de l'angle $\hat{A}$ au dixième de degré. b) En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. c) Calculer la valeur exacte de $\cos \hat{C}$ et en déduire $\hat{C}$. d) Calculer l'aire exacte du triangle ABC.
7. Dans un repère orthonormé, A(-1 ; 1), B(3 ; -1) et C(2 ; 4).
a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) Déterminer une mesure de l'angle BAC au dixième de degré. c) Déterminer une équation de la hauteur issue de C, puis de la hauteur issue de B. d) En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle et vérifier que (AH) est perpendiculaire à (BC).
8. Dans un repère orthonormé :

a) Montrer que l'équation $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ est celle d'un cercle et préciser son centre et son rayon. b) Quel est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$? c) Soient $A(1 ; 2)$ et $B(5 ; -2)$. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ en traduisant $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$, puis préciser son centre et son rayon.

9. On considère la parabole P d'équation $y = -x^2 + 4x - 3$ et la droite D d'équation $y = x - 3$.

a) Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de P . b) Déterminer les points d'intersection de P avec l'axe des abscisses. c) Déterminer les points d'intersection de P et de D .

Niveau 3 : vers le PASS

10. A et B sont deux points tels que $AB = 6$, et I est le milieu de $[AB]$.

a) Démontrer que, pour tout point M , $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - 9$. b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16$. c) Même question pour $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -9$, puis pour $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -10$.

11. Dans un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $x - 2y + 3 = 0$ et le point $A(4 ; 1)$.

a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d . b) En déduire la distance du point A à la droite d . c) Le cercle de centre A et de rayon 2 coupe-t-il d ? Et le cercle de centre A et de rayon 3 ?

12. Le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne $\vec{AB}$ est $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ (en joules, avec F en newtons et AB en mètres).

a) Une force de 200 N fait un angle de 30° avec un déplacement de 3 m. Calculer W . b) Dans un repère orthonormé (unités : N pour la force, m pour le déplacement), $\vec{F}(150 ; 80)$ et $\vec{AB}(2 ; -1)$. Calculer W . c) Dans la situation b), calculer $\|\vec{F}\|$ et une mesure de l'angle entre $\vec{F}$ et $\vec{AB}$ au dixième de degré.

13. Vrai ou faux ? Justifier.

A. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ avec $\vec{u}$ non nul, alors $\vec{v} = \vec{w}$. B. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. C. Les droites d'équations $2x + 3y - 1 = 0$ et $3x - 2y + 5 = 0$ sont perpendiculaires. D. Dans tout parallélogramme $ABCD$, $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. E. L'équation $x^2 + y^2 = -4$ est celle d'un cercle.

Corrigés

1. On applique $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 12$.

a) $12 \times \cos(\pi/3) = 12 \times 1/2 = 6$. b) $12 \times \cos(3\pi/4) = 12 \times (-\sqrt{2}/2) = -6\sqrt{2} \approx -8,49$. c) $12 \times \cos(\pi/2) = 12 \times 0 = 0$ (vecteurs orthogonaux).

2. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-3) \times 1 = 8 - 3 = 5$.

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0$: $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux. b) $(m ; 2) \cdot (3 ; -1) = 3m - 2$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $3m - 2 = 0$, soit $m = 2/3$.

3. Le côté vaut 4.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$: le projeté de C sur (AB) est B , donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = 16$. $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$: les vecteurs sont orthogonaux (angle droit en A), donc 0. $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$: $\vec{CD} = -\vec{AB}$ (côtés opposés du carré), donc $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB^2 = -16$. $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$: le projeté de I sur (AB) est le milieu K de $[AB]$ (car I est le milieu de $[CD]$ et (IK) est parallèle à (AD) , donc perpendiculaire à (AB)). K est du même côté que B , donc $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = AB \times AK = 4 \times 2 = 8$.

4. a) Une équation est de la forme $3x + 5y + c = 0$. A appartient à la droite : $3 \times 2 + 5 \times (-1) + c = 0$, soit $1 + c = 0$, donc $c = -1$. Équation : $3x + 5y - 1 = 0$.
- b) Pour $ax + by + c = 0$, $n \rightarrow (a ; b)$ est normal et $u \rightarrow (-b ; a)$ est directeur. Ici $a = 2$ et $b = -1$: **vecteur normal** $(2 ; -1)$, **vecteur directeur** $(1 ; 2)$. Contrôle : $2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$.
5. a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$. En développant : $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 16 = 0$, soit $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.
- b) $(3 + 1)^2 + (3 - 3)^2 = 16 + 0 = 16$: **oui, B appartient au cercle**.
6. a) Al-Kashi avec le côté opposé à $\hat{A}$, $BC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$, soit $64 = 49 + 25 - 70 \cos \hat{A}$. Donc $70 \cos \hat{A} = 10$ et $\cos \hat{A} = 1/7$. À la calculatrice, $\hat{A} \approx 81,8^\circ$.
- b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A} = 7 \times 5 \times 1/7 = 5$. Contrôle par polarisation : $(1/2)(AB^2 + AC^2 - BC^2) = (1/2)(49 + 25 - 64) = 5$. c) Côté opposé à $\hat{C}$: AB . $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \hat{C}$, soit $49 = 25 + 64 - 80 \cos \hat{C}$. Donc $80 \cos \hat{C} = 40$ et $\cos \hat{C} = 1/2$, d'où $\hat{C} = 60^\circ$. d) La hauteur issue de A a pour longueur $h = AC \times \sin \hat{C}$ (triangle rectangle formé par A, C et le pied de la hauteur, l'angle $\hat{C}$ étant aigu). $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, donc $h = 5\sqrt{3}/2$. Aire = $(1/2) \times BC \times h = (1/2) \times 8 \times 5\sqrt{3}/2 = 10\sqrt{3} \approx 17,32$ (unités d'aire).
7. a) $\overrightarrow{AB} \rightarrow (4 ; -2)$ et $\overrightarrow{AC} \rightarrow (3 ; 3)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 + (-2) \times 3 = 12 - 6 = 6$.
- b) $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $\cos(\widehat{BAC}) = 6 / (2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}) = 6 / (6\sqrt{10}) = 1/\sqrt{10} \approx 0,316$. Donc $\widehat{BAC} \approx 71,6^\circ$. c) Hauteur issue de C : vecteur normal $\overrightarrow{AB} \rightarrow (4 ; -2)$, équation $4x - 2y + c = 0$. Avec $C(2 ; 4) : 8 - 8 + c = 0$, donc $c = 0$. En divisant par 2 : $2x - y = 0$. Hauteur issue de B : vecteur normal $\overrightarrow{AC} \rightarrow (3 ; 3)$, ou $(1 ; 1)$ qui lui est colinéaire. Équation $x + y + c = 0$. Avec $B(3 ; -1) : 3 - 1 + c = 0$, donc $c = -2 : x + y - 2 = 0$. d) L'orthocentre est l'intersection des hauteurs : $y = 2x$ et $x + 2x - 2 = 0$, donc $x = 2/3$ et $y = 4/3$. $H(2/3 ; 4/3)$. Vérification : $\overrightarrow{AH} \rightarrow (2/3 + 1 ; 4/3 - 1) = (5/3 ; 1/3)$ et $\overrightarrow{BC} \rightarrow (-1 ; 5)$. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -5/3 + 5/3 = 0 : (\overrightarrow{AH})$ est bien perpendiculaire à $(\overrightarrow{BC})$, ce qui confirme que les trois hauteurs sont concourantes en H.
8. a) $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$ et $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$. L'équation devient $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 9 - 1 + 1 = 0$, soit $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$. **Cercle de centre $(-3 ; 1)$ et de rayon 3**.
- b) $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ et $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$. On obtient $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 + 4 - 10 = -5$. Une somme de carrés ne peut pas être négative : **l'ensemble est vide**. c) $\overrightarrow{MA} \rightarrow (1 - x ; 2 - y)$ et $\overrightarrow{MB} \rightarrow (5 - x ; -2 - y)$. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1 - x)(5 - x) + (2 - y)(-2 - y) = x^2 - 6x + 5 + y^2 - 4$. La condition $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ donne $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$, soit $(x - 3)^2 + y^2 = 8$. **Centre $(3 ; 0)$** , qui est bien le milieu de $[AB]$, et **rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$** . Contrôle : $AB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$, dont la moitié vaut $2\sqrt{2}$.
9. a) $a = -1$, $b = 4 : \alpha = -b/(2a) = -4/(-2) = 2$ et $\beta = -4 + 8 - 3 = 1$. **Sommet $S(2 ; 1)$, axe de symétrie $x = 2$** . Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas : S est son point le plus haut.
- b) $-x^2 + 4x - 3 = 0$. $\Delta = 16 - 12 = 4$, racines $x = (-4 - 2)/(-2) = 3$ et $x = (-4 + 2)/(-2) = 1$. **Points $(1 ; 0)$ et $(3 ; 0)$** , symétriques par rapport à l'axe $x = 2$, ce qui est cohérent. c) $-x^2 + 4x - 3 = x - 3$ équivaut à $-x^2 + 3x = 0$, soit $x(3 - x) = 0 : x = 0$ ou $x = 3$. Les ordonnées s'obtiennent avec D : $0 - 3 = -3$ et $3 - 3 = 0$. **Points $(0 ; -3)$ et $(3 ; 0)$** .



10. a) Par Chasles, $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{MI} - \vec{IA}$ (I milieu de [AB]). Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2$. Or $IA = AB/2 = 3$, donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - 9$.

b) $MI^2 - 9 = 16$ équivaut à $MI^2 = 25$, soit $MI = 5$. **Cercle de centre I et de rayon 5.** c) $MI^2 - 9 = -9$ équivaut à $MI = 0$: **l'ensemble est le seul point I.** $MI^2 - 9 = -10$ équivaut à $MI^2 = -1$, impossible : **l'ensemble est vide.**

11. a) $\vec{n} = (1; -2)$ est normal à d. H est sur la droite passant par A dirigée par $\vec{n}$: $H(4 + t; 1 - 2t)$. On impose $H \in d$: $(4 + t) - 2(1 - 2t) + 3 = 0$, soit $5 + 5t = 0$, donc $t = -1$. **H(3; 3).** Contrôle : $3 - 6 + 3 = 0$.

b) $AH = \sqrt{(3 - 4)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,24$. c) Le cercle de rayon r coupe d si et seulement si la distance de A à d est inférieure ou égale à r. $\sqrt{5} \approx 2,24 > 2$: **le cercle de rayon 2 ne coupe pas d.** $\sqrt{5} < 3$: **le cercle de rayon 3 coupe d en deux points.**

12. a) $W = F \times AB \times \cos 30^\circ = 200 \times 3 \times \sqrt{3}/2 = 300\sqrt{3} \approx 519,6$ J.

b) $W = 150 \times 2 + 80 \times (-1) = 300 - 80 = 220$ J. c) $\|\vec{F}\| = \sqrt{(150^2 + 80^2)} = \sqrt{(22\,500 + 6\,400)} = \sqrt{28\,900} = 170$ N. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(4 + 1)} = \sqrt{5}$ m. $\cos \theta = 220/(170 \times \sqrt{5}) \approx 220/380,1 \approx 0,579$, donc $\theta \approx 54,6^\circ$.

13. A. **Faux.** Contre-exemple : $\vec{u} = (1; 0)$, $\vec{v} = (0; 1)$, $\vec{w} = (0; 2)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{u} \cdot \vec{w}$ mais $\vec{v} \neq \vec{w}$.

B. **Vrai.** $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, donc l'égalité équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. C. **Vrai.** Vecteurs normaux $(2; 3)$ et $(3; -2)$: $2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$, ils sont orthogonaux, donc les droites sont

perpendiculaires. D. **Vrai.** $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Donc $AC^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + AD^2$ et $BD^2 = AD^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + AB^2$. En additionnant : $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$. E. **Faux.** $x^2 + y^2 \geq 0$ pour tous réels x et y : aucun point ne vérifie l'équation, l'ensemble est vide.

Probabilités conditionnelles et indépendance

COURS • M07 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer une probabilité conditionnelle à partir de sa définition, d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre.
- Distinguer $P(A \cap B)$, $P(B | A)$ et $P(A | B)$, et identifier dans un énoncé laquelle est donnée ou demandée.
- Construire un arbre pondéré à partir d'un énoncé et le compléter avec les règles de somme.
- Calculer la probabilité d'un chemin par la formule des probabilités composées.
- Reconnaître une partition de l'univers et appliquer la formule des probabilités totales.
- Inverser un conditionnement : calculer $P(A | B)$ quand l'énoncé donne $P(B | A)$.
- Démontrer que deux événements sont indépendants, ou qu'ils ne le sont pas.
- Utiliser l'indépendance de A et B pour obtenir celle de $\bar{A}$ et B.
- Modéliser la succession de deux épreuves indépendantes et calculer la probabilité d'une issue par un produit.

Cours

1. Rappels : événements et probabilités

Une expérience aléatoire a un ensemble d'issues possibles, l'**univers** Ω . Un **événement** est une partie de Ω . Pour deux événements A et B :

- $A \cap B$ (« A et B ») est réalisé quand les deux le sont ;
- $A \cup B$ (« A ou B ») est réalisé quand au moins l'un des deux l'est ;
- $\bar{A}$, l'événement **contraire** de A (« non A »), est réalisé quand A ne l'est pas ;

- A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$: ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Une loi de probabilité P associe à chaque événement un nombre de $[0 ; 1]$, avec $P(\Omega) = 1$, et vérifie :

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.

En situation d'**équiprobabilité** (toutes les issues ont la même probabilité), $P(A) = (\text{nombre d'issues de } A) / (\text{nombre total d'issues})$.

2. Probabilité conditionnelle

Une information modifie les probabilités. Si l'on sait qu'une carte tirée dans un jeu de 32 cartes est rouge, la probabilité que ce soit un cœur n'est plus $1/4$ mais $1/2$: on ne raisonne plus sur les 32 cartes, mais sur les 16 rouges. L'univers est « restreint » à l'événement connu.

Définition. Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est le nombre

$$P(B | A) = P(A \cap B) / P(A).$$

Dans les sujets de lycée, ce nombre est aussi noté P avec A en indice, devant (B) ; les deux notations désignent la même chose. On lit toujours « probabilité de B sachant A ». L'événement **après** la barre est celui qu'on **sait réalisé**.

Pourquoi cette formule ? En situation d'équiprobabilité, savoir que A est réalisé revient à ne garder que les issues de A. Parmi elles, celles qui réalisent B sont celles de $A \cap B$. Donc $P(B | A) = \text{card}(A \cap B) / \text{card}(A)$; en divisant numérateur et dénominateur par $\text{card}(\Omega)$, on retrouve $P(A \cap B) / P(A)$. La définition générale prolonge ce cas.

Propriétés. Pour A fixé (avec $P(A) \neq 0$), l'application $B \mapsto P(B | A)$ est une loi de probabilité. En particulier :

- $0 \leq P(B | A) \leq 1$;
- $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$;
- $P(A | A) = 1$.

Attention : en général $P(B | A) \neq P(A | B)$. La probabilité qu'une personne ayant de la fièvre ait la grippe n'est pas la probabilité qu'une personne grippée ait de la fièvre. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Formule des probabilités composées. Si $P(A) \neq 0$: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B | A)$.

C'est la formule qu'on utilise le plus : elle donne la probabilité que **deux** événements se réalisent, en enchaînant « A d'abord, puis B sachant A ».

Avec un tableau croisé d'effectifs. Quand les données sont des effectifs, une probabilité conditionnelle est une proportion **dans une ligne ou une colonne** : $P(B | A) = (\text{effectif de } A \cap B) / (\text{effectif total de } A)$. C'est souvent la lecture la plus sûre.

3. Arbres pondérés

Un **arbre pondéré** représente une expérience en plusieurs étapes. Chaque branche porte une probabilité :

- les branches issues de la **racine** portent des probabilités simples, $P(A)$ et $P(\bar{A})$;
- les branches de **second niveau** portent des probabilités **conditionnelles** : la branche qui va de A vers B porte $P(B | A)$.

Lire un arbre pondéré

1. Racine • 2. Premier niveau : $P(A)$ et $P(\bar{A})$ • 3. Second niveau : $P(B | A)$, $P(\bar{B} | A)$, $P(B | \bar{A})$, $P(\bar{B} | \bar{A})$ • 4. Chemin : produit des probabilités • 5. Événement : somme des chemins

Les règles de calcul :

- **Règle des nœuds** : la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1. Ainsi $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$.
- **Règle des chemins** : la probabilité d'un chemin (une suite de branches) est le **produit** des probabilités rencontrées. Le chemin A puis B a pour probabilité $P(A) \times P(B | A) = P(A \cap B)$.
- **Règle des événements** : la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.

Les quatre extrémités d'un arbre à deux niveaux correspondent aux événements $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, dont les probabilités ont pour somme 1. C'est un contrôle utile.

Construire l'arbre. On repère dans l'énoncé quelle information est donnée « sans condition » (elle va au premier niveau) et laquelle est donnée « parmi » ou « sachant » (elle va au second niveau). Une phrase du type « 3 % des pièces de la machine A sont défectueuses » se traduit par $P(D | A) = 0,03$, pas par $P(A \cap D) = 0,03$.

4. Formule des probabilités totales

Définition. Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$, tous de probabilité non nulle, forment une **partition** de l'univers Ω s'ils sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est Ω . Autrement dit, chaque issue appartient à **un et un seul** des A_i .

L'exemple le plus courant est la partition $\{A ; \bar{A}\}$. Une population répartie en trois groupes A, B, C sans recouvrement en est un autre.

Formule des probabilités totales. Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de Ω , alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$= P(A_1) \times P(B | A_1) + P(A_2) \times P(B | A_2) + \dots + P(A_n) \times P(B | A_n).$$

Justification. Les événements $A_1 \cap B, \dots, A_n \cap B$ sont deux à deux incompatibles (car les A_i le sont), et leur réunion est B (car toute issue de B est dans exactement un A_i). Les probabilités s'additionnent, puis on applique la formule des probabilités composées à chaque terme.

Sur un arbre, cette formule n'est rien d'autre que la règle des événements : on additionne tous les chemins qui aboutissent à B. Avec la partition $\{A ; \bar{A}\}$:

$$P(B) = P(A) \times P(B | A) + P(\bar{A}) \times P(B | \bar{A})$$

Inverser le conditionnement. L'énoncé donne souvent $P(B | A)$ (par exemple la probabilité qu'un test soit positif chez un malade) et demande $P(A | B)$ (la probabilité d'être malade quand le test est positif). On revient à la définition :

$$P(A | B) = P(A \cap B) / P(B) = P(A) \times P(B | A) / P(B),$$

où $P(B)$ se calcule par la formule des probabilités totales.

Inverser un conditionnement

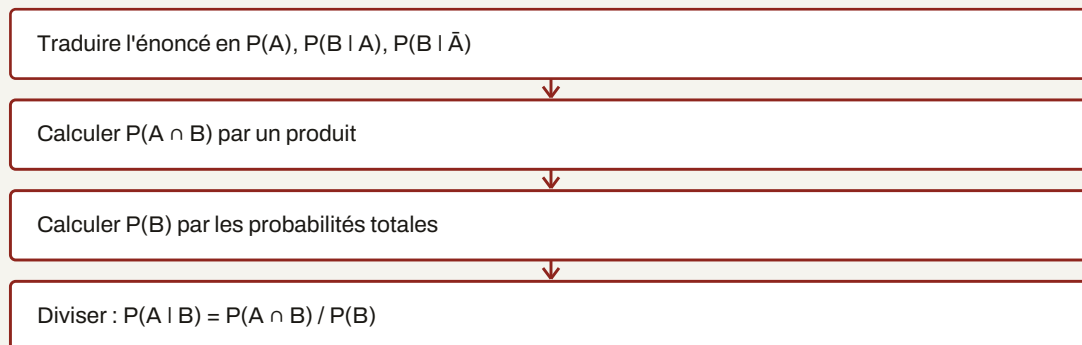


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

5. Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(B | A) = P(B)$.

En effet, si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ équivaut, en divisant par $P(A)$, à $P(A \cap B)/P(A) = P(B)$, c'est-à-dire $P(B | A) = P(B)$. C'est le sens intuitif : savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

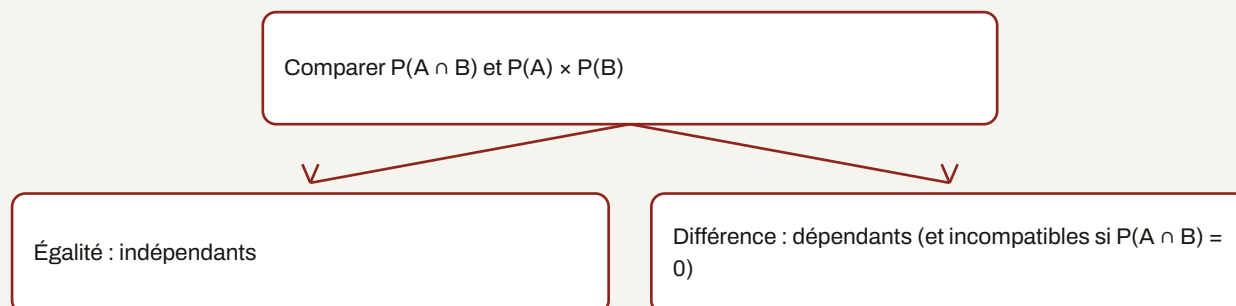
Démontrer l'indépendance. On calcule séparément $P(A \cap B)$ et le produit $P(A) \times P(B)$, puis on compare. Égalité : indépendance. Différence, même petite : dépendance (dans le cadre du modèle choisi).

Propriété. Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants (et de même A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$).

Démonstration. $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B, donc $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \times (1 - P(A)) = P(\bar{A}) \times P(B)$. On applique ensuite le même raisonnement en échangeant les rôles pour obtenir les autres couples.

Indépendant n'est pas incompatible. Ce sont deux notions sans rapport, et même presque opposées : si A et B sont incompatibles avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = 0$ alors que $P(A) \times P(B) > 0$. Ils ne sont donc **pas** indépendants : savoir que A est réalisé apprend que B ne l'est pas.

A et B ont des probabilités non nulles



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Sur un arbre, A et B sont indépendants si et seulement si $P(B | A) = P(B | \bar{A})$ (avec $0 < P(A) < 1$) : les branches menant à B portent la même probabilité quel que soit le premier niveau.

6. Succession de deux épreuves indépendantes

On enchaîne deux expériences aléatoires dont les résultats ne s'influencent pas : lancer un dé puis lancer une pièce, tirer une boule **avec remise** puis en tirer une autre, interroger deux personnes choisies indépendamment dans une grande population.

L'univers de l'expérience globale est l'ensemble des **couples** $(x ; y)$, où x est une issue de la première épreuve et y une issue de la seconde. On dit que c'est le **produit** des deux univers.

Propriété (modélisation). Pour une succession de deux épreuves indépendantes, la probabilité du couple $(x ; y)$ est le produit des probabilités : $P((x ; y)) = P_1(x) \times P_2(y)$.

Sur l'arbre correspondant, les probabilités du second niveau sont les mêmes sur toutes les branches, quelle que soit l'issue de la première épreuve. On peut aussi présenter l'univers dans un **tableau à double entrée** quand les issues sont peu nombreuses.

Avec ou sans remise. Un tirage avec remise remet l'urne dans son état initial : les deux tirages sont indépendants. Sans remise, la composition de l'urne change après le premier tirage : la probabilité au second tirage **dépend** du premier, et il faut un arbre avec des probabilités conditionnelles différentes selon la branche.

Épreuve de Bernoulli. Une épreuve à deux issues, « succès » de probabilité p et « échec » de probabilité $1 - p$, est une épreuve de Bernoulli. Répéter deux fois de manière indépendante une telle épreuve donne : $P(\text{deux succès}) = p^2$, $P(\text{exactement un succès}) = 2p(1 - p)$, $P(\text{aucun succès}) = (1 - p)^2$. La somme vaut bien $p^2 + 2p(1 - p) + (1 - p)^2 = (p + 1 - p)^2 = 1$.

Exemples résolus

Exemple 1 : test de dépistage

Énoncé. Dans une population, 2 % des personnes sont porteuses d'une maladie. Un test est positif chez 95 % des porteurs et chez 3 % des non-porteurs. On choisit une personne au hasard. On note M : « la personne est porteuse » et T : « le test est positif ». a) Construire l'arbre pondéré. b) Calculer $P(T)$. c) Le test est positif : quelle est la probabilité que la personne soit porteuse ?

Résolution. a) Premier niveau : $P(M) = 0,02$ et $P(\bar{M}) = 0,98$. Second niveau : $P(T | M) = 0,95$, $P(T | \bar{M}) = 0,03$, $P(\bar{T} | M) = 0,05$, $P(\bar{T} | \bar{M}) = 0,97$. b) M et $\bar{M}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M) \times P(T | M) + P(\bar{M}) \times P(T | \bar{M}) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,03 = 0,019 + 0,0294 = 0,0484$. c) $P(M | T) = P(M \cap T) / P(T) = 0,019 / 0,0484 \approx 0,393$. Interprétation : moins de 40 % des tests positifs correspondent à un porteur, parce que la maladie est rare et que les faux positifs, issus d'un groupe très nombreux, sont plus fréquents que les vrais positifs.

Exemple 2 : tableau croisé et indépendance

Énoncé. Dans un lycée de 500 élèves, 280 sont des filles. 150 filles et 90 garçons suivent la spécialité SVT. On choisit un élève au hasard ; F : « c'est une fille », S : « il suit SVT ». a) Calculer $P(S)$, $P(S | F)$ et $P(F | S)$. b) F et S sont-ils indépendants ?

Résolution. On complète le tableau : 220 garçons ; 240 élèves suivent SVT ; 130 filles et 130 garçons ne la suivent pas.

	S	S^c	Total
F	150	130	280
F^c	90	130	220
Total	240	260	500

a) $P(S) = 240/500 = 0,48$. $P(S | F) = 150/280 = 15/28 \approx 0,536$ (on reste dans la ligne des filles). $P(F | S) = 150/240 = 0,625$ (on reste dans la colonne SVT). b) $P(F \cap S) = 150/500 = 0,3$ et $P(F) \times P(S) = 0,56 \times 0,48 = 0,2688$. Comme $0,3 \neq 0,2688$, F et S ne sont pas indépendants. On le voit aussi avec $P(S | F) \approx 0,536 \neq P(S) = 0,48$.

Exemple 3 : deux épreuves indépendantes

Énoncé. On lance un dé équilibré à six faces, puis on tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 vertes. On note A : « le dé donne un nombre pair » et R : « la boule est rouge ». a) Calculer $P(A \cap R)$. b) Calculer la probabilité qu'un seul des deux événements A et R se réalise.

Résolution. Les deux épreuves sont indépendantes : $P(A) = 3/6 = 1/2$ et $P(R) = 3/5$, quelle que soit l'issue du dé. a) $P(A \cap R) = P(A) \times P(R) = 1/2 \times 3/5 = 3/10$. b) « Un seul » se réalise par deux chemins incompatibles : $A \cap \bar{R}$ ou $\bar{A} \cap R$. $P(A \cap \bar{R}) = 1/2 \times 2/5 = 1/5$ et $P(\bar{A} \cap R) = 1/2 \times 3/5 = 3/10$. La probabilité cherchée est $1/5 + 3/10 = 2/10 + 3/10 = 1/2$.

Méthodes et pièges

- Avant tout calcul, traduis chaque donnée de l'énoncé en notation : « parmi les A, x % sont B » donne $P(B | A)$, « x % sont A et B » donne $P(A \cap B)$.
- Ne confonds jamais $P(B | A)$ et $P(A | B)$: l'événement connu est celui écrit après la barre.
- Dans un arbre, le second niveau porte des probabilités conditionnelles ; vérifie que chaque nœud a des branches de somme 1.
- Pour calculer $P(B)$ quand B dépend d'un premier niveau, pense immédiatement à la formule des probabilités totales et additionne tous les chemins qui mènent à B.
- Pour un « sachant » inversé par rapport à l'arbre, reviens à la définition : $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$.
- Pour démontrer l'indépendance, calcule $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$ séparément et compare ; une intuition ne suffit pas.
- Ne confonds pas incompatibles ($P(A \cap B) = 0$) et indépendants ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$).
- Un tirage sans remise rend les tirages dépendants : les probabilités du second niveau changent selon la branche.
- Garde des valeurs exactes (fractions) le plus longtemps possible et arrondis seulement le résultat final.

Vers le PASS

En PASS, ce chapitre est au cœur de la biostatistique et de l'épidémiologie. La sensibilité d'un test est $P(T | M)$, sa spécificité $P(\bar{T} | \bar{M})$; la valeur prédictive positive $P(M | T)$ se calcule exactement comme dans l'exemple 1, et c'est le **théorème de Bayes** qui généralise cette inversion du conditionnement. On montre en PASS que la valeur prédictive dépend fortement de la prévalence, ce qui explique pourquoi un test très performant peut produire beaucoup de faux positifs dans une population où la maladie est rare. L'indépendance sert aussi en génétique (transmission de deux gènes indépendants) et pour construire les lois de probabilité discrètes. Les QCM testent sans relâche la confusion $P(A | B)$ et $P(B | A)$, et la confusion indépendance et incompatibilité.

Suite en PASS : Conditionnement, arbres et théorème de Bayes

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. On donne $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,1$. Calculer $P(B | A)$, $P(A | B)$ et $P(A \cup B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. On donne $P(A) = 0,3$, $P(B | A) = 0,6$ et $P(B | \bar{A}) = 0,2$.
a) Construire l'arbre pondéré complet. b) Calculer $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$ et $P(B)$. c) Calculer $P(A | B)$.
3. Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules. On note R_1 : « la première est rouge » et R_2 : « la seconde est rouge ».
a) Donner $P(R_1)$ et $P(R_2 | R_1)$. b) Calculer $P(R_1 \cap R_2)$. c) Calculer $P(R_2)$.
4. A et B sont deux événements indépendants avec $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,6$. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

5. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes (4 couleurs de 8 cartes, dont un roi par couleur). On note C : « la carte est un cœur » et K : « la carte est un roi ». Les événements C et K sont-ils indépendants ? Donner $P(K | C)$.

Niveau 2 : type bac

6. Un laboratoire analyse des échantillons venant de trois sites : 50 % viennent du site A, 30 % du site B et 20 % du site C. La proportion d'échantillons contaminés est de 2 % pour A, 4 % pour B et 5 % pour C. On choisit un échantillon au hasard ; on note K : « l'échantillon est contaminé ».
- a) Construire un arbre pondéré. b) Calculer $P(K)$. c) Un échantillon est contaminé. Quelle est la probabilité qu'il vienne du site A ? d) Un échantillon n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité qu'il vienne du site C ? (arrondir au millièème)
7. Dans une enquête portant sur 1 000 personnes, 600 sont vaccinées contre la grippe. Pendant l'hiver, 30 personnes vaccinées et 120 personnes non vaccinées ont eu la grippe. On choisit une personne au hasard ; V : « elle est vaccinée », G : « elle a eu la grippe ».
- a) Dresser le tableau croisé des effectifs. b) Calculer $P(G)$, $P(G | V)$ et $P(G | \bar{V})$. c) Calculer $P(V | G)$ et interpréter. d) Les événements V et G sont-ils indépendants ?
8. On lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité 0,6, puis un dé équilibré à six faces. Les deux lancers sont indépendants.
- a) Calculer la probabilité d'obtenir pile et 6. b) Calculer la probabilité d'obtenir face et un nombre supérieur ou égal à 5. c) Calculer la probabilité d'obtenir pile ou 6.
9. On donne $P(A) = 0,4$, $P(B | A) = 0,7$ et $P(B) = 0,52$.
- a) Calculer $P(A \cap B)$, puis $P(\bar{A} \cap B)$. b) En déduire $P(B | \bar{A})$. c) Calculer $P(A | B)$, valeur exacte puis arrondie au millièème. d) On garde $P(A) = 0,4$ et $P(B | A) = 0,7$, mais on note $x = P(B | \bar{A})$. Pour quelle valeur de x les événements A et B sont-ils indépendants ?

Niveau 3 : vers le PASS

10. Un test a une sensibilité de 0,9 ($P(T | M) = 0,9$) et une spécificité de 0,95 ($P(\bar{T} | \bar{M}) = 0,95$). On note $p = P(M)$ la prévalence, avec $0 < p < 1$.
- a) Exprimer $P(M | T)$ en fonction de p. b) Calculer $P(M | T)$ pour $p = 0,01$ et pour $p = 0,2$. c) À partir de quelle prévalence la probabilité d'être malade sachant le test positif dépasse-t-elle 0,5 ?
11. a) Démontrer que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants. b) Démontrer que deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants. c) Un événement A de probabilité 0,5 peut-il être indépendant de lui-même ? Pour quelles valeurs de $P(A)$ un événement est-il indépendant de lui-même ?
12. Pour un gène à deux allèles A (dominant) et a (récessif), deux parents hétérozygotes Aa ont des enfants. Chaque enfant reçoit au hasard et de façon indépendante un allèle de chaque parent, chacun avec la probabilité 1/2, et les enfants sont indépendants entre eux.
- a) Calculer la probabilité qu'un enfant soit aa, puis qu'il soit Aa. b) Les parents ont deux enfants. Calculer la probabilité qu'au moins l'un des deux soit aa. c) Un enfant présente le phénotype dominant (il n'est pas aa). Quelle est la probabilité qu'il soit hétérozygote ? d) Cet enfant, de phénotype dominant, a plus tard un enfant avec une personne aa. Calculer la probabilité que cet enfant soit aa.

13. On dispose de deux urnes : U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire, U_2 contient 1 blanche et 3 noires. On lance une pièce équilibrée pour choisir l'urne, puis on tire une boule. On note B_1 : « la boule tirée est blanche ».

a) Calculer $P(B_1)$. b) La boule est blanche : quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ? c) On remet la boule dans la même urne et on tire à nouveau dans cette urne. On note B_2 : « la seconde boule est blanche ». Calculer $P(B_1 \cap B_2)$, puis $P(B_2 | B_1)$. d) Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? Expliquer pourquoi, alors que le tirage se fait avec remise.

Corrigés

1. $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A) = 0,1/0,4 = 0,25$.

$P(A | B) = P(A \cap B)/P(B) = 0,1/0,5 = 0,2$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,1 = 0,8$. $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 \neq 0,1 = P(A \cap B)$: **A et B ne sont pas indépendants**.

2. a) Premier niveau : $P(A) = 0,3$ et $P(\bar{A}) = 0,7$. Second niveau : $P(B | A) = 0,6$ et $P(\bar{B} | A) = 0,4$; $P(B | \bar{A}) = 0,2$ et $P(\bar{B} | \bar{A}) = 0,8$ (règle des nœuds).

b) $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$. $P(\bar{A} \cap B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$. Probabilités totales : $P(B) = 0,18 + 0,14 = 0,32$. c) $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B) = 0,18/0,32 = 0,5625$.

3. a) $P(R_1) = 4/10 = 0,4$. Après le tirage d'une rouge, il reste 3 rouges sur 9 boules : $P(R_2 | R_1) = 3/9 = 1/3$.

b) $P(R_1 \cap R_2) = 4/10 \times 3/9 = 12/90 = 2/15 \approx 0,133$. c) Si la première est noire (probabilité $6/10$), il reste 4 rouges sur 9 : $P(R_2 | \bar{R}_1) = 4/9$. Probabilités totales : $P(R_2) = 12/90 + 6/10 \times 4/9 = 12/90 + 24/90 = 36/90 = 0,4$. Remarque : on retrouve la même probabilité qu'au premier tirage, ce qui est logique quand on ne connaît pas le résultat du premier tirage.

4. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

$P(A \cup B) = 0,3 + 0,6 - 0,18 = 0,72$. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$. Contrôle : $\bar{A} \cap \bar{B}$ est le contraire de $A \cup B$, et $1 - 0,72 = 0,28$.

5. $P(C) = 8/32 = 1/4$, $P(K) = 4/32 = 1/8$ et $P(C \cap K) = 1/32$ (le roi de cœur).

$P(C) \times P(K) = 1/4 \times 1/8 = 1/32 = P(C \cap K)$: **C et K sont indépendants**. Donc $P(K | C) = P(K) = 1/8$ (un roi parmi les 8 cœurs).

6. a) Premier niveau : $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$, $P(C) = 0,2$. Second niveau : $P(K | A) = 0,02$, $P(K | B) = 0,04$, $P(K | C) = 0,05$, et les compléments $P(\bar{K} | A) = 0,98$, $P(\bar{K} | B) = 0,96$, $P(\bar{K} | C) = 0,95$.

b) A, B, C forment une partition. Probabilités totales : $P(K) = 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,010 + 0,012 + 0,010 = 0,032$. c) $P(A | K) = P(A \cap K)/P(K) = 0,010/0,032 = 0,3125$. d) $P(\bar{K}) = 1 - 0,032 = 0,968$ et $P(C \cap \bar{K}) = 0,2 \times 0,95 = 0,19$. $P(C | \bar{K}) = 0,19/0,968 \approx 0,196$.

7. a) 400 personnes ne sont pas vaccinées. Total grippe : $30 + 120 = 150$.

	G	$\bar{G}$	Total
V	30	570	600
$\bar{V}$	120	280	400
Total	150	850	1 000

b) $P(G) = 150/1\,000 = 0,15$. $P(G \mid V) = 30/600 = 0,05$. $P(G \mid \bar{V}) = 120/400 = 0,3$. c) $P(V \mid G) = 30/150 = 0,2$: parmi les personnes qui ont eu la grippe, 20 % étaient vaccinées. Ce nombre ne mesure pas l'efficacité du vaccin, qui se lit en comparant $P(G \mid V) = 0,05$ et $P(G \mid \bar{V}) = 0,3$. d) $P(G \mid V) = 0,05 \neq P(G) = 0,15$: **V et G ne sont pas indépendants.**

8. Par indépendance, on multiplie les probabilités.

a) $P(\text{pile et } 6) = 0,6 \times 1/6 = 0,1$. b) $P(\text{face}) = 0,4$ et $P(\text{nombre} \geq 5) = 2/6 = 1/3$. $P = 0,4 \times 1/3 = 2/15 \approx 0,133$. c) $P(\text{pile ou } 6) = P(\text{pile}) + P(6) - P(\text{pile et } 6) = 3/5 + 1/6 - 1/10 = 18/30 + 5/30 - 3/30 = 20/30 = 2/3$. Autre méthode : le contraire est « face et pas 6 », de probabilité $0,4 \times 5/6 = 1/3$, d'où $1 - 1/3 = 2/3$.

9. a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

$A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B : $P(\bar{A} \cap B) = 0,52 - 0,28 = 0,24$. b) $P(\bar{A}) = 0,6$ donc $P(B \mid \bar{A}) = 0,24/0,6 = 0,4$. c) $P(A \mid B) = 0,28/0,52 = 7/13 \approx 0,538$. d) $P(B) = 0,4 \times 0,7 + 0,6 \times x = 0,28 + 0,6x$. Comme $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(B \mid A) = P(B)$, soit $0,7 = 0,28 + 0,6x$, d'où $0,6x = 0,42$ et $x = 0,7$. On retrouve que l'indépendance équivaut à $P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A})$.

10. a) $P(M \cap T) = 0,9p$ et $P(\bar{M} \cap T) = (1 - p) \times (1 - 0,95) = 0,05(1 - p)$. Probabilités totales : $P(T) = 0,9p + 0,05 - 0,05p = 0,85p + 0,05$.

$P(M \mid T) = 0,9p / (0,85p + 0,05)$. b) $p = 0,01 : 0,009 / (0,0085 + 0,05) = 0,009/0,0585 \approx 0,154$. $p = 0,2 : 0,18 / (0,17 + 0,05) = 0,18/0,22 \approx 0,818$. Le même test est donc bien plus fiable, au sens de la valeur prédictive, dans une population où la maladie est fréquente. c) On résout $0,9p / (0,85p + 0,05) > 0,5$. Le dénominateur est positif, donc cela équivaut à $0,9p > 0,425p + 0,025$, soit $0,475p > 0,025$, soit $p > 0,025/0,475 = 1/19$. $p > 1/19 \approx 0,053$, c'est-à-dire une prévalence supérieure à environ 5,3 %.

11. a) L'événement $\bar{A} \cap \bar{B}$ est le contraire de $A \cup B$. En utilisant $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$. **$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.** b) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Si de plus $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $P(A) \times P(B) > 0$. Donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$: **ils ne sont pas indépendants.** c) A est indépendant de lui-même si $P(A \cap A) = P(A)^2$, soit $P(A) = P(A)^2$, c'est-à-dire $P(A)(1 - P(A)) = 0$. Donc **seulement si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$** . Pour $P(A) = 0,5$, on a $0,5 \neq 0,25$: **non**.

12. a) L'enfant est aa s'il reçoit a de chaque parent : $P(aa) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. Il est Aa s'il reçoit A du père et a de la mère, ou l'inverse : $P(Aa) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. (Et $P(AA) = 1/4$.)

b) Le contraire est « aucun enfant n'est aa », de probabilité $(3/4)^2 = 9/16$ par indépendance. Donc $P = 1 - 9/16 = 7/16 \approx 0,438$. c) On note D : « phénotype dominant » ; $P(D) = 1 - 1/4 = 3/4$. L'événement Aa est inclus dans D , donc $P(Aa \cap D) = P(Aa) = 1/2$. $P(Aa \mid D) = (1/2)/(3/4) = 2/3$. d) Sachant D , l'enfant est Aa avec la probabilité $2/3$ et AA avec la probabilité $1/3$. Avec un partenaire aa, le descendant est aa si le parent de phénotype dominant transmet a : probabilité $1/2$ s'il est Aa, 0 s'il est AA. Probabilités totales : $P = 2/3 \times 1/2 + 1/3 \times 0 = 1/3$.

13. a) $P(B_1) = 1/2 \times 3/4 + 1/2 \times 1/4 = 3/8 + 1/8 = 1/2$.

b) $P(U_1 \mid B_1) = P(U_1 \cap B_1)/P(B_1) = (3/8)/(1/2) = 3/4$. c) Dans une urne donnée, les deux tirages avec remise sont indépendants. Avec U_1 : $(3/4)^2 = 9/16$; avec U_2 : $(1/4)^2 = 1/16$. $P(B_1 \cap B_2) = 1/2 \times 9/16 + 1/2 \times 1/16 = 10/32 = 5/16$. $P(B_2 \mid B_1) = (5/16)/(1/2) = 5/8$. d) Par symétrie, $P(B_2) = 1/2$. Or $P(B_2 \mid B_1) = 5/8 \neq 1/2$: **B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.** Le premier tirage renseigne sur l'urne choisie (une boule blanche rend U_1 plus probable), et cette information modifie la probabilité du second tirage. La remise rend les tirages indépendants à urne fixée, mais pas quand l'urne elle-même est inconnue.

Variables aléatoires réelles

COURS • M08 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	6
Exercices	6
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Définir une variable aléatoire associée à une expérience et interpréter les événements $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$, $\{X > a\}$.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire et la présenter dans un tableau.
- Vérifier qu'un tableau définit bien une loi de probabilité et trouver une probabilité manquante.
- Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire.
- Interpréter l'espérance comme une moyenne à long terme, notamment pour juger si un jeu est équitable.
- Utiliser les formules $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$, et les démontrer.
- Reconnaître une variable de Bernoulli et connaître son espérance et sa variance.
- Simuler une variable aléatoire et un échantillon avec Python, et calculer la moyenne d'un échantillon.
- Observer la fluctuation de la moyenne d'échantillon et l'écart entre cette moyenne et l'espérance, à l'aide de $2\sigma/\sqrt{n}$.

Cours

1. Variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω , munie d'une loi de probabilité P .

Définition. Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction qui, à chaque issue de Ω , associe un nombre réel.

Malgré son nom, une variable aléatoire n'est ni une variable ni aléatoire au sens strict : c'est une **fonction** définie sur l'univers. Ce qui est aléatoire, c'est l'issue ; X traduit cette issue en un nombre (un gain, un nombre de succès, une somme, une mesure).

Exemple. On lance deux pièces équilibrées. $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$. La variable X qui compte le nombre de « pile » associe 2 à PP, 1 à PF et à FP, 0 à FF. Une autre variable G peut associer un gain à chaque issue : 5 € pour PP, 1 € pour une seule pile, 0 € pour FF.

Si x est un réel, on note $\{X = x\}$ l'événement formé des issues dont l'image par X vaut x . On définit de même $\{X \leq x\}$, $\{X > x\}$, $\{a \leq X \leq b\}$. Dans l'exemple, $\{X = 1\} = \{PF ; FP\}$ et $P(X = 1) = 2/4 = 1/2$.

2. Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ (distinctes).

Définition. La loi de probabilité de X est la donnée des probabilités $p_i = P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à n . On la présente en général dans un tableau.

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Les événements $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_n\}$ forment une partition de Ω (chaque issue a une et une seule image). Par conséquent :

- chaque p_i est compris entre 0 et 1 ;
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Cette dernière égalité sert de contrôle systématique, et permet de trouver une probabilité manquante.

Déterminer une loi. On procède en trois temps : on liste les valeurs possibles de X ; pour chacune, on décrit l'événement $\{X = x_i\}$; on calcule sa probabilité (équiprobabilité, arbre, indépendance). On vérifie enfin que la somme vaut 1.

Déterminer la loi de X

1. Lister les valeurs possibles de X
2. Décrire chaque événement $\{X = x_i\}$
3. Calculer chaque probabilité (arbre, dénombrement)
4. Vérifier que la somme vaut 1

Les probabilités cumulées s'obtiennent par addition : $P(X \leq a)$ est la somme des p_i pour les $x_i \leq a$. Pour « au moins », on passe souvent par le contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

3. Espérance

Définition. L'espérance de X est le nombre

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n.$$

C'est la moyenne des valeurs de X , pondérée par leurs probabilités.

Interprétation. Si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois de façon indépendante, la moyenne des valeurs obtenues pour X se rapproche de $E(X)$. L'espérance est donc la **valeur moyenne à long terme** : pour un jeu, c'est le gain moyen par partie qu'on peut prévoir sur un grand nombre de parties. Elle n'est pas forcément une valeur que X peut prendre : pour un dé équilibré, $E(X) = 3,5$.

Jeu équitable. Si X est le gain algébrique d'un joueur (gain moins mise), le jeu est :

- **favorable** au joueur si $E(X) > 0$;
- **défavorable** si $E(X) < 0$;
- **équitable** si $E(X) = 0$.

Exemple. Pour un dé équilibré, $E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 3,5$.

4. Variance et écart type

L'espérance donne une position moyenne, mais pas la dispersion. Deux jeux de même espérance peuvent être très différents : gagner 0 € à coup sûr, ou gagner 100 € ou perdre 100 € avec la même probabilité. On mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance.

Définition. En notant $\mu = E(X)$, la **variance** de X est

$$V(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2.$$

L'**écart type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variance est la moyenne pondérée des carrés des écarts à l'espérance. Elle est toujours **positive ou nulle**, et nulle seulement si X est constante (prend une seule valeur avec probabilité 1). Comme on a élevé au carré, la variance s'exprime dans le **carré** de l'unité de X (des €² pour un gain) ; l'écart type, lui, a la **même unité** que X , ce qui le rend interprétable.

Formule de König-Huygens. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, où $E(X^2) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \dots + p_nx_n^2$.

Démonstration. En développant $(x_i - \mu)^2 = x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2$, on obtient $V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i$
 $\sum p_i = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2$. (Le symbole $\sum$ désigne la somme sur i allant de 1 à n .)

Cette formule est souvent plus rapide, surtout quand μ n'est pas entier. Mais attention : $E(X^2)$ n'est pas $(E(X))^2$.

Exemple. Dé équilibré : $E(X^2) = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 = 91/6$, donc $V(X) = 91/6 - 3,5^2 = 91/6 - 49/4 = 182/12 - 147/12 = 35/12 \approx 2,92$, et $\sigma(X) \approx 1,71$.

Indicateur	Formule	Unité	Rôle
Espérance $E(X)$	$\sum p_i x_i$	celle de X	position moyenne
Variance $V(X)$	$\sum p_i (x_i - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$	carré de celle de X	dispersion
Écart type $\sigma(X)$	$\sqrt{V(X)}$	celle de X	dispersion interprétable

5. Transformation affine : $aX + b$

Soient a et b deux réels. Si X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i , la variable $Y = aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les **mêmes** probabilités.

Propriétés. $E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2V(X)$; $\sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)$.

Démonstration. $E(aX + b) = \sum p_i(ax_i + b) = a \sum p_i x_i + b \sum p_i = aE(X) + b$, car la somme des p_i vaut 1. Ensuite, avec $\mu = E(X)$, l'espérance de Y est $a\mu + b$, et l'écart de chaque valeur à l'espérance vaut $(ax_i + b) - (a\mu + b) = a(x_i - \mu)$. Donc $V(Y) = \sum p_i a^2(x_i - \mu)^2 = a^2 V(X)$. Enfin $\sigma(Y) = \sqrt{a^2 V(X)} = |a| \times \sigma(X)$.

Ces résultats se comprennent bien :

- **ajouter une constante b** décale toutes les valeurs : l'espérance est décalée de b , mais la dispersion ne change pas ;
- **multiplier par a** dilate les écarts d'un facteur $|a|$: l'écart type est multiplié par $|a|$, la variance par a^2 .

Exemple. Une température X en degrés Celsius a pour espérance 20 et pour écart type 3. En degrés Fahrenheit, $Y = 1,8X + 32$. Alors $E(Y) = 1,8 \times 20 + 32 = 68$ et $\sigma(Y) = 1,8 \times 3 = 5,4$.

Variable centrée réduite. Si $\sigma(X) \neq 0$, la variable $Z = (X - E(X))/\sigma(X)$ vérifie $E(Z) = 0$ et $\sigma(Z) = 1$. Elle permet de comparer des variables d'unités ou d'échelles différentes.

6. Variable de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : le succès, de probabilité p , et l'échec, de probabilité $1 - p$. La variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Valeur	0	1
Probabilité	$1 - p$	p

On calcule $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$; $E(X^2) = p$ (car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$), donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Cette variable est l'outil de base pour modéliser une proportion : la moyenne de n valeurs de Bernoulli est la **fréquence** des succès.

7. Simulation et échantillons

Simuler une variable aléatoire. En Python, la fonction `random()` du module `random` renvoie un nombre aléatoire de $[0 ; 1[$, chaque sous-intervalle de longueur ℓ étant atteint avec probabilité ℓ . Pour simuler une variable de Bernoulli de paramètre p , il suffit de tester si `random() < p` :

```
from random import random

def bernoulli(p):
    if random() < p:
        return 1
    return 0
```

Pour une variable à plusieurs valeurs, on découpe $[0 ; 1[$ en intervalles de longueurs $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Échantillon. Un **échantillon de taille n** de la variable X est une liste de n valeurs obtenues en répétant n fois l'expérience de façon indépendante. Sa **moyenne** m est la moyenne de ces n valeurs.

```
def moyenne_echantillon(p, n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + bernoulli(p)
```

return s / n

Fluctuation d'échantillonnage. Deux échantillons de même taille donnent en général des moyennes différentes : c'est la fluctuation d'échantillonnage. En simulant un grand nombre d'échantillons, on observe que :

- les moyennes m se répartissent autour de l'espérance $\mu = E(X)$;
- plus n est grand, plus elles sont resserrées autour de μ (c'est l'idée de la **loi des grands nombres**) ;
- pour des échantillons de taille n assez grande, la proportion des échantillons pour lesquels l'écart $|m - \mu|$ est inférieur ou égal à $2\sigma/\sqrt{n}$ est proche de **0,95**, où σ est l'écart type de X .

Étudier la fluctuation par simulation

1. Simuler un échantillon de taille n et calculer m • 2. Répéter pour N échantillons • 3. Compter ceux où l'écart entre m et μ est au plus $2\sigma/\sqrt{n}$ • 4. Constaté une proportion proche de 0,95

Autrement dit, environ 95 % des moyennes d'échantillons tombent dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma/\sqrt{n} ; \mu + 2\sigma/\sqrt{n}]$. Le facteur $\sqrt{n}$ explique que, pour diviser par 2 la largeur de cet intervalle, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4. Ce constat expérimental sera démontré et précisé plus tard.

Exemple. Pour une variable de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$, $\sigma = \sqrt{(0,25)} = 0,5$. Pour $n = 100$, $2\sigma/\sqrt{n} = 2 \times 0,5/10 = 0,1$: environ 95 % des fréquences de pile observées sur 100 lancers d'une pièce équilibrée sont comprises entre 0,4 et 0,6.

Exemples résolus

Exemple 1 : un jeu de dé

Énoncé. On lance un dé équilibré. Si on obtient 6, on gagne 10 € ; si on obtient 4 ou 5, on gagne 2 € ; sinon, on perd 3 €. On note X le gain algébrique. a) Déterminer la loi de X . b) Calculer $E(X)$ et interpréter. c) Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Résolution. a) X prend les valeurs -3, 2 et 10. $P(X = 10) = 1/6$; $P(X = 2) = 2/6 = 1/3$; $P(X = -3) = 3/6 = 1/2$.

x	-3	2	10
$P(X = x)$	1/2	1/3	1/6

Contrôle : $3/6 + 2/6 + 1/6 = 1$. b) $E(X) = -3 \times 3/6 + 2 \times 2/6 + 10 \times 1/6 = (-9 + 4 + 10)/6 = 5/6 \approx 0,83$ €. Le jeu est favorable au joueur : sur un grand nombre de parties, il gagne en moyenne environ 0,83 € par partie. c) $E(X^2) = 9 \times 3/6 + 4 \times 2/6 + 100 \times 1/6 = (27 + 8 + 100)/6 = 135/6 = 22,5$. $V(X) = 22,5 - (5/6)^2 = 810/36 - 25/36 = 785/36 \approx 21,81$ €² et $\sigma(X) = \sqrt{785/6} \approx 4,67$ €.

Exemple 2 : nombre de succès sur deux tirages avec remise

Énoncé. Une urne contient 2 boules rouges et 3 bleues. On tire une boule, on la remet, puis on en tire une seconde. X est le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X , puis $E(X)$ et $V(X)$.

Résolution. Les tirages sont indépendants (avec remise) et, à chaque tirage, $P(\text{rouge}) = 2/5$. $P(X = 0) = (3/5)^2 = 9/25$; $P(X = 2) = (2/5)^2 = 4/25$; $P(X = 1) = 2/5 \times 3/5 + 3/5 \times 2/5 = 12/25$ (deux chemins). Contrôle : $9 +$

$12 + 4 = 25$. $E(X) = 0 \times 9/25 + 1 \times 12/25 + 2 \times 4/25 = 20/25 = 0,8$. $E(X^2) = 1 \times 12/25 + 4 \times 4/25 = 28/25$, donc $V(X) = 28/25 - (4/5)^2 = 28/25 - 16/25 = 12/25 = 0,48$. Remarque : X est la somme de deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,4 ; on retrouve $E(X) = 2 \times 0,4$ et $V(X) = 2 \times 0,4 \times 0,6$.

Exemple 3 : changement d'échelle

Énoncé. La note X d'un devoir a pour espérance 9 et pour écart type 4. Le professeur décide d'appliquer $Y = 0,5X + 6$. Calculer $E(Y)$, $\sigma(Y)$ et $V(Y)$.

Résolution. $E(Y) = 0,5 \times E(X) + 6 = 0,5 \times 9 + 6 = 10,5$. $\sigma(Y) = |0,5| \times \sigma(X) = 0,5 \times 4 = 2$; $V(Y) = 2^2 = 4$ (ou $0,5^2 \times 16 = 4$). La transformation a relevé la moyenne et resserré les notes autour d'elle.

Méthodes et pièges

- Commence toujours par la liste des valeurs possibles de X, puis calcule chaque probabilité, et termine par le contrôle « somme = 1 ».
- Pour un gain, pense à retrancher la mise : la variable « gain algébrique » prend des valeurs négatives.
- $E(X)$ est une moyenne à long terme, pas la valeur la plus probable ni forcément une valeur prise par X.
- Pour la variance, la formule $E(X^2) - (E(X))^2$ est souvent la plus rapide ; ne confonds pas $E(X^2)$ et $(E(X))^2$.
- Une variance négative signale une erreur de calcul : recommence.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$: la constante b disparaît et a est élevé au carré ; pour l'écart type, c'est $|a|$.
- Donne l'unité : l'écart type a l'unité de X, la variance son carré.
- Garde les fractions exactes dans les calculs intermédiaires pour éviter d'accumuler les arrondis.
- Pour une simulation, distingue la taille n d'un échantillon et le nombre N d'échantillons simulés.

Vers le PASS

En PASS, les variables aléatoires sont le langage de toute la biostatistique. La loi de Bernoulli devient la loi binomiale (nombre de succès sur n épreuves indépendantes), puis viennent la loi de Poisson et la loi normale, avec leurs espérances et variances. La propriété $V(aX + b) = a^2V(X)$ sert dans les changements d'unité et dans la propagation des incertitudes ; la variable centrée réduite est l'outil des tables de la loi normale. Surtout, le phénomène observé ici par simulation, l'intervalle $\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n}$ qui contient environ 95 % des moyennes d'échantillon, est le point de départ des **intervalles de confiance** et des **tests statistiques** qui servent à lire un essai clinique. Les QCM jouent souvent sur la confusion entre écart type et variance, et sur l'oubli du carré dans $V(aX)$.

Suite en PASS : Variables aléatoires et lois usuelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. La loi d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau : valeurs -2 ; 0 ; 1 ; 3 avec les probabilités respectives 0,1 ; 0,3 ; a ; 0,2.
a) Déterminer a. b) Calculer $P(X \geq 1)$ et $P(X < 1)$. c) Calculer $E(X)$.
2. X prend les valeurs 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,2 ; 0,5 et 0,3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

3. Une variable X vérifie $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de : a) $Y = 3X - 2$; b) $Z = -X + 10$; c) $W = (X - 5)/2$.
4. On lance un dé équilibré ; X vaut 1 si on obtient 6 et 0 sinon. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
5. On lance un dé équilibré ; X est le numéro obtenu. Calculer $E(X)$, $V(X)$ (valeur exacte) et $\sigma(X)$ (au centième).

Niveau 2 : type bac

6. Pour participer à un jeu, on paie m euros. On lance alors deux pièces équilibrées de façon indépendante. On reçoit 5 € si on obtient deux « pile », 1 € si on obtient un seul « pile » et rien sinon. On note G le gain algébrique (somme reçue moins m).
 - a) Pour $m = 2$, déterminer la loi de G et calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? b) Pour quelle valeur de m le jeu est-il équitable ? c) Pour $m = 2$, calculer $\sigma(G)$ au centième.
7. Une urne contient 5 jetons : 2 portent le nombre 10 et 3 portent le nombre 0. On tire successivement et sans remise deux jetons ; X est la somme des deux nombres.
 - a) Déterminer la loi de X . b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
8. Un assureur propose un contrat annuel à 150 €. Pour un assuré, la probabilité d'un petit sinistre coûtant 1 000 € est 0,05, celle d'un gros sinistre coûtant 10 000 € est 0,005, et sinon il n'y a aucun sinistre (au plus un sinistre par an). On note C le coût annuel pour l'assureur et $G = 150 - C$ son gain.
 - a) Déterminer la loi de G . b) Calculer $E(C)$, puis $E(G)$. c) Calculer $\sigma(C)$ et en déduire $\sigma(G)$. d) Quel prix minimal du contrat assure à l'assureur un gain moyen d'au moins 40 € par assuré ?
9. Une variable X prend les valeurs 0, 1 et 2, avec $P(X = 0) = a$, $P(X = 1) = 2a$ et $P(X = 2) = b$. On sait que $E(X) = 1,2$.
 - a) Écrire deux équations vérifiées par a et b , puis les résoudre. b) Calculer $V(X)$.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Dans une grande population, la proportion de personnes porteuses d'un certain caractère est $p = 0,3$. On prélève au hasard un échantillon de 100 personnes (assimilé à 100 tirages indépendants) et on calcule la fréquence f des porteurs.
 - a) Quelle variable de Bernoulli X modélise une personne tirée ? Donner $E(X)$ et $\sigma(X)$ (au millième). b) Calculer $2\sigma/\sqrt{n}$ pour $n = 100$ et donner l'intervalle dans lequel on s'attend à trouver f dans environ 95 % des échantillons. c) Un échantillon donne $f = 0,41$. Est-ce surprenant ? Sur 200 échantillons simulés, combien environ devraient donner une fréquence hors de l'intervalle ? d) Quelle taille d'échantillon faudrait-il pour que $2\sigma/\sqrt{n}$ soit au plus égal à 0,03 ?
11. Soit X une variable prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$, d'espérance μ .
 - a) Démontrer que $V(X) = E(X^2) - \mu^2$. b) Démontrer que, pour tous réels a et b , $V(aX + b) = a^2V(X)$. c) En déduire que si $\sigma(X) \neq 0$, la variable $Z = (X - \mu)/\sigma(X)$ a pour espérance 0 et pour écart type 1.
12. La note X d'une épreuve a pour espérance 11 et pour écart type 4.
 - a) On pose $Y = 0,75X + 5$. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. b) Déterminer les réels $a > 0$ et b tels que la variable $aX + b$ ait pour espérance 12 et pour écart type 2. c) Une note de 15 correspond à quelle valeur de la variable centrée réduite de X ? Et à quelle note après la transformation de la question b) ?

13. Pour dépister une infection rare, on mélange les prélèvements de 5 personnes et on teste le mélange. Si le test du mélange est négatif, les 5 personnes sont déclarées non infectées (1 seul test). S'il est positif, on teste ensuite chacune des 5 personnes (6 tests au total). Chaque personne est infectée avec la probabilité p , indépendamment des autres, et le test est supposé parfait. On note X le nombre de tests réalisés pour un groupe.

a) Montrer que $P(X = 1) = (1 - p)^5$ et donner la loi de X . b) Pour $p = 0,02$, calculer $E(X)$ au millièm, puis le nombre moyen de tests par personne. Comparer avec un test individuel. c) Calculer $\sigma(X)$ au centièm pour $p = 0,02$. d) Reprendre b) avec $p = 0,2$. Que peut-on conclure sur l'intérêt de la méthode ?

Corrigés

1. a) La somme des probabilités vaut 1 : $0,1 + 0,3 + a + 0,2 = 1$, donc $a = 0,4$.

b) $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0,4 + 0,2 = 0,6$. $P(X < 1) = 1 - 0,6 = 0,4$. c) $E(X) = -2 \times 0,1 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = -0,2 + 0 + 0,4 + 0,6 = 0,8$.

2. $E(X) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 3 \times 0,3 = 0,2 + 1 + 0,9 = 2,1$.

$E(X^2) = 1 \times 0,2 + 4 \times 0,5 + 9 \times 0,3 = 0,2 + 2 + 2,7 = 4,9$. $V(X) = 4,9 - 2,1^2 = 4,9 - 4,41 = 0,49$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,49} = 0,7$.

3. On utilise $E(aX + b) = aE(X) + b$, $V(aX + b) = a^2V(X)$, $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$, avec $\sigma(X) = 2$.

a) $Y = 3X - 2$: $E(Y) = 15 - 2 = 13$; $V(Y) = 9 \times 4 = 36$; $\sigma(Y) = 6$. b) $Z = -X + 10$: $E(Z) = -5 + 10 = 5$; $V(Z) = (-1)^2 \times 4 = 4$; $\sigma(Z) = |-1| \times 2 = 2$. c) $W = (1/2)X - 5/2$: $E(W) = 5/2 - 5/2 = 0$; $V(W) = (1/4) \times 4 = 1$; $\sigma(W) = 1$. W est la variable centrée réduite associée à X .

4. X prend la valeur 1 avec la probabilité $1/6$ et 0 avec la probabilité $5/6$: X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/6$.

$E(X) = 1/6$ et $V(X) = 1/6 \times 5/6 = 5/36$.

5. $E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 3,5$.

$E(X^2) = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 = 91/6$. $V(X) = 91/6 - 49/4 = 182/12 - 147/12 = 35/12$ et $\sigma(X) = \sqrt{35/12} \approx 1,71$.

6. On note S la somme reçue. Avec deux pièces équilibrées indépendantes : $P(\text{deux pile}) = 1/4$, $P(\text{un seul pile}) = 1/2$, $P(\text{aucun pile}) = 1/4$.

a) Pour $m = 2$, $G = S - 2$ prend les valeurs 3 (probabilité $1/4$), -1 (probabilité $1/2$) et -2 (probabilité $1/4$). $E(G) = 3/4 - 1/2 - 2/4 = 0,75 - 0,5 - 0,5 = -0,25$ €. Comme $E(G) < 0$, le jeu est défavorable au joueur. b) $E(S) = 5 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 0 \times 1/4 = 1,75$ et $E(G) = E(S) - m = 1,75 - m$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$: $m = 1,75$ €. c) $G = S - 2$, donc $\sigma(G) = \sigma(S)$. $E(S^2) = 25 \times 1/4 + 1 \times 1/2 = 6,75$. $V(S) = 6,75 - 1,75^2 = 6,75 - 3,0625 = 3,6875$. $\sigma(G) = \sqrt{3,6875} \approx 1,92$ €.

7. a) $X = 20$ si les deux jetons portent 10 : $P(X = 20) = 2/5 \times 1/4 = 1/10$.

$X = 0$ si les deux portent 0 : $P(X = 0) = 3/5 \times 2/4 = 3/10$. $X = 10$ sinon : $P(X = 10) = 1 - 1/10 - 3/10 = 6/10$. (Contrôle par l'arbre : $2/5 \times 3/4 + 3/5 \times 2/4 = 6/20 + 6/20 = 6/10$.) b) $E(X) = 0 \times 0,3 + 10 \times 0,6 + 20 \times 0,1 = 8$. $E(X^2) = 100 \times 0,6 + 400 \times 0,1 = 100$. $V(X) = 100 - 64 = 36$ et $\sigma(X) = 6$.

8. a) $G = 150 - C$:

Valeur de G (€)	150	-850	-9 850
Probabilité	0,945	0,05	0,005

Contrôle : $0,945 + 0,05 + 0,005 = 1$. b) $E(C) = 0 \times 0,945 + 1\,000 \times 0,05 + 10\,000 \times 0,005 = 50 + 50 = 100$ €. $E(G) = 150 - E(C) = 50$ € par assuré en moyenne. c) $E(C^2) = 1\,000^2 \times 0,05 + 10\,000^2 \times 0,005 = 50\,000 + 500\,000 = 550\,000$. $V(C) = 550\,000 - 100^2 = 540\,000$ (en €²). $\sigma(C) = \sqrt{540\,000} \approx 734,85$ €. $G = -C + 150$, donc $\sigma(G) = |-1| \times \sigma(C) \approx 734,85$ €. Le gain moyen est faible devant la dispersion : c'est le grand nombre d'assurés qui rend l'activité prévisible. d) Avec un prix q , $E(G) = q - 100$. On veut $q - 100 \geq 40$, soit $q \geq 140$ €.

9. a) Somme des probabilités : $a + 2a + b = 1$, soit $3a + b = 1$.

Espérance : $0 \times a + 1 \times 2a + 2 \times b = 1,2$, soit $2a + 2b = 1,2$, donc $a + b = 0,6$. En soustrayant : $2a = 0,4$, donc $a = 0,2$ et $b = 0,4$. Loi : $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 1) = 0,4$, $P(X = 2) = 0,4$. b) $E(X^2) = 1 \times 0,4 + 4 \times 0,4 = 2$. $V(X) = 2 - 1,2^2 = 2 - 1,44 = 0,56$.

10. a) X vaut 1 si la personne est porteuse (probabilité 0,3) et 0 sinon : X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,3. $E(X) = 0,3$; $V(X) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$; $\sigma(X) = \sqrt{0,21} \approx 0,458$.

b) $2\sigma/\sqrt{n} = 2 \times 0,458/\sqrt{100} \approx 0,0917$, soit environ 0,092. On s'attend à trouver f dans $[0,3 - 0,092 ; 0,3 + 0,092] \approx [0,208 ; 0,392]$ pour environ 95 % des échantillons. c) 0,41 est en dehors de cet intervalle : c'est assez surprenant, ce type d'écart ne se produit que dans environ 5 % des échantillons. Sur 200 échantillons, on attend environ $5\% \times 200 = 10$ échantillons hors de l'intervalle. d) On veut $2 \times \sqrt{0,21}/\sqrt{n} \leq 0,03$, soit $\sqrt{n} \geq 2\sqrt{0,21}/0,03 \approx 30,55$, donc $n \geq 30,55^2 \approx 933,3$. Il faut $n \geq 934$. Remarque : passer d'une demi-largeur 0,092 à 0,03 (environ 3 fois plus petite) demande environ 9 fois plus de personnes, à cause de $\sqrt{n}$.

11. a) $(x - \mu)^2 = x^2 - 2\mu x + \mu^2$. En multipliant par p et en sommant :

$V(X) = \sum p x^2 - 2\mu \sum p x + \mu^2 \sum p = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2$. b) $Y = aX + b$ prend les valeurs $ax + b$ avec les probabilités p , et $E(Y) = \sum p(ax + b) = a\mu + b$. Chaque écart vaut $(ax + b) - (a\mu + b) = a(x - \mu)$. Donc $V(Y) = \sum p a^2(x - \mu)^2 = a^2 \sum p(x - \mu)^2 = a^2 V(X)$. c) $Z = (1/\sigma)X - \mu/\sigma$ avec $\sigma = \sigma(X)$. $E(Z) = \mu/\sigma - \mu/\sigma = 0$ et $\sigma(Z) = (1/\sigma) \times \sigma = 1$.

12. a) $E(Y) = 0,75 \times 11 + 5 = 8,25 + 5 = 13,25$; $\sigma(Y) = 0,75 \times 4 = 3$.

b) $\sigma(aX + b) = a \times 4 = 2$ (car $a > 0$), donc $a = 0,5$. Puis $E(aX + b) = 0,5 \times 11 + b = 12$, donc $b = 12 - 5,5 = 6,5$. c) Variable centrée réduite : $(15 - 11)/4 = 1$ (la note est un écart type au-dessus de la moyenne). Après la transformation b) : $0,5 \times 15 + 6,5 = 14$, qui vaut bien $12 + 1 \times 2$, un écart type au-dessus de la nouvelle moyenne.

13. a) Le test du mélange est négatif si et seulement si aucune des 5 personnes n'est infectée. Par indépendance, la probabilité vaut $(1 - p) \times (1 - p) \times \dots \times (1 - p) = (1 - p)^5$. Donc $P(X = 1) = (1 - p)^5$ et $P(X = 6) = 1 - (1 - p)^5$.

b) Pour $p = 0,02$: $P(X = 1) = 0,98^5 \approx 0,9039$ et $P(X = 6) \approx 0,0961$. $E(X) = 1 \times 0,98^5 + 6 \times (1 - 0,98^5) = 6 - 5 \times 0,98^5 \approx 6 - 4,5196 = 1,480$. Par personne : $1,480/5 \approx 0,296$ test, contre 1 test par personne en individuel : on économise environ 70 % des tests. c) $X = 1 + 5B$, où B vaut 1 si le mélange est positif (Bernoulli de paramètre $q = 1 - 0,98^5 \approx 0,0961$). Donc $V(X) = 25 \times q(1 - q) \approx 25 \times 0,0961 \times 0,9039 \approx 2,171$ et $\sigma(X) \approx 1,47$. d) Pour $p = 0,2$: $0,8^5 = 0,32768$, $E(X) = 6 - 5 \times 0,32768 = 6 - 1,6384 = 4,3616$, soit environ 0,872 test par personne. L'économie n'est plus que d'environ 13 %. La méthode des mélanges est très intéressante quand l'infection est rare, et perd son intérêt quand elle devient fréquente, car le mélange est alors souvent positif.

Raisonnement par récurrence et limites de suites

COURS • M09 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	8
Vers le PASS	8
Exercices	9
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Rédiger une démonstration par récurrence complète : initialisation, hérédité, conclusion.
- Démontrer l'inégalité de Bernoulli et l'utiliser pour minorer une puissance.
- Reconnaître une suite convergente, divergente vers l'infini ou sans limite, à partir des définitions.
- Calculer une limite à l'aide des opérations sur les limites et lever une forme indéterminée.
- Utiliser les théorèmes de comparaison et le théorème des gendarmes.
- Établir qu'une suite monotone et bornée converge, puis déterminer sa limite.
- Déterminer la limite d'une suite géométrique (q^n) selon la valeur de q .
- Calculer la somme des termes d'une suite géométrique et sa limite.
- Combiner récurrence, monotonie et limites dans l'étude d'une suite définie par récurrence.

Cours

1. Le principe de récurrence

Beaucoup de propriétés portent sur tous les entiers naturels : « pour tout n , $u_n \leq 5$ », « pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ ». On ne peut pas les vérifier une par une, il y en a une infinité. Le raisonnement par récurrence permet de les établir en deux étapes seulement.

Principe de récurrence. Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n , et n_0 un entier. Si :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

L'image habituelle est celle des dominos : le premier tombe (initialisation), et chaque domino qui tombe fait tomber le suivant (hérédité). Tous les dominos finissent par tomber. Ce principe est un axiome de la construction des entiers : on ne le démontre pas, on l'utilise.

Rédiger une récurrence

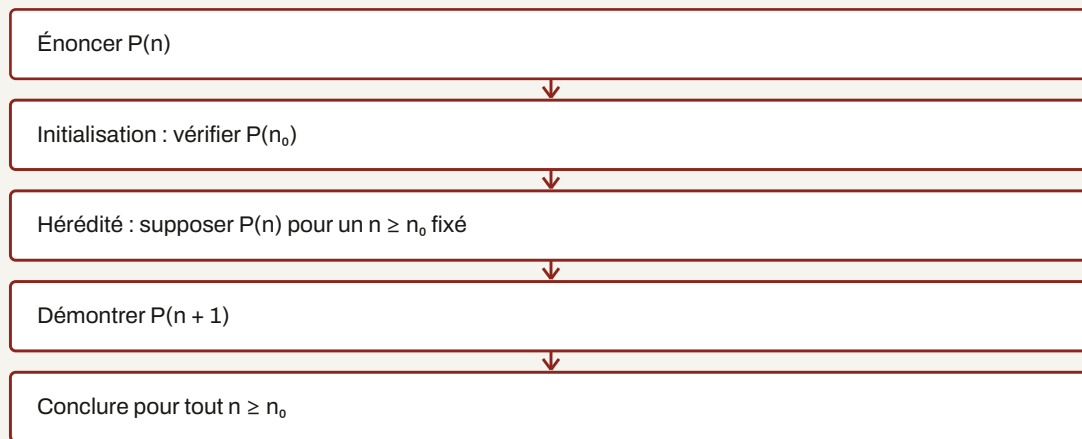


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Dans l'hérédité, la phrase « supposons $P(n)$ vraie » s'appelle l'**hypothèse de récurrence**. On ne suppose pas que la propriété est vraie pour tout n (ce serait supposer ce qu'on veut démontrer) : on fixe un entier n quelconque pour lequel elle est vraie, et on montre qu'elle se transmet au rang suivant.

Exemple. Montrons que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

- Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $1 \times 2/2 = 1$. $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$. Alors $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n/2 + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$. C'est exactement $P(n + 1)$.
- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exemple avec une suite définie par récurrence. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On conjecture $u_n = 2^n - 1$ ($u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$). Initialisation : $2^0 - 1 = 0 = u_0$. Hérédité : si $u_n = 2^n - 1$, alors $u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. La formule est donc vraie pour tout n .

Les deux étapes sont indispensables. La propriété « 3 divise $4^n + 1$ » est héréditaire (si $4^n + 1 = 3k$, alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3 = 3(4k - 1)$) mais elle n'est jamais initialisée : $4^0 + 1 = 2$, et elle est fausse pour tout n ; à l'inverse, « $n^2 - n + 41$ est premier » est vraie de $n = 0$ à $n = 40$ mais pas héréditaire (pour $n = 41$, on obtient 41^2).

La récurrence sert à démontrer des égalités (formules explicites, sommes), des inégalités (encadrements, minoration) et des propriétés de monotonie ($u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n).

2. L'inégalité de Bernoulli

Propriété (inégalité de Bernoulli). Pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n : $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration par récurrence. Fixons $a > 0$ et notons $P(n)$: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

- Initialisation : $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : supposons $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour un entier n . Comme $1 + a > 0$, on peut multiplier les deux membres par $1 + a$ sans changer le sens : $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2$.

Or $na^2 \geq 0$, donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$. $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout n .

Le point clé est le signe de $1+a$: multiplier une inégalité par un nombre négatif en change le sens. L'inégalité reste d'ailleurs vraie pour $-1 \leq a \leq 0$ avec la même preuve, puisque $1+a \geq 0$.

L'intérêt de Bernoulli est de comparer une croissance géométrique, difficile à manipuler, à une croissance affine, facile : $1,01^n \geq 1 + 0,01n$, et le membre de droite dépasse n'importe quel nombre pour n assez grand. C'est l'outil qui permet de démontrer que q^n tend vers $+\infty$ quand $q > 1$ (partie 7).

3. Limite d'une suite

On s'intéresse au comportement des termes u_n quand n devient très grand.

Limite finie. On dit que la suite (u_n) **converge** vers le réel ℓ (ou admet ℓ pour limite) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim u_n = \ell$ (sous-entendu quand n tend vers $+\infty$).

Autrement dit, aussi petite que soit la marge $\varepsilon > 0$ choisie, on a $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ dès que n est assez grand. Le rang à partir duquel cela se produit dépend en général de ε .

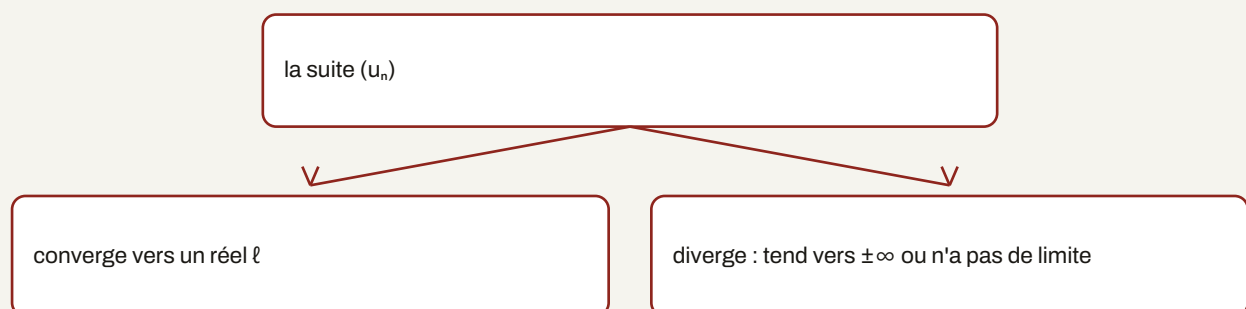
Propriété. Si une suite converge, sa limite est unique. (Deux intervalles ouverts disjoints autour de deux limites différentes ne peuvent pas contenir tous deux tous les termes à partir d'un certain rang.)

Limite infinie. La suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang : les termes finissent par dépasser définitivement n'importe quel seuil A . De même, (u_n) tend vers $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty ; A[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Exemple. $u_n = n^2$. Pour $A > 0$ donné, $n^2 > A$ dès que $n > \sqrt{A}$. Donc $\lim n^2 = +\infty$.

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. Il y a deux cas bien distincts : la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien elle n'a pas de limite du tout. Ainsi $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 : aucun intervalle de largeur inférieure à 2 ne contient tous ses termes à partir d'un rang, et elle ne tend pas vers l'infini. Elle n'a pas de limite.

Comportement d'une suite quand n tend vers $+\infty$



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Suites de référence (à connaître) :

Suite	Limite
$n, n^2, n^3, \sqrt{n}$	$+\infty$
$1/n, 1/n^2, 1/n^3, 1/\sqrt{n}$	0
$(-1)^n$	pas de limite
suite constante égale à c	c

Propriété. Une suite convergente est bornée. En effet, à partir d'un rang N , tous les termes sont dans $]\ell - 1; \ell + 1[$, et il ne reste qu'un nombre fini de termes avant N : le plus grand et le plus petit d'entre eux complètent l'encadrement. La réciproque est fautive : $(-1)^n$ est bornée mais diverge.

4. Opérations sur les limites

Les règles suivantes s'appliquent à deux suites (u_n) et (v_n) ayant chacune une limite (finie ou infinie). ℓ et ℓ' désignent des réels. « FI » signifie **forme indéterminée** : les règles ne permettent pas de conclure directement, il faut transformer l'expression.

Somme.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ (règle des signes)	FI	$\pm\infty$ (règle des signes)

Quotient.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0 (avec signe constant)	ℓ'	0	$\pm\infty$
$\lim (u_n/v_n)$	ℓ/ℓ'	0	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	FI	FI

Les quatre formes indéterminées sont donc : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$. Elles ne signifient pas que la limite n'existe pas : elles signifient que le résultat dépend de la façon dont chaque terme tend vers sa limite. Par exemple $n^2 - n$ et $n - n^2$ sont toutes deux de la forme $\infty - \infty$, mais la première tend vers $+\infty$ et la seconde vers $-\infty$.

Lever une indétermination. Trois techniques couvrent la plupart des cas.

- **Factoriser par le terme dominant.** Pour un polynôme ou un quotient de polynômes en n , on met en facteur la plus grande puissance. Exemple : $u_n = n^2 - 5n = n^2(1 - 5/n)$. Comme $1 - 5/n$ tend vers 1 et n^2 vers $+\infty$, $\lim u_n = +\infty$. Pour un quotient, $v_n = (2n + 1)/(3n - 4) = n(2 + 1/n) / (n(3 - 4/n)) = (2 + 1/n)/(3 - 4/n)$, qui tend vers $2/3$.
- **Multiplier par la quantité conjuguée** quand des racines carrées créent un $\infty - \infty$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = ((n+1) - n) / (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, qui tend vers 0.
- **Simplifier** une expression avant de passer à la limite (développer, réduire au même dénominateur).

Pour un polynôme en n , la limite en $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré ; pour un quotient de polynômes, c'est la limite du quotient des termes de plus haut degré. Ce raccourci se justifie toujours par la factorisation précédente, qu'il faut écrire sur une copie.

5. Théorèmes de comparaison et des gendarmes

Quand une suite n'est pas une simple combinaison de suites de référence (présence de $(-1)^n$, de sinus, de cosinus), on l'encadre.

Théorème de comparaison (limites infinies). Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.

Démonstration du premier point. Soit A un réel. Comme v_n tend vers $+\infty$, il existe un rang N_1 à partir duquel $v_n > A$. Par hypothèse, il existe un rang N_2 à partir duquel $u_n \geq v_n$. Pour n supérieur à N_1 et N_2 , on a $u_n \geq v_n > A$. Tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient donc tous les termes u_n à partir d'un certain rang : u_n tend vers $+\infty$.

Théorème des gendarmes (admis). Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

Exemple. $u_n = (-1)^n/n$ pour $n \geq 1$. On a $-1/n \leq u_n \leq 1/n$, et les deux suites qui encadrent tendent vers 0. Donc $\lim u_n = 0$.

Passage à la limite dans une inégalité. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$. Attention : une inégalité stricte devient large à la limite. Par exemple $1/n > 0$ pour tout $n \geq 1$, mais $\lim 1/n = 0$.

6. Suites monotones bornées

Rappels : (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geq m$ pour tout n ; **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone (admis).

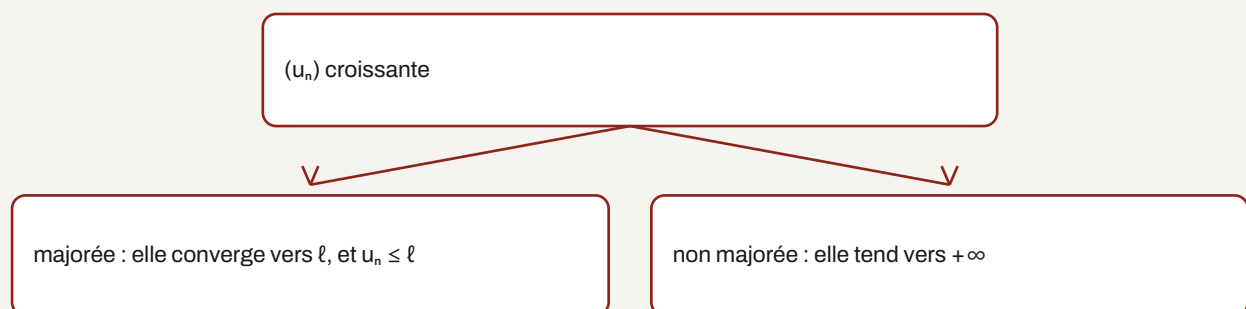
- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Ce théorème assure l'existence d'une limite sans la donner. On la détermine ensuite par un autre moyen (formule explicite, équation vérifiée par la limite). Il ne dit pas non plus que la limite est égale au majorant trouvé : la suite $1 - 1/n$ est croissante, majorée par 1, mais converge vers 1.

Propriété. Si (u_n) est croissante et converge vers ℓ , alors $u_n \leq \ell$ pour tout n . En effet, si un terme u_p dépassait ℓ , tous les termes suivants seraient supérieurs ou égaux à $u_p > \ell$, et l'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_p[$ ne contiendrait aucun terme à partir du rang p : contradiction.

Théorème. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. **Démonstration :** soit A un réel. La suite n'étant pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe un rang N tel que $u_N > A$. La suite étant croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$. Donc $\lim u_n = +\infty$. De même, une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Suite croissante



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Lorsque (u_n) converge vers ℓ et que l'expression $f(u_n)$ se traite par les opérations sur les limites, on passe à la limite des deux côtés de l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme (u_{n+1}) a la même limite que (u_n) , on obtient une équation dont ℓ est solution. Par exemple, si $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ et si (u_n) converge vers ℓ , alors $0,5u_n + 3$ tend vers $0,5\ell + 3$ et l'unicité de la limite donne $\ell = 0,5\ell + 3$, d'où $\ell = 6$. Le chapitre sur la continuité généralise cette méthode.

7. Limites des suites géométriques

Théorème. Soit q un réel.

- Si $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, $q^n = 1$ pour tout n , donc $\lim q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration du cas $q > 1$. Posons $a = q - 1 > 0$. Par l'inégalité de Bernoulli, $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$. Or $\lim (1 + na) = +\infty$ car $a > 0$. Par le théorème de comparaison, $\lim q^n = +\infty$.

Justification du cas $-1 < q < 1$. Si $q = 0$, c'est immédiat. Sinon, posons $Q = 1/|q| > 1$. Alors $|q|^n = 1/Q^n$ et Q^n tend vers $+\infty$, donc $|q|^n$ tend vers 0. Comme $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$, les gendarmes donnent $\lim q^n = 0$.

Cas $q \leq -1$. Les termes alternent de signe : $q^{2k} \geq 1$ et $q^{2k+1} \leq -1$. Aucun intervalle de longueur inférieure à 2 ne peut contenir tous les termes à partir d'un rang, et la suite ne tend pas vers l'infini.

Conséquence pour une suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$ (avec $u_0 \neq 0$) : elle tend vers 0 si $|q| < 1$; elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (selon le signe de u_0) si $q > 1$.

Somme des termes. Pour $q \neq 1$ et tout entier n : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$.

Démonstration : si $S = 1 + q + \dots + q^n$, alors $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$, et $S - qS = 1 - q^{n+1}$, d'où $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$.

Limite de la somme. Si $-1 < q < 1$, q^{n+1} tend vers 0, donc $1 + q + \dots + q^n$ tend vers $1/(1 - q)$. Exemple : $1 + 1/2 + 1/4 + \dots + (1/2)^n$ tend vers $1/(1 - 1/2) = 2$. Si $q \geq 1$, la somme tend vers $+\infty$.

Résumé utile : une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = a u_n + b$ ($a \neq 1$) se ramène à une suite géométrique en posant $v_n = u_n - \ell$, où ℓ est la solution de $\ell = a\ell + b$. On a alors $v_{n+1} = a v_n$, donc $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$, et la limite se lit sur a^n .

Exemples résolus

Exemple 1 : une suite arithmético-géométrique étudiée de deux façons

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

a) Montrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$. b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite. c) On pose $v_n = u_n - 6$. Montrer que (v_n) est géométrique et retrouver la limite.

Résolution.

a) Notons $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$. Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5$. On a bien $0 \leq 1 \leq 3,5 \leq 6$. Hérédité : supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ pour un entier n . En multipliant par $0,5 > 0$: $0 \leq 0,5u_n \leq 0,5u_{n+1} \leq 3$. En ajoutant 3 : $3 \leq 0,5u_n + 3 \leq 0,5u_{n+1} + 3 \leq 6$, c'est-à-dire $3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$. A fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$: $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

b) La suite est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par 6, donc elle converge vers un réel ℓ . Comme u_{n+1} tend vers ℓ et $0,5u_n + 3$ vers $0,5\ell + 3$, l'unicité de la limite donne $\ell = 0,5\ell + 3$, soit $0,5\ell = 3$ et $\ell = 6$.

c) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 1 - 6 = -5$. Donc $v_n = -5 \times 0,5^n$ et $u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$. Comme $-1 < 0,5 < 1$, $0,5^n$ tend vers 0, et u_n tend vers 6. Les deux méthodes concordent.

Exemple 2 : lever des formes indéterminées

Déterminer la limite de $a_n = (3n^2 - 5n + 1)/(2n^2 + 7)$, puis celle de $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et de $c_n = 2^n - 3^n$.

Résolution.

a_n est de la forme ∞/∞ . Pour $n \geq 1$, on factorise par n^2 : $a_n = n^2(3 - 5/n + 1/n^2) / (n^2(2 + 7/n^2)) = (3 - 5/n + 1/n^2)/(2 + 7/n^2)$. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 2, donc $\lim a_n = 3/2$.

b_n est de la forme $\infty - \infty$. On multiplie et divise par la quantité conjuguée : $b_n = ((n+1) - n)/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim b_n = 0$.

c_n est de la forme $\infty - \infty$. On factorise par le terme qui croît le plus vite : $c_n = 3^n((2/3)^n - 1)$. Comme $0 < 2/3 < 1$, $(2/3)^n$ tend vers 0, donc $(2/3)^n - 1$ tend vers -1. Et 3^n tend vers $+\infty$ car $3 > 1$. Par produit, $\lim c_n = -\infty$.

Exemple 3 : gendarmes, comparaison et somme géométrique

a) Déterminer la limite de $u_n = (3n + \sin n)/(n+2)$. b) Déterminer la limite de $w_n = n^2 + (-1)^n n$. c) Déterminer la limite de $S_n = 1 + 1/3 + 1/3^2 + \dots + 1/3^n$.

Résolution.

- a) Pour tout n , $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $3n - 1 \leq 3n + \sin n \leq 3n + 1$. En divisant par $n + 2 > 0$: $(3n - 1)/(n + 2) \leq u_n \leq (3n + 1)/(n + 2)$. Par factorisation par n , les deux suites qui encadrent tendent vers $3/1 = 3$. D'après le théorème des gendarmes, **$\lim u_n = 3$** .
- b) Pour tout n , $(-1)^n n \geq -n$, donc $w_n \geq n^2 - n = n(n - 1)$. Or $n(n - 1)$ tend vers $+\infty$ (produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$). Par comparaison, **$\lim w_n = +\infty$** .
- c) S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = 1/3$ et de premier terme 1. Donc $S_n = (1 - (1/3)^{n+1})/(1 - 1/3) = (3/2)(1 - (1/3)^{n+1})$. Comme $-1 < 1/3 < 1$, $(1/3)^{n+1}$ tend vers 0, et **$\lim S_n = 3/2$** .

Méthodes et pièges

- Pour une récurrence, écris toujours la propriété $P(n)$ en toutes lettres, puis les trois parties avec leur titre. Dans l'hérédité, pars de l'hypothèse $P(n)$ et arrive à $P(n + 1)$, jamais l'inverse.
- Ne suppose jamais « $P(n)$ vraie pour tout n » dans l'hérédité : tu fixes UN entier n .
- Quand tu multiplies une inégalité dans une hérédité, vérifie le signe du facteur. C'est exactement l'argument $1 + a > 0$ de Bernoulli.
- Pour montrer qu'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone, une récurrence sur « $u_n \leq u_{n+1}$ » est souvent plus simple que le calcul de $u_{n+1} - u_n$.
- Avant d'appliquer une règle d'opération, identifie la forme. Si c'est une forme indéterminée, transforme : terme dominant, quantité conjuguée, simplification.
- Avec $(-1)^n$, $\sin n$ ou $\cos n$, pense encadrement : gendarmes pour une limite finie, comparaison pour une limite infinie.
- « Croissante et majorée par M » donne une convergence, pas une limite égale à M . Tu dois calculer la limite autrement.
- Une inégalité stricte devient large en passant à la limite : $u_n < 2$ pour tout n donne seulement $\lim u_n \leq 2$.
- Pour q^n , regarde d'abord q : supérieur à 1, entre -1 et 1, ou inférieur ou égal à -1. Ne confonds pas q^n avec nq .
- Pour une somme géométrique, compte bien les termes : $1 + q + \dots + q^n$ en contient $n + 1$, d'où l'exposant $n + 1$ dans la formule.

Vers le PASS

En PASS, les suites géométriques et les sommes géométriques réapparaissent dès qu'un phénomène se répète à intervalles réguliers avec une proportion constante : élimination d'un médicament administré à doses répétées (la quantité présente dans l'organisme tend vers un plateau, exactement la limite d'une suite arithmético-géométrique), décroissance radioactive observée à pas de temps fixe, croissance d'une population bactérienne par divisions successives. Le passage du discret au continu conduit à l'exponentielle et au logarithme, qui servent à lire des demi-vies et des échelles logarithmiques (pH, décibels). Le raisonnement par récurrence, lui, entraîne à la rigueur logique attendue dans les QCM de type « vrai ou faux » où une seule hypothèse oubliée rend une affirmation fausse.

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
- Détermine la limite de chacune des suites suivantes : a) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$; b) $v_n = (5 - 2n)/(n + 3)$; c) $w_n = 3 + 2/\sqrt{n}$ ($n \geq 1$) ; d) $z_n = n - \sqrt{n}$.
- Détermine la limite de : a) $a_n = 4 \times 0,7^n$; b) $b_n = -2 \times 1,05^n$; c) $c_n = (4^n - 1)/(4^n + 2)$; d) $d_n = (-0,9)^n + 5$.
- a) Détermine la limite de $u_n = (\cos n)/n$ pour $n \geq 1$. b) Détermine la limite de $v_n = n + (-1)^n$.
- a) À l'aide de l'inégalité de Bernoulli, montre que pour tout entier n , $1,01^n \geq 1 + 0,01n$. b) En déduire que $1,01^n \geq 100$ pour tout $n \geq 9\,900$.

Niveau 2 : type bac

- Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$.
a) Montre par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$. b) Justifie que (u_n) converge. c) On pose $v_n = u_n - 10$. Montre que (v_n) est géométrique, puis exprime u_n en fonction de n et donne la limite de (u_n) . d) À l'aide de la calculatrice, détermine le plus petit entier n tel que $u_n > 9,9$.
- a) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
b) En déduire que pour $n \geq 4$, $0 < n/2^n \leq 1/n$, puis la limite de $n/2^n$.
- Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2$.
a) Montre que (S_n) est croissante. b) Démontre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - 1/n$. c) En déduire que (S_n) converge et donne un majorant de sa limite.
- Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$.
a) Montre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n . b) Montre que (u_n) est décroissante. c) En déduire que (u_n) converge, puis que sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell/(1 + \ell)$. Détermine ℓ . d) Démontre par récurrence que $u_n = 1/(n + 1)$ pour tout n , et vérifie la cohérence avec c).

Niveau 3 : vers le PASS

- Un patient reçoit chaque jour à heure fixe une injection de 2 mg d'un médicament. En 24 heures, l'organisme élimine 30 % de la quantité présente. On note q_n la quantité (en mg) présente juste après la n -ième injection, avec $q_1 = 2$.
a) Justifie que $q_{n+1} = 0,7q_n + 2$. b) Montre que $q_n = 2(1 + 0,7 + 0,7^2 + \dots + 0,7^{n-1})$, puis que $q_n = (20/3)(1 - 0,7^n)$. c) Détermine la limite de (q_n) et interprète-la. d) À partir de quelle injection la quantité présente juste après l'injection dépasse-t-elle 6 mg ?
- Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie (démonstration ou contre-exemple).
a) Une suite croissante tend vers $+\infty$. b) Une suite bornée est convergente. c) Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang. d) Une suite convergente est bornée. e) Si $0 < u_n < 1/n$ pour tout $n \geq 1$, alors (u_n) converge vers 0.
- a) Soit $q > 1$. Rappelle comment l'inégalité de Bernoulli prouve que q^n tend vers $+\infty$.

b) Avec $q = 1,02$, trouve à l'aide de Bernoulli un entier N tel que $1,02^n \geq 1\,000$ pour tout $n \geq N$. c) Le plus petit entier n tel que $1,02^n \geq 1\,000$ vaut 349 (calculatrice). Compare avec b) et commente.

13. a) Démontre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.

b) On note T_n cette somme. Détermine la limite de T_n/n^4 .

Corrigés

1. Notons $P(n) : 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$.

Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche se réduit à 1 et $1^2 = 1$. $P(1)$ est vraie. Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$. Le terme suivant de la somme est $2(n+1) - 1 = 2n+1$. Donc $1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$. $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout $n \geq 1$, la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 .**

2. a) Forme $\infty - \infty$. $u_n = n^2(2 - 3/n + 1/n^2)$ pour $n \geq 1$; la parenthèse tend vers 2 et n^2 vers $+\infty$, donc **$\lim u_n = +\infty$.**

b) Forme ∞/∞ . $v_n = n(5/n - 2)/(n(1 + 3/n)) = (5/n - 2)/(1 + 3/n)$, qui tend vers $-2/1$. **$\lim v_n = -2$.** c) $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, donc $2/\sqrt{n}$ tend vers 0 et **$\lim w_n = 3$.** d) Forme $\infty - \infty$. Pour $n \geq 1$, $z_n = n(1 - 1/\sqrt{n})$. La parenthèse tend vers 1, n tend vers $+\infty$, donc **$\lim z_n = +\infty$.**

3. a) $-1 < 0,7 < 1$, donc $0,7^n$ tend vers 0 et **$\lim a_n = 0$.**

b) $1,05 > 1$, donc $1,05^n$ tend vers $+\infty$; multiplié par $-2 < 0$: **$\lim b_n = -\infty$.** c) Forme ∞/∞ . On divise numérateur et dénominateur par 4^n : $c_n = (1 - (1/4)^n)/(1 + 2(1/4)^n)$. Comme $(1/4)^n$ tend vers 0, **$\lim c_n = 1$.** d) $-1 < -0,9 < 1$, donc $(-0,9)^n$ tend vers 0 et **$\lim d_n = 5$.**

4. a) Pour $n \geq 1$, $-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $-1/n \leq u_n \leq 1/n$. Les deux suites qui encadrent tendent vers 0 ; par le théorème des gendarmes, **$\lim u_n = 0$.**

b) Pour tout n , $(-1)^n \geq -1$, donc $v_n \geq n - 1$. Or $n - 1$ tend vers $+\infty$. Par comparaison, **$\lim v_n = +\infty$.**

5. a) L'inégalité de Bernoulli $(1+a)^n \geq 1 + na$, valable pour $a > 0$, appliquée à $a = 0,01$ donne **$1,01^n \geq 1 + 0,01n$.**

b) Pour $n \geq 9\,900$, $0,01n \geq 99$, donc $1 + 0,01n \geq 100$. Avec a) : **$1,01^n \geq 100$ pour tout $n \geq 9\,900$.** (Ce rang n'est pas le plus petit possible, mais il suffit.)

6. a) $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

Initialisation : $u_0 = 0$, $u_1 = 0,8 \times 0 + 2 = 2$; $0 \leq 0 \leq 2 \leq 10$. Vrai. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, en multipliant par $0,8 > 0$: $0 \leq 0,8u_n \leq 0,8u_{n+1} \leq 8$, puis en ajoutant 2 : $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$. $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.** b) (u_n) est croissante et majorée par 10 : d'après le théorème de convergence monotone, **elle converge.** c) $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,8u_n - 8 = 0,8(u_n - 10) = 0,8v_n$: (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = -10$. Donc $v_n = -10 \times 0,8^n$ et **$u_n = 10 - 10 \times 0,8^n$.** Comme $-1 < 0,8 < 1$, $0,8^n$ tend vers 0 et **$\lim u_n = 10$.** d) $u_n > 9,9$ équivaut à $10 \times 0,8^n < 0,1$, soit $0,8^n < 0,01$. La calculatrice donne $0,8^{20} \approx 0,0115$ (trop grand) et $0,8^{21} \approx 0,0092$. La suite $(0,8^n)$ étant décroissante, **le plus petit entier est $n = 21$.**

7. a) $P(n) : 2^n \geq n^2$, pour $n \geq 4$.

Initialisation : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Vrai. Hérédité : soit $n \geq 4$ avec $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Il suffit de montrer $2n^2 \geq (n+1)^2$, c'est-à-dire $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, soit $(n-1)^2 \geq 2$. Pour $n \geq 4$, $(n-1)^2 \geq 9 \geq 2$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.** b) Pour $n \geq 4$, $2^n \geq n^2 > 0$, donc $0 < 1/2^n \leq 1/n^2$, et en multipliant par $n > 0$: $0 < n/2^n \leq n/n^2 = 1/n$. Comme $1/n$ tend vers 0, le théorème des

gendarmes donne $\lim n/2^n = 0$.

8. a) $S_{n+1} - S_n = 1/(n+1)^2 > 0$, donc (S_n) est croissante.

b) $P(n) : S_n \leq 2 - 1/n$. Initialisation : $S_1 = 1$ et $2 - 1/1 = 1$. Vrai. Hérédité : si $S_n \leq 2 - 1/n$, alors $S_{n+1} = S_n + 1/(n+1)^2 \leq 2 - 1/n + 1/(n+1)^2$. Il reste à montrer que $2 - 1/n + 1/(n+1)^2 \leq 2 - 1/(n+1)$, c'est-à-dire $1/(n+1)^2 \leq 1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1))$. Or $n(n+1) < (n+1)^2$, donc $1/(n(n+1)) > 1/(n+1)^2$. L'inégalité est vraie, donc $S_{n+1} \leq 2 - 1/(n+1)$. Conclusion : **pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - 1/n$** . c) Pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - 1/n < 2$: (S_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge, vers une limite inférieure ou égale à 2 (passage à la limite dans une inégalité).

9. a) $P(n) : u_n > 0$. Initialisation : $u_0 = 1 > 0$. Hérédité : si $u_n > 0$, alors $1 + u_n > 0$ et $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$ est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $u_{n+1} > 0$. **Pour tout n , $u_n > 0$** .

b) $u_{n+1} - u_n = u_n/(1 + u_n) - u_n = (u_n - u_n - u_n^2)/(1 + u_n) = -u_n^2/(1 + u_n)$. Comme $u_n > 0$, ce nombre est strictement négatif : (u_n) est décroissante. c) (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. Comme $1 + \ell \neq 0$, les opérations sur les limites donnent $u_n/(1 + u_n) \rightarrow \ell/(1 + \ell)$, et l'unicité de la limite donne $\ell = \ell/(1 + \ell)$. Alors $\ell(1 + \ell) = \ell$, soit $\ell^2 = 0$. $\ell = 0$. d) $P(n) : u_n = 1/(n+1)$. Initialisation : $u_0 = 1 = 1/1$. Hérédité : si $u_n = 1/(n+1)$, alors $u_{n+1} = (1/(n+1)) / (1 + 1/(n+1)) = (1/(n+1)) / ((n+2)/(n+1)) = 1/(n+2)$. Donc **$u_n = 1/(n+1)$ pour tout n** , et cette suite tend bien vers 0.

10. a) Juste avant la $(n+1)$ -ième injection, il reste 70 % de q_n , soit $0,7q_n$; l'injection ajoute 2 mg. Donc **$q_{n+1} = 0,7q_n + 2$** .

b) Récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1 : 2 \times 1 = 2 = q_1$. Si $q_n = 2(1 + 0,7 + \dots + 0,7^{n-1})$, alors $q_{n+1} = 0,7 \times 2(1 + \dots + 0,7^{n-1}) + 2 = 2(0,7 + \dots + 0,7^n) + 2 = 2(1 + 0,7 + \dots + 0,7^n)$. La formule est héréditaire. La somme entre parenthèses compte n termes de raison 0,7 : elle vaut $(1 - 0,7^n)/(1 - 0,7) = (1 - 0,7^n)/0,3$. Donc $q_n = (2/0,3)(1 - 0,7^n) = (20/3)(1 - 0,7^n)$. c) 0,7ⁿ tend vers 0, donc **$\lim q_n = 20/3 \approx 6,67$ mg**. La quantité juste après injection se stabilise vers un plateau d'environ 6,67 mg : l'élimination quotidienne (30 % de 20/3, soit 2 mg) compense alors exactement la dose injectée. d) $q_n \geq 6$ équivaut à $1 - 0,7^n \geq 0,9$, soit $0,7^n \leq 0,1$. La calculatrice donne $0,7^6 \approx 0,118$ et $0,7^7 \approx 0,082$. C'est à partir de la 7^e injection ($q_7 \approx 6,12$ mg).

11. a) **Faux**. $u_n = 1 - 1/(n+1)$ est croissante mais tend vers 1.

b) **Faux**. $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 mais n'a pas de limite. c) **Faux**. $u_n = n + 2(-1)^n$ vérifie $u_n \geq n - 2$, donc tend vers $+\infty$ par comparaison, mais $u_{2k} = 2k + 2$ et $u_{2k+1} = 2k - 1$: on a $u_{2k+1} < u_{2k}$ pour tout k , la suite n'est croissante à partir d'aucun rang. d) **Vrai**. Si u_n tend vers ℓ , à partir d'un rang N tous les termes sont dans $]\ell - 1 ; \ell + 1[$; les termes $u_0, \dots, u_{(N-1)}$ sont en nombre fini, donc la suite entière est encadrée par le plus petit et le plus grand de ces nombres et de $\ell - 1, \ell + 1$. e) **Vrai**. 0 et $1/n$ tendent vers 0 ; le théorème des gendarmes donne $\lim u_n = 0$.

12. a) On écrit $q = 1 + a$ avec $a = q - 1 > 0$. Bernoulli donne $q^n \geq 1 + na$, et $1 + na$ tend vers $+\infty$; par comparaison, q^n tend vers $+\infty$.

b) Avec $a = 0,02 : 1,02^n \geq 1 + 0,02n$. On a $1 + 0,02n \geq 1\,000$ dès que $0,02n \geq 999$, soit $n \geq 49\,950$. **$N = 49\,950$ convient**. c) Le rang exact, 349, est environ 143 fois plus petit. Bernoulli remplace une croissance géométrique par une croissance affine, beaucoup plus lente : la minoration est juste mais très grossière. Elle sert à prouver l'existence d'un rang, pas à trouver le plus petit.

13. a) $P(n) : T_n = (n(n+1)/2)^2$.

Initialisation : $T_1 = 1$ et $(1 \times 2/2)^2 = 1$. Vrai. Hérédité : si $T_n = n^2(n+1)^2/4$, alors $T_{n+1} = n^2(n+1)^2/4 + (n+1)^3 = (n+1)^2(n^2/4 + n+1) = (n+1)^2(n^2 + 4n + 4)/4 = (n+1)^2(n+2)^2/4 = ((n+1)(n+2)/2)^2$. $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout $n \geq 1$, $1^3 + \dots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$** . b) $T_n/n^4 = n^2(n+1)^2/(4n^4) = (1/4) \times ((n+1)/n)^2 = (1/4)(1 + 1/n)^2$. Comme $1 + 1/n$ tend vers 1, **$\lim T_n/n^4 = 1/4$** .

Limites de fonctions

COURS • M10 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$ et en un réel a , y compris à gauche et à droite.
- Interpréter graphiquement une limite : asymptote horizontale, asymptote verticale.
- Connaître les limites des fonctions de référence (puissances, inverse, racine carrée, exponentielle).
- Calculer une limite par somme, produit et quotient, et repérer une forme indéterminée.
- Lever une forme indéterminée : terme dominant, factorisation, quantité conjuguée, taux d'accroissement.
- Déterminer la limite d'une fonction composée.
- Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes pour les fonctions.
- Utiliser les croissances comparées de l'exponentielle et des puissances de x .
- Interpréter une limite dans un contexte (plateau, saturation, élimination).

Cours

1. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

On s'intéresse au comportement de $f(x)$ quand x devient très grand en valeur absolue. Les définitions prolongent celles des suites, la variable réelle x remplaçant l'entier n .

Limite infinie en $+\infty$. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$. On définit de même une limite $-\infty$, et les limites en $-\infty$.

Limite finie en $+\infty$. On dit que f tend vers le réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = \ell$.

Interprétation graphique. Si $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$ (ou en $-\infty$) : la courbe s'en rapproche autant qu'on veut quand x s'éloigne. La courbe peut couper son asymptote horizontale, ce qui n'a rien de contradictoire.

Limites de référence en $+\infty$ (n entier naturel non nul) :

Fonction	Limite en $+\infty$	Limite en $-\infty$
x^n	$+\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair
$1/x^n$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	(non définie)
$1/\sqrt{x}$	0	(non définie)
$\exp(x)$	$+\infty$	0

Une fonction peut aussi n'avoir aucune limite en $+\infty$: c'est le cas de $x \mapsto \sin x$ ou $\cos x$, qui oscillent indéfiniment entre -1 et 1.

2. Limite en un réel a

Soit a un réel qui appartient à l'ensemble de définition de f ou qui en est une borne (par exemple $a = 0$ pour $x \mapsto 1/x$).

Limite infinie en a. f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle $]a; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a (éventuellement d'un seul côté), la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe de f.

Limite à gauche, limite à droite. Il arrive que le comportement diffère de part et d'autre de a. On note $\lim_{(x \rightarrow a, x < a)} f(x)$, ou $\lim_{(x \rightarrow a^-)} f(x)$, la limite à gauche, et $\lim_{(x \rightarrow a^+)} f(x)$ la limite à droite. L'exemple type est la fonction inverse : $\lim_{(x \rightarrow 0^-)} 1/x = -\infty$ et $\lim_{(x \rightarrow 0^+)} 1/x = +\infty$. La droite $x = 0$ est asymptote verticale, mais $1/x$ n'a pas de limite en 0 au sens global, puisque les deux limites latérales diffèrent.

Pour la fonction $x \mapsto 1/x^2$, les deux limites latérales en 0 valent $+\infty$: on écrit simplement $\lim_{(x \rightarrow 0)} 1/x^2 = +\infty$.

Limite finie en a. f tend vers ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de ℓ dès que x est assez proche de a. Pour les fonctions usuelles (polynômes, quotients de polynômes, racine carrée, exponentielle) définies en a, la limite en a est simplement $f(a)$: ces fonctions sont continues, notion étudiée au chapitre suivant. Le travail ne commence que lorsque a est une borne où f n'est pas définie.

Le signe du dénominateur. Quand un quotient a un numérateur qui tend vers un réel non nul et un dénominateur qui tend vers 0, la limite est infinie et son signe dépend du signe du dénominateur au voisinage de a. On dresse alors un tableau de signes du dénominateur. C'est l'origine des notations 0^+ et 0^- .

Exemple. $f(x) = (x + 1)/(x - 2)$. Quand x tend vers 2, le numérateur tend vers 3. Si $x < 2$, $x - 2 < 0$ et tend vers 0 : on note $x - 2 \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{(x \rightarrow 2^-)} f(x) = -\infty$. Si $x > 2$: $\lim_{(x \rightarrow 2^+)} f(x) = +\infty$. La droite $x = 2$ est asymptote verticale.

Trois asymptotes à repérer

horizontale $y = \ell$: $f(x)$ tend vers ℓ en $\pm\infty$

verticale $x = a$: $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ en a

oblique $y = mx + p$: $f(x) - (mx + p)$ tend vers 0 en $\pm\infty$

Repères complémentaires, sans séquence causale

Asymptote oblique (complément). Si $f(x) - (mx + p)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote oblique à la courbe. L'énoncé donne en général l'équation de la droite ou une écriture de $f(x)$ qui la fait apparaître ; le signe de $f(x) - (mx + p)$ donne la position de la courbe par rapport à la droite.

3. Opérations sur les limites

Les tableaux établis pour les suites restent valables pour les fonctions, en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un réel a , à condition que toutes les limites soient prises au même endroit.

- Somme : $\ell + \ell'$; $\ell + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) + (-\infty)$ est une forme indéterminée.
- Produit : $\ell \times \ell'$; $\ell \times (\pm\infty) = \pm\infty$ selon la règle des signes si $\ell \neq 0$; $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$; $0 \times (\pm\infty)$ est une forme indéterminée.
- Quotient : ℓ/ℓ' si $\ell' \neq 0$; $\ell/(\pm\infty) = 0$; $\ell/0 = \pm\infty$ si $\ell \neq 0$, avec le signe du dénominateur ; $(\pm\infty)/\ell' = \pm\infty$; ∞/∞ et $0/0$ sont des formes indéterminées.

Une forme indéterminée n'est pas une limite qui n'existe pas : c'est une situation où les règles ne suffisent pas et où il faut transformer l'expression.

Polynômes et fonctions rationnelles en l'infini. Un polynôme a la même limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que son terme de plus haut degré. Un quotient de polynômes a la même limite en $\pm\infty$ que le quotient de leurs termes de plus haut degré. Justification sur un exemple : pour $x \neq 0$, $-2x^3 + 5x - 1 = x^3(-2 + 5/x^2 - 1/x^3)$, et la parenthèse tend vers -2. Donc la limite en $+\infty$ est $-\infty$ et la limite en $-\infty$ est $+\infty$.

Attention : ce raccourci ne vaut qu'en l'infini. En un réel a , un polynôme a pour limite sa valeur en a , et pour un quotient il faut regarder numérateur et dénominateur séparément.

4. Lever une forme indéterminée

Quatre techniques couvrent l'essentiel des situations du programme.

a) Factoriser par le terme dominant (en l'infini). Exemple : $f(x) = (3x^2 + x)/(x^2 - 5)$. Pour $x \neq 0$, $f(x) = (3 + 1/x)/(1 - 5/x^2)$, qui tend vers 3 en $+\infty$ et en $-\infty$. Asymptote horizontale $y = 3$.

b) Factoriser et simplifier (forme $0/0$ en un réel a). Si le numérateur et le dénominateur s'annulent tous deux en a , ce sont deux polynômes divisibles par $(x - a)$. Exemple : $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ pour $x \neq 3$. On a $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, donc $f(x) = x + 3$ et $\lim_{(x \rightarrow 3)} f(x) = 6$. Il n'y a pas d'asymptote verticale en 3 : la courbe est une droite privée d'un point.

c) Quantité conjuguée (racines carrées). Exemple : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$, de la forme $\infty - \infty$. On écrit $f(x) = ((x+1) - x)/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = 1/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$, qui tend vers 0.

d) Reconnaître un taux d'accroissement (forme 0/0). Si f est dérivable en a , $(f(x) - f(a))/(x - a)$ tend vers $f'(a)$ quand x tend vers a . Comme $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$: $\lim_{(x \rightarrow 0)} (\exp(x) - 1)/x = 1$. Cette limite est au programme et sert très souvent.

5. Limite d'une fonction composée

Théorème. Soient a, b, c des réels ou $\pm\infty$. Si $\lim_{(x \rightarrow a)} u(x) = b$ et $\lim_{(X \rightarrow b)} g(X) = c$, alors $\lim_{(x \rightarrow a)} g(u(x)) = c$.

En pratique, on pose $X = u(x)$, on calcule la limite b de X , puis la limite de $g(X)$ quand X tend vers b .

Exemples.

- $f(x) = \exp(-x^2)$ en $+\infty$: $X = -x^2$ tend vers $-\infty$, et $\exp(X)$ tend vers 0 quand X tend vers $-\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(-x^2) = 0$.
- $f(x) = \sqrt{1 + 1/x}$ en $+\infty$: $X = 1 + 1/x$ tend vers 1, et $\sqrt{X}$ tend vers 1. Donc la limite vaut 1.
- $f(x) = \exp(1/x)$ en 0^+ : $X = 1/x$ tend vers $+\infty$, et $\exp(X)$ tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow 0^+)} \exp(1/x) = +\infty$. En 0^- , X tend vers $-\infty$ et la limite vaut 0.
- $f(x) = (\exp(2x) - 1)/x$ en 0 : $f(x) = 2 \times (\exp(2x) - 1)/(2x)$. Avec $X = 2x$, qui tend vers 0, $(\exp(X) - 1)/X$ tend vers 1. Donc $\lim_{(x \rightarrow 0)} f(x) = 2$.

Calculer la limite d'une composée $g(u(x))$

1. Repérer la fonction intérieure u et la fonction extérieure g
2. Calculer b , limite de $u(x)$
3. Calculer la limite de $g(X)$ quand X tend vers b
4. Conclure

Le même théorème s'applique à une suite : si u_n tend vers b et si $g(X)$ tend vers c quand X tend vers b , alors $g(u_n)$ tend vers c . Par exemple $\exp(-n)$ tend vers 0.

6. Théorèmes de comparaison

Les résultats établis pour les suites s'étendent aux fonctions. On les énonce en $+\infty$; ils s'adaptent en $-\infty$ et en un réel a .

Comparaison. Si $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand et si $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$. Si $f(x) \leq g(x)$ pour x assez grand et si $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = -\infty$.

Gendarmes. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et si g et h ont la même limite réelle ℓ en $+\infty$, alors $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = \ell$.

Exemples.

- $f(x) = x + \cos x$: pour tout x , $\cos x \geq -1$, donc $f(x) \geq x - 1$, qui tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$.
- $f(x) = (\sin x)/x$ pour $x > 0$: $-1/x \leq f(x) \leq 1/x$, et les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = 0$. La droite $y = 0$ est asymptote horizontale, et la courbe la coupe une infinité de fois.

Ces théorèmes sont indispensables dès qu'une fonction trigonométrique ou un terme oscillant apparaît, car $\sin$ et $\cos$ n'ont pas de limite en l'infini.

7. Exponentielle et croissances comparées

Limites de l'exponentielle. $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} \exp(x) = 0$. La droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe de l'exponentielle.

Démonstration de la limite en $+\infty$. On sait que $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout réel x (la fonction $d(x) = \exp(x) - x - 1$ a pour dérivée $\exp(x) - 1$, négative sur $]-\infty ; 0]$ et positive sur $[0 ; +\infty[$, donc un minimum $d(0) = 0$). Comme $1 + x$ tend vers $+\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim \exp(x) = +\infty$. En $-\infty$, on écrit $\exp(x) = 1/\exp(-x)$: quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, $\exp(-x)$ aussi, et l'inverse tend vers 0.

Face à une forme indéterminée qui mélange exponentielle et puissance de x , l'exponentielle l'emporte toujours.

Théorème (croissances comparées). Pour tout entier naturel n :

- $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x)/x = +\infty$, et plus généralement $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x)/x^n = +\infty$;
- $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} x \exp(x) = 0$, et plus généralement $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} x^n \exp(x) = 0$;
- $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} x^n \exp(-x) = 0$.

Démonstration de $\exp(x)/x \rightarrow +\infty$. Étudions $g(x) = \exp(x) - x^2/2$ sur $[0 ; +\infty[$. On a $g'(x) = \exp(x) - x$. Or $\exp(x) \geq 1 + x > x$, donc $g'(x) > 0$: g est croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec $g(0) = 1$. Ainsi $g(x) \geq 1 > 0$, c'est-à-dire $\exp(x) > x^2/2$ pour $x \geq 0$. Pour $x > 0$, en divisant par x : $\exp(x)/x > x/2$. Comme $x/2$ tend vers $+\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x)/x = +\infty$.

Démonstration de $x \exp(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$. Posons $X = -x$, qui tend vers $+\infty$. Alors $x \exp(x) = -X \exp(-X) = -X/\exp(X) = -1/(\exp(X)/X)$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc l'expression tend vers 0.

Utilisation. Pour une forme indéterminée, on fait apparaître un quotient $\exp(x)/x^n$ ou un produit $x^n \exp(x)$ en factorisant.

- $f(x) = \exp(x) - x^3$ en $+\infty$ (forme $\infty - \infty$) : $f(x) = x^3(\exp(x)/x^3 - 1)$. La parenthèse tend vers $+\infty$, donc f tend vers $+\infty$.
- $f(x) = (x^2 + 1) \exp(-x)$ en $+\infty$: $f(x) = x^2 \exp(-x) + \exp(-x)$, somme de deux termes qui tendent vers 0. Limite 0.

Forme	Résultat	Où
$\exp(x)/x^n$	$+\infty$	en $+\infty$
$x^n/\exp(x) = x^n \exp(-x)$	0	en $+\infty$
$x^n \exp(x)$	0	en $-\infty$
$(\exp(x) - 1)/x$	1	en 0

Retenir : « l'exponentielle impose sa limite ». En $+\infty$, $\exp(x)$ l'emporte sur toute puissance de x ; en $-\infty$, $\exp(x)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de x ne tend vers l'infini.

Exemples résolus

Exemple 1 : étude complète des limites d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)/(x^2 - 1)$, définie sur $\mathbb{R}$ privé de -1 et 1 . Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes.

Résolution.

En $\pm\infty$: c'est une forme ∞/∞ . Pour $x \neq 0$, $f(x) = (2 - 3/x + 1/x^2)/(1 - 1/x^2)$, qui tend vers 2. **La droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.**

En 1 : le numérateur vaut $2 - 3 + 1 = 0$ et le dénominateur aussi : forme $0/0$. On factorise. Le trinôme $2x^2 - 3x + 1$ a pour racines 1 et $1/2$, donc $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - 1/2) = (x - 1)(2x - 1)$. Et $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, $f(x) = (2x - 1)/(x + 1)$. Donc $\lim_{(x \rightarrow 1)} f(x) = 1/2$: pas d'asymptote verticale en 1.

En -1 : avec l'écriture simplifiée, le numérateur $2x - 1$ tend vers -3 et le dénominateur $x + 1$ tend vers 0. Si $x < -1$, $x + 1 < 0$: le quotient de -3 par un nombre négatif tendant vers 0 tend vers $+\infty$. Si $x > -1$, $x + 1 > 0$ et le quotient tend vers $-\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow -1^-)} f(x) = +\infty$ et $\lim_{(x \rightarrow -1^+)} f(x) = -\infty$. **La droite $x = -1$ est asymptote verticale.**

Exemple 2 : quantité conjuguée

Déterminer les limites de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Résolution.

En $-\infty$: $\sqrt{x^2 + 1}$ tend vers $+\infty$ (composée : $x^2 + 1$ tend vers $+\infty$ et $\sqrt{x}$ aussi) et $-x$ tend vers $+\infty$. Par somme, $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} f(x) = +\infty$. Il n'y a pas d'indétermination ici.

En $+\infty$: forme $\infty - \infty$. On multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + 1} + x$, strictement positive : $f(x) = ((x^2 + 1) - x^2)/(\sqrt{x^2 + 1} + x) = 1/(\sqrt{x^2 + 1} + x)$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = 0$: la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Exemple 3 : exponentielle et croissances comparées

Déterminer les limites suivantes. a) $f(x) = (2x + 1) \exp(-x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$. b) $g(x) = \exp(x) - x^3 + 4$ en $+\infty$. c) $h(x) = (\exp(3x) - 1)/x$ en 0.

Résolution.

a) En $+\infty$: forme $\infty \times 0$. On développe : $f(x) = 2x \exp(-x) + \exp(-x)$. Par croissances comparées, $x \exp(-x)$ tend vers 0, et $\exp(-x)$ tend vers 0 (composée). Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = 0$. En $-\infty$: $2x + 1$ tend vers $-\infty$ et $\exp(-x)$ tend vers $+\infty$ (car $-x$ tend vers $+\infty$). Par produit, $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} f(x) = -\infty$.

b) Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$, $g(x) = x^3(\exp(x)/x^3 - 1 + 4/x^3)$. Par croissances comparées, $\exp(x)/x^3$ tend vers $+\infty$, donc la parenthèse tend vers $+\infty$, et x^3 aussi. $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} g(x) = +\infty$.

c) Forme $0/0$. On écrit $h(x) = 3 \times (\exp(3x) - 1)/(3x)$. Avec $X = 3x$, qui tend vers 0, $(\exp(X) - 1)/X$ tend vers 1. $\lim_{(x \rightarrow 0)} h(x) = 3$.

Méthodes et pièges

- Commence toujours par écrire la forme obtenue en appliquant les règles. Si elle n'est pas indéterminée, conclus directement : ne factorise pas pour rien.
- En l'infini, pour un polynôme ou un quotient de polynômes, factorise par le terme de plus haut degré et écris l'étape sur ta copie.
- En un réel a où le dénominateur s'annule, regarde d'abord le numérateur : s'il tend vers un réel non nul, la limite est infinie et tu étudies le signe du dénominateur de chaque côté ; s'il s'annule aussi, factorise par $(x - a)$.
- Une limite infinie en a donne une asymptote verticale $x = a$; une limite finie ℓ en $\pm\infty$ donne une asymptote horizontale $y = \ell$. Ne les confonds pas.
- Pour une composée, nomme la fonction intérieure $X = u(x)$ et calcule sa limite avant tout.
- Avec $\sin x$ ou $\cos x$, n'écris jamais leur limite en l'infini : encadre par -1 et 1 , puis utilise comparaison ou gendarmes.
- Avec l'exponentielle et une puissance de x , factorise pour faire apparaître $\exp(x)/x^n$ ou $x^n \exp(x)$, puis cite les croissances comparées.
- Piège classique : $\exp(-x)$ tend vers 0 en $+\infty$ mais vers $+\infty$ en $-\infty$. Vérifie le signe de l'exposant.
- La forme $0/0$ en 0 avec $\exp(x) - 1$ au numérateur se traite par le taux d'accroissement : $(\exp(x) - 1)/x$ tend vers 1 .

Vers le PASS

En PASS, les limites servent surtout à lire des modèles. Une cinétique enzymatique de Michaelis et Menten, $v = V_{\max} \times S/(K_m + S)$, tend vers $V_{\max}$ quand la concentration en substrat devient grande : c'est une asymptote horizontale, et elle traduit la saturation de l'enzyme. Une concentration plasmatique qui décroît comme $\exp(-kt)$ tend vers 0 sans jamais s'annuler. Les croissances comparées expliquent qu'une courbe du type $t \times \exp(-kt)$ finit toujours par redescendre. Enfin, la limite $(\exp(x) - 1)/x \rightarrow 1$ est la première pierre des approximations : pour x proche de 0 , $\exp(x)$ est proche de $1 + x$. Ces approximations au premier ordre servent à simplifier des modèles et à estimer la propagation des incertitudes sur une mesure.

Suite en PASS : Approximations et propagation des incertitudes

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Détermine les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de : a) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 1$; b) $g(x) = (4x^2 - 1)/(2x^2 + x + 3)$; c) $h(x) = (x + 5)/(x^2 + 1)$; d) $k(x) = (x^3 - 2)/(x + 1)$.
2. a) Soit $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$. Détermine les limites de f à gauche et à droite en 3 et interprète graphiquement. b) Soit $g(x) = 1/(x - 2)^2$. Détermine la limite de g en 2 .
3. Détermine les limites suivantes à l'aide du théorème de composition : a) $\exp(1/x)$ en $+\infty$, en 0^+ et en 0^- ; b) $\sqrt{4 + 1/x^2}$ en $+\infty$; c) $\exp(-x^2 + 3x)$ en $+\infty$.
4. Détermine les limites suivantes : a) $\exp(x) - x$ en $+\infty$; b) $x^2 \exp(-x)$ en $+\infty$; c) $(x - 1) \exp(x)$ en $-\infty$; d) $\exp(x)/(x^3 + 1)$ en $+\infty$.

5. a) Détermine la limite de $(2 + \sin x)/x$ en $+\infty$. b) Détermine la limite de $x - \sin x$ en $-\infty$.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - 4)$, définie sur $\mathbb{R}$ privé de -2 et 2 .

a) Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. b) Factorise le numérateur et le dénominateur, puis détermine la limite de f en -2 . c) Détermine les limites de f à gauche et à droite en 2 . d) Donne les équations des asymptotes à la courbe de f .

7. Soit $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$, définie sur $]1; +\infty[$.

a) Détermine la limite de f en 1 . b) Montre que pour tout $x > 1$, $f(x) = x + 1 + 2/(x - 1)$. c) En déduire que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et précise leur position relative. d) Détermine la limite de f en $+\infty$.

8. a) Détermine la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$.

b) Détermine la limite en 0 de $g(x) = (\sqrt{x + 4} - 2)/x$.

9. Soit $f(x) = x - 1 + \exp(-x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

a) Détermine la limite de f en $+\infty$. b) Montre que pour tout x , $f(x) = \exp(-x)(1 + (x - 1) \exp(x))$, puis détermine la limite de f en $-\infty$. c) Montre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et précise leur position relative.

Niveau 3 : vers le PASS

10. La vitesse d'une réaction enzymatique en fonction de la concentration S (en $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$) du substrat est $v(S) = 120S/(4 + S)$, en $\mu\text{mol} \cdot \text{min}^{-1}$, pour $S \geq 0$.

a) Détermine la limite de v en $+\infty$. Interprète graphiquement et dans le contexte. b) Calcule $v(4)$ et compare-le à la limite. c) Pour quelle concentration la vitesse atteint-elle 90 % de sa limite ?

11. L'effectif d'une population de bactéries (en milliers) est modélisé par $P(t) = 1\,000/(1 + 9 \exp(-0,2t))$, t en heures, $t \geq 0$.

a) Calcule $P(0)$. b) Détermine la limite de P en $+\infty$ et interprète-la. c) Montre que pour tout $t \geq 0$, $1\,000 - P(t) = 9\,000 \exp(-0,2t)/(1 + 9 \exp(-0,2t))$, puis que $P(t) < 1\,000$.

12. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

a) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, la courbe de f ne coupe jamais la droite $y = 2$. b) Si $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, la droite $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f . c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{100} \exp(-x) = 0$. d) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. e) La fonction $x \mapsto \cos x$ admet une limite en $+\infty$.

13. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)/x = +\infty$.

a) En posant $X = -x$, démontre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$. b) Vérifie que pour tout réel x , $x^2 \exp(-x) = 4 \times ((x/2) \exp(-x/2))^2$, puis démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp(-x) = 0$. c) Déduis-en la limite en $+\infty$ de $(x^2 + 3x) \exp(-x)$.

Corrigés

1. a) Terme dominant $-3x^3$: $f(x) = x^3(-3 + 2/x - 1/x^3)$ pour $x \neq 0$. En $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$ et la parenthèse vers -3 : **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$** . En $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$: **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$** .

b) Pour $x \neq 0$, $g(x) = (4 - 1/x^2)/(2 + 1/x + 3/x^2)$, qui tend vers $4/2$. **Limite 2 en $+\infty$ et en $-\infty$.** c) Pour $x \neq 0$, $h(x) = x(1 + 5/x)/(x^2(1 + 1/x^2)) = (1/x) \times (1 + 5/x)/(1 + 1/x^2)$. $1/x$ tend vers 0 et le quotient vers 1. **Limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.** d) Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $k(x) = x^3(1 - 2/x^3)/(x(1 + 1/x)) = x^2 \times (1 - 2/x^3)/(1 + 1/x)$. x^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ comme en $-\infty$ et le quotient tend vers 1. **Limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.**

2. a) Le numérateur tend vers $2 \times 3 + 1 = 7$. Si $x < 3$, $x - 3 < 0$ et tend vers 0 : **$\lim_{(x \rightarrow 3^-)} f(x) = -\infty$** . Si $x > 3$, $x - 3 > 0$: **$\lim_{(x \rightarrow 3^+)} f(x) = +\infty$** . **La droite $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de f .**

b) $(x - 2)^2 > 0$ pour $x \neq 2$ et tend vers 0, donc $1/(x - 2)^2$ tend vers $+\infty$ des deux côtés : **$\lim_{(x \rightarrow 2)} g(x) = +\infty$** , et la droite $x = 2$ est asymptote verticale.

3. a) En $+\infty$: $X = 1/x$ tend vers 0 et $\exp(X)$ tend vers $\exp(0) = 1$. **Limite 1.** En 0^+ : X tend vers $+\infty$, $\exp(X)$ aussi : **limite $+\infty$** . En 0^- : X tend vers $-\infty$ et $\exp(X)$ vers 0 : **limite 0**.

b) $X = 4 + 1/x^2$ tend vers 4 et $\sqrt{X}$ tend vers 2. **Limite 2.** c) $X = -x^2 + 3x = x^2(-1 + 3/x)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, et $\exp(X)$ tend vers 0. **Limite 0**.

4. a) Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$, $\exp(x) - x = x(\exp(x)/x - 1)$. Par croissances comparées, $\exp(x)/x$ tend vers $+\infty$, donc **la limite est $+\infty$** .

b) Par croissances comparées, **$\lim_{(x \rightarrow +\infty)} x^2 \exp(-x) = 0$** . c) $(x - 1) \exp(x) = x \exp(x) - \exp(x)$. En $-\infty$, $x \exp(x)$ tend vers 0 (croissances comparées) et $\exp(x)$ tend vers 0. **Limite 0**. d) Pour $x > 0$, $\exp(x)/(x^3 + 1) = (\exp(x)/x^3) \times x^3/(x^3 + 1)$. Le premier facteur tend vers $+\infty$ (croissances comparées), le second vers 1. **Limite $+\infty$** .

5. a) Pour tout x , $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$. Pour $x > 0$, $1/x \leq (2 + \sin x)/x \leq 3/x$. Les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$; par les gendarmes, **la limite est 0**.

b) $\sin x \geq -1$, donc $x - \sin x \leq x + 1$. Comme $x + 1$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$, par comparaison **$\lim_{(x \rightarrow -\infty)} (x - \sin x) = -\infty$** .

6. a) Pour $x \neq 0$, $f(x) = (1 + 1/x - 2/x^2)/(1 - 4/x^2)$, qui tend vers 1. **Limite 1 en $+\infty$ et en $-\infty$.**

b) $x^2 + x - 2$ a pour racines 1 et -2 : $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Et $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Pour $x \neq \pm 2$, $f(x) = (x - 1)/(x - 2)$. En -2 : $(-3)/(-4) = 3/4$. **$\lim_{(x \rightarrow -2)} f(x) = 3/4$** . c) En 2, $x - 1$ tend vers 1 et $x - 2$ vers 0. Si $x < 2$, $x - 2 < 0$: **$\lim_{(x \rightarrow 2^-)} f(x) = -\infty$** ; si $x > 2$: **$\lim_{(x \rightarrow 2^+)} f(x) = +\infty$** . d) **Asymptote horizontale $y = 1$ (en $\pm\infty$) et asymptote verticale $x = 2$** . Il n'y a pas d'asymptote en $x = -2$.

7. a) En 1^+ : le numérateur tend vers 2 et $x - 1$ tend vers 0 par valeurs positives. **$\lim_{(x \rightarrow 1^+)} f(x) = +\infty$** : la droite $x = 1$ est asymptote verticale.

b) $x + 1 + 2/(x - 1) = ((x + 1)(x - 1) + 2)/(x - 1) = (x^2 - 1 + 2)/(x - 1) = (x^2 + 1)/(x - 1) = f(x)$. **Égalité vérifiée.** c) $f(x) - (x + 1) = 2/(x - 1)$, qui tend vers 0 en $+\infty$: **D est asymptote oblique**. Pour $x > 1$, $2/(x - 1) > 0$: **la courbe est au-dessus de D**. d) $x + 1$ tend vers $+\infty$ et $2/(x - 1)$ vers 0. **$\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$** .

8. a) Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$: $f(x) = ((x^2 + 3x) - x^2)/(\sqrt{(x^2 + 3x)} + x) = 3x/(\sqrt{(x^2 + 3x)} + x)$. Comme $\sqrt{(x^2 + 3x)} = x\sqrt{(1 + 3/x)}$ pour $x > 0$, $f(x) = 3x/(x(\sqrt{(1 + 3/x)} + 1)) = 3/(\sqrt{(1 + 3/x)} + 1)$. Le dénominateur tend vers 2. **Limite 3/2**.

b) Forme 0/0. $g(x) = ((x + 4) - 4)/(x(\sqrt{(x + 4)} + 2)) = 1/(\sqrt{(x + 4)} + 2)$ pour $x \neq 0$. En 0, le dénominateur tend vers 4. **Limite 1/4**.

9. a) $x - 1$ tend vers $+\infty$ et $\exp(-x)$ vers 0. **$\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$** .

b) $\exp(-x)(1 + (x - 1) \exp(x)) = \exp(-x) + (x - 1) \exp(-x) \exp(x) = \exp(-x) + x - 1 = f(x)$. En $-\infty$: $(x - 1) \exp(x) = x \exp(x) - \exp(x)$ tend vers $0 - 0 = 0$ (croissances comparées), donc la parenthèse tend vers 1 ; $\exp(-x)$ tend vers $+\infty$. **$\lim_{(x \rightarrow -\infty)} f(x) = +\infty$** . c) $f(x) - (x - 1) = \exp(-x)$, qui tend vers 0 en $+\infty$: **la droite $y = x - 1$ est**

asymptote oblique en $+\infty$. Comme $\exp(-x) > 0$, la courbe est toujours au-dessus de cette droite.

10. a) Pour $S > 0$, $v(S) = 120/(4/S + 1)$, qui tend vers 120. $\lim v = 120 \mu\text{mol}\cdot\text{min}^{-1}$: la droite $v = 120$ est asymptote horizontale. Quand le substrat est très abondant, la vitesse plafonne : l'enzyme est saturée (c'est $V_{\max}$).

b) $v(4) = 480/8 = 60 \mu\text{mol}\cdot\text{min}^{-1}$, la moitié de la limite : la concentration $4 \text{ mmol}\cdot\text{L}^{-1}$ (la constante K_m) donne la demi-vitesse maximale. c) On résout $120S/(4 + S) = 108$ avec $S \geq 0$: $120S = 108(4 + S)$, soit $12S = 432$, donc $S = 36 \text{ mmol}\cdot\text{L}^{-1}$, neuf fois K_m . Atteindre 90 % de la vitesse maximale demande beaucoup plus de substrat que d'en atteindre 50 %.

11. a) $P(0) = 1\,000/(1 + 9) = 100$, soit 100 000 bactéries.

b) En $+\infty$, $-0,2t$ tend vers $-\infty$, donc $\exp(-0,2t)$ tend vers 0 et le dénominateur vers 1. $\lim P = 1\,000$: la population se stabilise vers 1 000 milliers, soit un million de bactéries (capacité maximale du milieu). La droite d'équation $y = 1\,000$ est asymptote horizontale. c) $1\,000 - P(t) = (1\,000(1 + 9 \exp(-0,2t)) - 1\,000)/(1 + 9 \exp(-0,2t)) = 9\,000 \exp(-0,2t)/(1 + 9 \exp(-0,2t))$. Ce quotient est strictement positif (exponentielle positive), donc $P(t) < 1\,000$ pour tout $t \geq 0$: la population reste sous son plafond sans jamais l'atteindre.

12. a) **Faux**. $f(x) = 2 + (\sin x)/x$ tend vers 2 en $+\infty$ (gendarmes) et $f(x) = 2$ pour tous les $x = k\pi$, k entier non nul.

b) **Faux**. Pour $x \neq 1$, $f(x) = (x - 1)(x + 1)/(x - 1) = x + 1$, qui tend vers 2 en 1 : limite finie, pas d'asymptote verticale. c) **Vrai**, par croissances comparées : $x^n \exp(-x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout entier n , ici $n = 100$. d) **Vrai**, c'est le théorème de comparaison : $g(x) \geq f(x)$ et f tend vers $+\infty$. e) **Faux**. $\cos x$ prend la valeur 1 en tous les $x = 2k\pi$ et la valeur -1 en tous les $x = (2k + 1)\pi$, aussi grands que l'on veut : elle ne se rapproche d'aucun réel et ne tend pas vers l'infini.

13. a) Quand x tend vers $-\infty$, $X = -x$ tend vers $+\infty$. $x \exp(x) = -X \exp(-X) = -X/\exp(X) = -1/(\exp(X)/X)$.

Comme $\exp(X)/X$ tend vers $+\infty$, son inverse tend vers 0 : $\lim (x \rightarrow -\infty) x \exp(x) = 0$.

b) $4 \times ((x/2) \exp(-x/2))^2 = 4 \times (x^2/4) \times \exp(-x) = x^2 \exp(-x)$. Égalité vérifiée. Posons $Y = x/2$, qui tend vers $+\infty$. $Y \exp(-Y) = Y/\exp(Y) = 1/(\exp(Y)/Y)$ tend vers 0. Donc $(Y \exp(-Y))^2$ tend vers 0 et $x^2 \exp(-x)$ tend vers 0. c) $(x^2 + 3x) \exp(-x) = x^2 \exp(-x) + 3 \times x \exp(-x)$. Le premier terme tend vers 0 par b), et $x \exp(-x) = 1/(\exp(x)/x)$ tend vers 0. La limite est 0.

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

COURS • M11 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Définir la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle, et l'interpréter graphiquement.
- Reconnaître les fonctions continues usuelles et justifier la continuité par opérations et composition.
- Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux en un point de raccord.
- Savoir qu'une fonction dérivable est continue, et que la réciproque est fausse.
- Utiliser l'image d'une suite convergente par une fonction continue.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence de solutions.
- Appliquer le corollaire (fonction continue strictement monotone) pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution.
- Encadrer une solution par balayage ou par dichotomie, et écrire l'algorithme de dichotomie.
- Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, monotonie, convergence, limite comme point fixe.

Cours

1. Fonction continue

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I . On dit que f est **continue en** a si $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = f(a)$. On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout réel de I .

Graphiquement, une fonction continue sur un intervalle a une courbe qui se trace « sans lever le crayon » : pas de saut, pas de trou. Cette image est une intuition, pas une définition : c'est la limite qui fait foi.

Contre-exemple : la partie entière. La fonction E qui à x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x ($E(2,7) = 2$, $E(-0,5) = -1$) est constante sur chaque intervalle $[k ; k + 1[$. En un entier k , la limite à

gauche vaut $k - 1$ et $f(k) = k$: la courbe fait un saut. E n'est pas continue en k , mais elle est continue sur chaque intervalle $[k ; k + 1[$.

Fonctions continues usuelles (admis).

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- Les fonctions exponentielle, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Opérations. La somme, le produit et le quotient (dénominateur non nul) de fonctions continues sont continus. La composée de deux fonctions continues est continue : si u est continue sur I et g continue sur un intervalle J contenant $u(I)$, alors $g \circ u$ est continue sur I . Ainsi $x \mapsto \exp(-x^2)$ ou $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Fonction définie par morceaux. Pour une fonction définie par deux expressions continues de part et d'autre d'un réel a , la seule question est le raccord en a : f est continue en a si et seulement si les limites à gauche et à droite en a sont égales à $f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ pour $x \leq 1$ et $f(x) = 2x - 1$ pour $x > 1$. À gauche, la limite en 1 vaut $1^2 = 1 = f(1)$; à droite, $2 \times 1 - 1 = 1$. Les deux coïncident : f est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$.

2. Continuité et dérivabilité

Théorème. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. Pour $x \neq a$, écrivons $f(x) - f(a) = (x - a) \times (f(x) - f(a))/(x - a)$. Quand x tend vers a , le premier facteur tend vers 0 et le second vers le nombre dérivé $f'(a)$, réel. Par produit, $f(x) - f(a)$ tend vers $0 \times f'(a) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = f(a)$.

La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0 : le taux d'accroissement $|h|/h$ vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$, il n'a pas de limite. La courbe présente un point anguleux. De même, la racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 (le taux $\sqrt{h}/h = 1/\sqrt{h}$ tend vers $+\infty$: tangente verticale).

Hierarchie des régularités

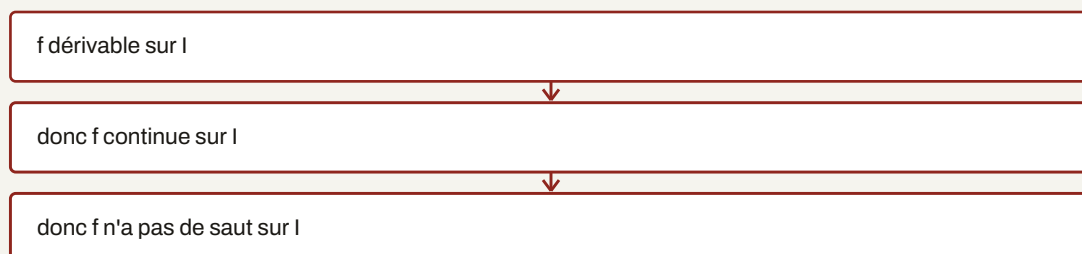


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Conséquence pratique : toute fonction dont on a calculé la dérivée sur un intervalle est continue sur cet intervalle. C'est ainsi qu'on justifie la continuité dans la plupart des exercices.

3. Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite de termes de I qui converge vers un réel a de I . Si f est continue en a , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

C'est une application directe du théorème de composition des limites : u_n tend vers a et $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a .

Exemple. $u_n = 2 + 1/n$ tend vers 2. La fonction exponentielle est continue en 2, donc $\exp(u_n)$ tend vers $\exp(2)$. La fonction $x \mapsto x^2 - 3x$ est continue en 2, donc $u_n^2 - 3u_n$ tend vers $4 - 6 = -2$.

Conséquence majeure : théorème du point fixe. Soit (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de I dans I . Si (u_n) converge vers un réel ℓ de I et si f est continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$: la limite est un point fixe de f .

Démonstration. La suite (u_{n+1}) a la même limite ℓ que (u_n) . Par ailleurs, f étant continue en ℓ , $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, l'unicité de la limite donne $\ell = f(\ell)$.

Le théorème ne dit pas que la suite converge. Il dit : SI elle converge (ce qu'on établit d'abord, souvent par monotonie et bornes), ALORS sa limite est solution de $f(x) = x$. Si l'équation a plusieurs solutions, on choisit grâce aux encadrements obtenus.

4. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, une fonction continue sur un intervalle ne « saute » aucune valeur : pour passer de $f(a)$ à $f(b)$, elle prend toutes les valeurs intermédiaires. L'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$, sans que le théorème en donne le nombre ni la valeur.

Cas particulier fréquent. Si f est continue sur $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.

Pourquoi la continuité est indispensable. La fonction partie entière vaut 0 en 0,5 et 1 en 1,5, mais ne prend jamais la valeur 0,7. Sans continuité, le théorème tombe.

Image d'un intervalle. On retient souvent la forme équivalente : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

5. Corollaire : existence et unicité d'une solution

Corollaire (théorème de la bijection). Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Justification. L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires. Pour l'unicité, si $c_1 < c_2$ étaient deux solutions, la stricte monotonie donnerait $f(c_1) < f(c_2)$ ou $f(c_1) > f(c_2)$, donc $f(c_1) \neq f(c_2)$: impossible puisque les deux valent k .

Extension aux intervalles ouverts ou infinis. Le corollaire s'étend à un intervalle $]a ; b[$, avec a ou b éventuellement infinis, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f aux bornes. Par exemple, si f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors pour tout réel k , $f(x) = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Convention des tableaux de variations. Dans un tableau de variations, une flèche oblique indique que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle correspondant. On applique le

corollaire intervalle par intervalle, puis on additionne les solutions.

Prouver qu'une équation $f(x) = k$ a une unique solution

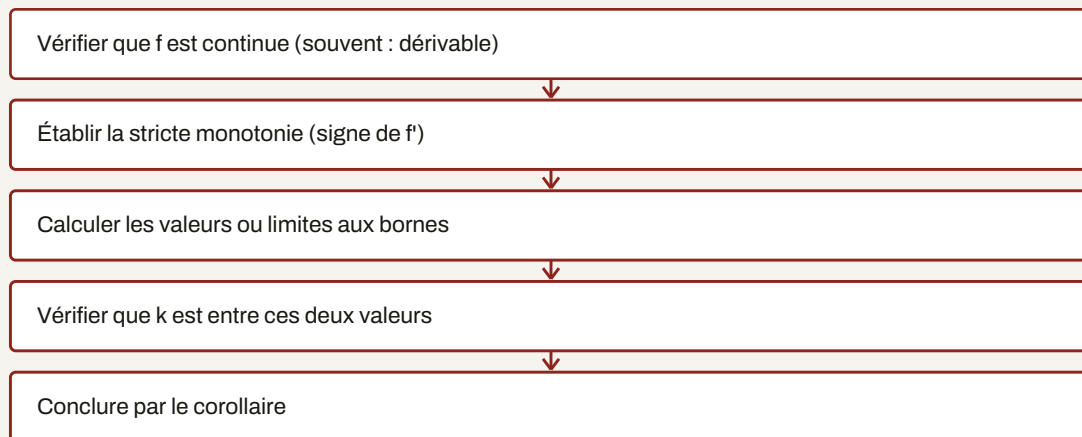


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

6. Encadrer une solution : balayage et dichotomie

Le corollaire assure l'existence d'une solution α , sans la donner. On l'encadre numériquement.

Balayage. On calcule f en des points régulièrement espacés (pas 0,1, puis 0,01) et on repère le changement de signe. Exemple : si $f(1,3) < 0 < f(1,4)$ et f est strictement croissante, alors $1,3 < \alpha < 1,4$.

Dichotomie. On part d'un intervalle $[a ; b]$ où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. On calcule le milieu $m = (a + b)/2$:

- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires ($f(a) \times f(m) \leq 0$), la solution est dans $[a ; m]$: on remplace b par m ;
- sinon, elle est dans $[m ; b]$: on remplace a par m .

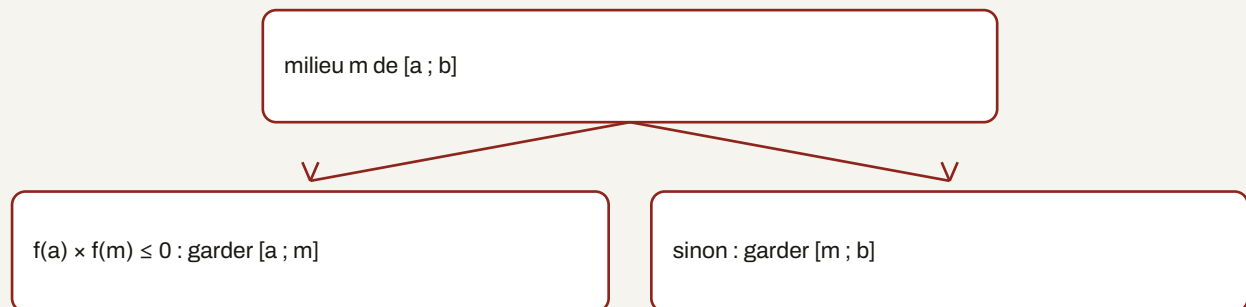
On recommence jusqu'à ce que la longueur $b - a$ soit inférieure à la précision voulue e . À chaque étape, la longueur est divisée par 2 : après n étapes, elle vaut $(b - a)/2^n$. Pour obtenir une précision e en partant d'un intervalle de longueur 1, il faut $2^n \geq 1/e$; pour $e = 0,001$, il faut $n = 10$ étapes ($2^{10} = 1\,024$).

En Python :

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

La fonction renvoie un encadrement $[a ; b]$ de longueur au plus e contenant une solution. Elle suppose f continue sur $[a ; b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$ au départ.

Une étape de dichotomie



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

7. Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

On étudie une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant continue. La méthode type comporte quatre étapes.

Étape 1 : un intervalle stable. On cherche un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ (pour tout x de I , $f(x) \in I$). Si $u_0 \in I$, une récurrence immédiate montre que tous les termes sont dans I , donc la suite est bornée.

Étape 2 : la monotonie. Si f est croissante sur I , la suite est monotone : une récurrence montre que le sens de variation est donné par la comparaison de u_0 et u_1 . Si $u_0 \leq u_1$, alors en appliquant f croissante, $f(u_0) \leq f(u_1)$, soit $u_1 \leq u_2$, et ainsi de suite : la suite est croissante. Si $u_0 \geq u_1$, elle est décroissante. En pratique, on démontre souvent d'un seul coup une propriété du type $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq b$.

Étape 3 : la convergence. Monotone et bornée, la suite converge (théorème de convergence monotone).

Étape 4 : la limite. f étant continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. On résout cette équation et on choisit parmi les solutions celle qui est compatible avec les encadrements ($\ell \in I$, $\ell \geq u_0$ si la suite est croissante...).

Lecture graphique. On trace la courbe de f et la droite $y = x$. Partant de u_0 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe (ordonnée $u_1 = f(u_0)$), on rejoint horizontalement la droite $y = x$ (abscisse u_1), puis on remonte à la courbe, et ainsi de suite. On obtient un « escalier » qui converge vers l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$, c'est-à-dire un point fixe. Quand f est décroissante, le tracé tourne autour du point fixe en « escargot ».

Les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = x$.

Exemples résolus

Exemple 1 : existence, unicité et encadrement d'une solution

On considère l'équation (E) : $x^3 + x - 1 = 0$. Montrer qu'elle admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis encadrer α à 0,01 près par dichotomie.

Résolution.

Posons $f(x) = x^3 + x - 1$. f est un polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En $+\infty$, $f(x)$ a la limite de son terme dominant x^3 : $+\infty$; en $-\infty$: $-\infty$. Comme 0 est compris entre $-\infty$ et $+\infty$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne **une unique solution α dans $\mathbb{R}$** .

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc $\alpha \in]0 ; 1[$.

Dichotomie (on garde la moitié où f change de signe) :

Étape	a	b	m	f(m)	Nouvel intervalle
1	0	1	0,5	-0,375	[0,5 ; 1]
2	0,5	1	0,75	0,171875	[0,5 ; 0,75]
3	0,5	0,75	0,625	$\approx -0,1309$	[0,625 ; 0,75]
4	0,625	0,75	0,6875	$\approx 0,0125$	[0,625 ; 0,6875]
5	0,625	0,6875	0,65625	$\approx -0,0611$	[0,65625 ; 0,6875]
6	0,65625	0,6875	0,671875	$\approx -0,0248$	[0,671875 ; 0,6875]
7	0,671875	0,6875	0,6796875	$\approx -0,0063$	[0,6796875 ; 0,6875]

Après 7 étapes, la longueur vaut $1/2^7 = 1/128 \approx 0,0078 < 0,01$. **$0,679 < \alpha < 0,688$** . (La valeur approchée de α est 0,682.)

Exemple 2 : une suite récurrente convergente

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On note $f(x) = \sqrt{x + 6}$ sur $[0 ; 3]$.

a) Montrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Résolution.

a) f est croissante sur $[0 ; 3]$ (composée de $x \mapsto x + 6$ croissante et de la racine carrée croissante). $P(n)$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,449$: $0 \leq 0 \leq \sqrt{6} \leq 3$. Vrai. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$, f étant croissante sur $[0 ; 3]$, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$, soit $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$, et a fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. Vrai. Conclusion : pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

b) La suite est croissante et majorée par 3 : elle converge vers un réel ℓ , et en passant à la limite dans $0 \leq u_n \leq 3$, $\ell \in [0 ; 3]$. La fonction f est continue sur $[0 ; 3]$, donc $\ell = f(\ell)$: $\ell = \sqrt{\ell + 6}$. En élevant au carré (les deux membres sont positifs), $\ell^2 = \ell + 6$, soit $\ell^2 - \ell - 6 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 24 = 25$, les solutions sont $(1 + 5)/2 = 3$ et $(1 - 5)/2 = -2$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$.

Exemple 3 : une équation mêlant exponentielle et polynôme

Montrer que l'équation $\exp(x) + x = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, en donner un encadrement d'amplitude 0,01, puis en déduire le signe de $g(x) = \exp(x) + x$.

Résolution.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables), donc continue, et $g'(x) = \exp(x) + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En $-\infty$: $\exp(x)$ tend vers 0 et x vers $-\infty$, donc g tend vers $-\infty$. En $+\infty$: g tend vers $+\infty$ (somme). 0 est compris entre ces limites : par le corollaire, **l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.**

Balayage : $g(-1) = e^{-1} - 1 \approx -0,632 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$, donc $\alpha \in]-1 ; 0[$. Puis $g(-0,6) \approx -0,051$ et $g(-0,5) \approx 0,107$: $\alpha \in]-0,6 ; -0,5[$. Enfin $g(-0,57) \approx -0,0045$ et $g(-0,56) \approx 0,0112$: **$-0,57 < \alpha < -0,56$.**

Signe : g est strictement croissante et s'annule en α , donc **$g(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$, $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.** Ce type de résultat sert ensuite à étudier une fonction dont la dérivée a le signe de g .

Méthodes et pièges

- Pour prouver la continuité d'une fonction usuelle, cite le type de fonction (polynôme, quotient, composée) ou dis qu'elle est dérivable. Pour une fonction par morceaux, compare les limites à gauche et à droite au point de raccord.
- Le théorème des valeurs intermédiaires donne au moins une solution ; pour en avoir exactement une, il faut la stricte monotonie. Écris les trois hypothèses : continue, strictement monotone, k entre les bornes.
- Sur un tableau de variations à plusieurs flèches, applique le corollaire sur chaque intervalle et compte les solutions intervalle par intervalle.
- N'oublie pas la continuité : une fonction qui change de signe sans être continue peut ne jamais s'annuler ($1/x$ vaut -1 en -1 et 1 en 1).
- En dichotomie, garde toujours la moitié où le produit $f(a) \times f(m)$ est négatif ou nul ; la longueur est divisée par 2 à chaque étape.
- Pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, l'ordre est imposé : prouver la convergence d'abord, puis seulement écrire $\ell = f(\ell)$. Écrire $\ell = f(\ell)$ sans convergence prouvée ne démontre rien.
- Si $f(x) = x$ a plusieurs solutions, élimine celles qui sont incompatibles avec l'intervalle stable ou la monotonie.
- Une fonction continue n'est pas forcément dérivable : pense à la valeur absolue et à la racine carrée en 0.

Vers le PASS

En PASS, la continuité est le cadre implicite de presque tous les modèles : une concentration, une température ou une pression varient continûment dans le temps, et c'est ce qui autorise à dire qu'une concentration plasmatique passée de 2 à $6 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ a franchi le seuil de $4 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ à un instant précis. Les équations qui mêlent exponentielle et polynôme n'ont souvent pas de solution exacte : on les résout numériquement, et la dichotomie est la plus simple des méthodes itératives, avant les méthodes plus rapides comme celle de Newton. Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ décrivent les dynamiques de population en temps discret et les algorithmes de calcul approché, comme celui de Héron pour les racines carrées.

Suite en PASS : Systèmes linéaires et calcul numérique

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax + 3$ si $x > 1$. Détermine a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction f continue sur $[-3 ; 5]$ a le tableau de variations suivant : f croît de $f(-3) = -2$ à $f(0) = 4$, puis décroît de $f(0) = 4$ à $f(5) = 1$. Combien de solutions ont, sur $[-3 ; 5]$, les équations a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 2$; c) $f(x) = 5$? Justifie.
3. Montre que l'équation $x^3 + 2x - 5 = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ; 2]$, puis donne un encadrement de α d'amplitude 0,1, puis 0,01.
4. Soit $u_n = 2 + 1/n$ pour $n \geq 1$. Détermine la limite de : a) $\exp(u_n)$; b) $\sqrt{u_n + 7}$; c) $u_n^2 - 3u_n$.
5. Applique trois étapes de dichotomie à partir de $[1 ; 2]$ pour encadrer $\sqrt{2}$, solution positive de $x^2 - 2 = 0$. Donne l'encadrement obtenu et sa longueur.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
a) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variations avec les limites. b) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$. c) Encadre à 0,1 près la solution comprise entre -1 et 1.
7. Soit $f(x) = (2x + 1)/(x + 1)$ sur $[0 ; +\infty[$ et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Montre que $f(x) = 2 - 1/(x + 1)$ et que f est croissante sur $[0 ; +\infty[$. b) Montre par récurrence que pour tout n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$. c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
8. On considère la fonction Python dichotomie du cours.
a) On l'applique avec $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,001$. Combien de passages dans la boucle sont effectués ? b) On l'applique à $f(x) = \exp(x) - 2$. Justifie qu'il existe une unique solution dans $[0 ; 1]$. c) Le programme renvoie (0,6923828125 ; 0,693359375). Que peux-tu en déduire ?
9. Soit $g(x) = \exp(x) - x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
a) Étudie les variations de g et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$. b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < 0 < \beta$. c) Donne un encadrement d'amplitude 0,1 de α et de β . d) Déduis-en le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Une population d'insectes, exprimée en fraction de la capacité maximale du milieu, suit le modèle $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$, avec $u_0 = 0,1$. On note $f(x) = 2x(1 - x)$.
a) Montre que f est croissante sur $[0 ; 1/2]$ et que $f([0,1 ; 1/2]) \subset [0,1 ; 1/2]$. b) Montre que pour tout n , $0,1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1/2$. c) Déduis-en que (u_n) converge et détermine sa limite. Interprète.
11. Après une prise orale, la concentration d'un médicament est modélisée par $C(t) = 8t \exp(-0,5t)$, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, t en heures, $t \geq 0$. Le médicament est efficace quand $C(t) \geq 4 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Montre que $C'(t) = 4(2 - t) \exp(-0,5t)$ et dresse le tableau de variations de C sur $[0 ; +\infty[$ (on admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$). b) Montre que l'équation $C(t) = 4$ admet exactement deux solutions t_1 et t_2 , avec $t_1 < 2 < t_2$. c) Donne t_1 et t_2 à $0,1$ près par défaut, puis une estimation de la durée d'efficacité.

12. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

a) Si f est continue sur $[a ; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution dans $[a ; b]$. b) Si f est dérivable sur I , elle est continue sur I . c) Si f est continue sur I , elle est dérivable sur I . d) Si (u_n) converge vers ℓ , avec $u_{n+1} = f(u_n)$ et f continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$. e) Si f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; 1]$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 0$, alors l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution dans $]0 ; 1]$.

13. Méthode de Héron. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$.

a) Montre que pour tout $x > 0$, $(x + 2/x)/2 - \sqrt{2} = (x - \sqrt{2})^2/(2x)$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$. b) Montre que $u_{n+1} - u_n = (2 - u_n^2)/(2u_n)$, puis que (u_n) est décroissante. c) Montre que (u_n) converge et que sa limite est $\sqrt{2}$. d) Calcule u_1 , u_2 et u_3 . Compare la vitesse de cette méthode avec celle de la dichotomie (exercice 5).

Corrigés

1. Sur $]-\infty ; 1]$ et sur $]1 ; +\infty[$, f est définie par des polynômes, donc continue. Il reste le point 1. On a $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, et la limite à gauche en 1 vaut 2. La limite à droite vaut $a \times 1 + 3 = a + 3$. f est continue en 1 si et seulement si $a + 3 = 2$, soit $a = -1$.

2. a) Sur $[-3 ; 0]$, f est continue et strictement croissante de -2 à 4 ; 0 est entre -2 et 4 , donc une unique solution sur $[-3 ; 0]$. Sur $[0 ; 5]$, f décroît de 4 à 1 : $f(x) \geq 1 > 0$, aucune solution. **Une solution.**

b) Sur $[-3 ; 0]$, 2 est entre -2 et 4 : une solution. Sur $[0 ; 5]$, 2 est entre 1 et 4 et f est continue strictement décroissante: une solution. **Deux solutions.** c) Le maximum de f sur $[-3 ; 5]$ est $4 < 5$. **Aucune solution.**

3. Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$, polynôme donc continu et dérivable, de dérivée $3x^2 + 2 > 0$: f est strictement croissante sur $[1 ; 2]$. $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$. Par le corollaire, $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[1 ; 2]$.

Balayage au pas $0,1$: $f(1,3) = 2,197 + 2,6 - 5 = -0,203 < 0$ et $f(1,4) = 2,744 + 2,8 - 5 = 0,544 > 0$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$. Pas $0,01$: $f(1,32) = 2,299968 + 2,64 - 5 \approx -0,060 < 0$ et $f(1,33) = 2,352637 + 2,66 - 5 \approx 0,013 > 0$, donc $1,32 < \alpha < 1,33$.

4. u_n tend vers 2.

a) $\exp$ est continue en 2: $\exp(u_n)$ tend vers $\exp(2) = e^2$. b) $x \mapsto \sqrt{x+7}$ est continue en 2: $\sqrt{u_n+7}$ tend vers $\sqrt{9} = 3$. c) $x \mapsto x^2 - 3x$ est continue en 2: $u_n^2 - 3u_n$ tend vers $4 - 6 = -2$.

5. On pose $f(x) = x^2 - 2$, continue; $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2 > 0$.

Étape 1: $m = 1,5$, $f(1,5) = 0,25 > 0$, on garde $[1 ; 1,5]$. Étape 2: $m = 1,25$, $f(1,25) = 1,5625 - 2 = -0,4375 < 0$, on garde $[1,25 ; 1,5]$. Étape 3: $m = 1,375$, $f(1,375) = 1,890625 - 2 \approx -0,109 < 0$, on garde $[1,375 ; 1,5]$. **$1,375 < \sqrt{2} < 1,5$, intervalle de longueur $0,125 = 1/2^3$.**

6. a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$: positive sur $]-\infty ; -1]$, négative sur $[-1 ; 1]$, positive sur $[1 ; +\infty[$. $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Limites: $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$ (terme dominant x^3). **f croît de $-\infty$ à 3 sur $]-\infty ; -1]$, décroît de 3 à -1 sur $[-1 ; 1]$, croît de -1 à $+\infty$ sur $[1 ; +\infty[$.**

b) f est continue (polynôme) et strictement monotone sur chacun des trois intervalles. Sur $]-\infty ; -1]$, 0 est entre $-\infty$ et 3: une solution. Sur $[-1 ; 1]$, 0 est entre 3 et -1 : une solution. Sur $[1 ; +\infty[$, 0 est entre -1 et

$+\infty$: une solution. **Exactement trois solutions.** c) $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$, f décroissante. $f(0,3) = 0,027 - 0,9 + 1 = 0,127 > 0$ et $f(0,4) = 0,064 - 1,2 + 1 = -0,136 < 0$. **La solution est entre 0,3 et 0,4.**

7. a) $2 - 1/(x+1) = (2(x+1) - 1)/(x+1) = (2x+1)/(x+1) = f(x)$. Sur $[0; +\infty[$, $f'(x) = 1/(x+1)^2 > 0$: **f est strictement croissante.**

b) $P(n) : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$. Initialisation : $u_0 = 1$, $u_1 = 3/2 : 1 \leq 1 \leq 1,5 \leq 2$. Hérédité : si $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, f croissante donne $f(1) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(2)$, avec $f(1) = 1,5$ et $f(2) = 5/3 \approx 1,67$. Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$. **La propriété est vraie pour tout n.** c) (u_n) est croissante et majorée par 2, donc converge vers $\ell \in [1; 2]$. f est continue sur $[0; +\infty[$, donc $\ell = f(\ell) : \ell(\ell+1) = 2\ell+1$, soit $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Discriminant 5, solutions $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ et $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0,618$. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = (1 + \sqrt{5})/2$ (le nombre d'or).

8. a) Après k passages, la longueur vaut $1/2^k$. La boucle continue tant que $1/2^k > 0,001$, c'est-à-dire $2^k < 1\,000$. Or $2^9 = 512 < 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 > 1\,000$. **10 passages.**

b) f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ (dérivée $\exp(x) > 0$), $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ et $f(1) = e - 2 \approx 0,718 > 0$. Par le corollaire, **une unique solution dans $[0; 1]$.** c) La solution α de $\exp(x) = 2$ vérifie **0,6923** $< \alpha < 0,6934$, encadrement de longueur $1/1\,024 \approx 0,00098$. On a donc $\alpha \approx 0,693$ à 10^{-3} près. (Ce nombre est $\ln 2$.)

9. a) $g'(x) = \exp(x) - 1$: négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$. g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, de minimum $g(0) = 1 - 0 - 2 = -1$. En $-\infty : \exp(x)$ tend vers 0 et $-x - 2$ vers $+\infty$, donc **g tend vers $+\infty$.** En $+\infty : g(x) = x(\exp(x)/x - 1 - 2/x)$, et $\exp(x)/x$ tend vers $+\infty$ (croissances comparées), donc **g tend vers $+\infty$.**

b) Sur $]-\infty; 0]$, g est continue, strictement décroissante de $+\infty$ à -1 : 0 est atteint une seule fois, en $\alpha < 0$. Sur $[0; +\infty[$, g est continue, strictement croissante de -1 à $+\infty$: une seule solution $\beta > 0$. **Exactement deux solutions.** c) $g(-1,9) \approx 0,1496 + 1,9 - 2 \approx 0,050 > 0$ et $g(-1,8) \approx 0,1653 + 1,8 - 2 \approx -0,035 < 0$: **$-1,9 < \alpha < -1,8$.** $g(1,1) \approx 3,004 - 3,1 \approx -0,096 < 0$ et $g(1,2) \approx 3,320 - 3,2 \approx 0,120 > 0$: **$1,1 < \beta < 1,2$.** d) Par les variations : **$g(x) > 0$ sur $]-\infty; \alpha[$ et sur $]\beta; +\infty[$, $g(x) < 0$ sur $]\alpha; \beta[$, g s'annule en α et β .**

10. a) $f(x) = 2x - 2x^2$, $f'(x) = 2 - 4x \geq 0$ pour $x \leq 1/2$: **f est croissante sur $[0; 1/2]$.** Donc pour $x \in [0,1; 1/2]$, $f(0,1) \leq f(x) \leq f(1/2)$, avec $f(0,1) = 0,18$ et $f(1/2) = 1/2$. Ainsi $f(x) \in [0,18; 0,5] \subset [0,1; 0,5]$.

b) Initialisation : $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,18 : 0,1 \leq 0,1 \leq 0,18 \leq 0,5$. Hérédité : si $0,1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1/2$, f croissante sur $[0; 1/2]$ donne $f(0,1) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1/2)$, soit $0,18 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,5$, donc $0,1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,5$. **Vrai pour tout n.** c) Croissante et majorée par $1/2$, (u_n) converge vers $\ell \in [0,1; 0,5]$. f est continue (polynôme), donc $\ell = 2\ell(1 - \ell)$, soit $\ell(2\ell - 1) = 0 : \ell = 0$ ou $\ell = 1/2$. Comme $\ell \geq 0,1$, $\ell = 1/2$: la population se stabilise à la moitié de la capacité maximale du milieu.

11. a) C est un produit : $C'(t) = 8 \exp(-0,5t) + 8t \times (-0,5) \exp(-0,5t) = \exp(-0,5t)(8 - 4t) = 4(2 - t) \exp(-0,5t)$. L'exponentielle étant strictement positive, $C'(t)$ a le signe de $2 - t$: C est strictement croissante sur $[0; 2]$ et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$. $C(0) = 0$, $C(2) = 16 e^{-1} \approx 5,89$, limite 0 en $+\infty$.

b) Sur $[0 ; 2]$, C est continue (dérivable), strictement croissante de 0 à 5,89 ; 4 est entre ces valeurs : une unique solution t_1 . Sur $[2 ; +\infty[$, C est continue strictement décroissante de 5,89 vers 0 (limite) ; 4 est entre 0 et 5,89 : une unique solution t_2 . Comme $C(2) \neq 4$, $t_1 < 2 < t_2$ et il y a exactement deux solutions.

c) $C(0,7) \approx 3,946 < 4$ et $C(0,8) \approx 4,290 > 4$: $t_1 \approx 0,7$ h (par défaut). $C(4,3) \approx 4,007 > 4$ et $C(4,4) \approx 3,900 < 4$: $t_2 \approx 4,3$ h (par défaut). Le médicament est efficace entre t_1 et t_2 , soit environ 3,6 heures (entre 3,5 et 3,7 h compte tenu des encadrements).

12. a) **Faux.** $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (exercice 6) vérifie $f(-2) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$, mais s'annule trois fois sur $[-2 ; 2]$. Il faut la stricte monotonie pour l'unicité.

b) **Vrai**, théorème du cours (démontré par le taux d'accroissement). c) **Faux.** $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0. d) **Vrai**, c'est le théorème du point fixe : u_{n+1} tend vers ℓ et $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$ par continuité. e) **Vrai.** Corollaire étendu à $]0 ; 1]$: f est continue et strictement décroissante, ses valeurs vont de $+\infty$ (limite en 0) à 0 ; 5 est compris entre 0 et $+\infty$, d'où une unique solution.

13. a) $(x + 2/x)/2 - \sqrt{2} = (x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x)/(2x) = (x - \sqrt{2})^2/(2x)$. Pour $x > 0$, ce nombre est positif ou nul. Par récurrence : $u_0 = 2 \geq \sqrt{2} > 0$; si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$ (somme de positifs) et $u_{n+1} - \sqrt{2} = (u_n - \sqrt{2})^2/(2u_n) \geq 0$. **Donc $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n .**

b) $u_{n+1} - u_n = (u_n + 2/u_n)/2 - u_n = (2/u_n - u_n)/2 = (2 - u_n^2)/(2u_n)$. Comme $u_n \geq \sqrt{2}$, $u_n^2 \geq 2$, donc le numérateur est négatif ou nul et le dénominateur positif : (u_n) est décroissante. c) Décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, (u_n) converge vers $\ell \geq \sqrt{2} > 0$. La fonction $f(x) = (x + 2/x)/2$ est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc $\ell = (\ell + 2/\ell)/2$, soit $2\ell = \ell + 2/\ell$, $\ell = 2/\ell$, $\ell^2 = 2$. Comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{2}$. d) $u_1 = (2 + 1)/2 = 1,5$; $u_2 = (1,5 + 2/1,5)/2 = (1,5 + 1,333...)/2 \approx 1,416667$; $u_3 = (1,416667 + 2/1,416667)/2 \approx (1,416667 + 1,411765)/2 \approx 1,414216$. Or $\sqrt{2} \approx 1,414214$: après 3 étapes, l'erreur est d'environ 2×10^{-6} , contre une incertitude de 0,125 pour 3 étapes de dichotomie. **La méthode de Héron converge beaucoup plus vite** : le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque étape.

Compléments sur la dérivation et convexité

COURS • M12 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	6
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer la dérivée d'une fonction composée, en particulier de $\exp(u)$, u^n , $\sqrt{u}$, $1/u$ et $f(ax + b)$.
- Calculer une dérivée seconde et l'interpréter.
- Définir une fonction convexe ou concave par la position de sa courbe par rapport à ses sécantes.
- Étudier la convexité d'une fonction à l'aide du sens de variation de f' ou du signe de f'' .
- Déterminer la position d'une courbe par rapport à une tangente grâce à la convexité.
- Reconnaître et justifier un point d'inflexion.
- Établir des inégalités de convexité (tangentes, sécantes) et les utiliser.
- Interpréter la convexité dans un contexte (accélération d'une croissance, instant de décroissance la plus rapide).

Cours

1. Dérivée d'une fonction composée

Rappel. La composée de u suivie de g est la fonction $g \circ u$ définie par $(g \circ u)(x) = g(u(x))$. Par exemple, $x \mapsto \exp(-x^2)$ est la composée de $u(x) = -x^2$ suivie de $g = \exp$.

Théorème. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. Alors $g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I : $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$.

On dérive la fonction extérieure en la laissant appliquée à $u(x)$, puis on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure.

Idee de la justification. Pour $h \neq 0$ petit, et lorsque $u(x + h) \neq u(x)$, on écrit le taux d'accroissement : $(g(u(x + h)) - g(u(x))) / h = [(g(u(x + h)) - g(u(x))) / (u(x + h) - u(x))] \times [(u(x + h) - u(x)) / h]$. Quand h tend vers 0, $u(x + h)$ tend vers $u(x)$ (u est continue car dérivable), donc le premier crochet tend vers $g'(u(x))$, et le second

vers $u'(x)$.

Cas particuliers à connaître (u dérivable sur I , avec les conditions indiquées) :

Fonction	Dérivée	Condition
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$	
u^n (n entier ≥ 1)	$n u' u^{n-1}$	
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$	$u > 0$ sur I
$1/u$	$-u'/u^2$	u ne s'annule pas sur I
$1/u^n = u^{-n}$	$-n u' / u^{n+1}$	u ne s'annule pas sur I
$f(ax + b)$	$a f'(ax + b)$	$ax + b$ dans l'intervalle de dérivabilité de f

Exemples.

- $f(x) = \exp(3x - 1) : u(x) = 3x - 1, u'(x) = 3$, donc $f'(x) = 3 \exp(3x - 1)$.
- $f(x) = (x^2 + 1)^5 : f'(x) = 5 \times 2x \times (x^2 + 1)^4 = 10x(x^2 + 1)^4$.
- $f(x) = \sqrt{1 - x}$ sur $]-\infty ; 1[: u'(x) = -1$, donc $f'(x) = -1/(2\sqrt{1 - x})$.
- $f(x) = \exp(-x^2/2) : u'(x) = -x$, donc $f'(x) = -x \exp(-x^2/2)$.

La dérivée de $\exp(u)$ a TOUJOURS le signe de u' , puisque l'exponentielle est strictement positive. Cela simplifie beaucoup les études de variations.

2. Dérivée seconde

Définition. Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I , on appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de f' , notée f'' . On dit alors que f est deux fois dérivable sur I .

Exemples. Pour $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 : f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$. Pour $f(x) = \exp(2x) : f'(x) = 2 \exp(2x)$ et $f''(x) = 4 \exp(2x)$.

Interprétation. f' mesure la vitesse de variation de f ; f'' mesure la vitesse de variation de f' , c'est-à-dire la façon dont la pente évolue. En physique, si $x(t)$ est la position d'un mobile, $x'(t)$ est sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. Une croissance qui « accélère » correspond à f' croissante ($f'' \geq 0$) ; une croissance qui « ralentit » correspond à f' décroissante ($f'' \leq 0$), même si f continue d'augmenter.

3. Fonctions convexes et concaves

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe. Pour deux points A et B de C , le segment $[AB]$ s'appelle une **corde** (ou sécante).

Définition. f est **convexe** sur I si, pour tous points A et B de C d'abscisses dans I , la courbe est située **en dessous** de la corde $[AB]$ entre A et B . f est **concave** sur I si la courbe est située **au-dessus** de chacune de ses cordes.

Traduction algébrique : f est convexe sur I si, pour tous a et b de I et tout t de $[0 ; 1]$, $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + t f(b)$. Le membre de gauche est l'ordonnée du point de la courbe, celui de droite l'ordonnée du point de la corde, à la même abscisse.

Exemples de référence.

- $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$: sa courbe, une parabole tournée vers le haut, est sous ses cordes.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- $x \mapsto x^3$ est concave sur $] -\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- Une fonction affine est à la fois convexe et concave : sa courbe est sa propre corde.

On remarque que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. Il suffit donc de bien connaître le cas convexe.

Image mentale

convexe : courbe « en creux », sous ses cordes, au-dessus de ses tangentes

concave : courbe « en dôme », au-dessus de ses cordes, sous ses tangentes

point d'inflexion : la courbe change de creux en dôme

Repères complémentaires, sans séquence causale

4. Caractérisations de la convexité

Pour une fonction dérivable, la définition par les cordes est peu pratique. On utilise les équivalences suivantes, admises.

Théorème (admis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I ;
- f' est croissante sur I ;
- la courbe de f est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur I .

Corollaire. Si f est deux fois dérivable sur I , alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I , et f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I .

C'est logique : $f'' \geq 0$ signifie que f' est croissante, donc que la pente de la tangente augmente quand on avance vers la droite. La courbe « tourne vers le haut ».

Vérification sur les exemples de référence.

- $(x^2)'' = 2 > 0$: convexe sur $\mathbb{R}$.
- $\exp'' = \exp > 0$: convexe sur $\mathbb{R}$.

- $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$, qui est décroissante sur $]0; +\infty[$: $\sqrt{}$ est concave.
- $(1/x)'' = 2/x^3$, positive sur $]0; +\infty[$, négative sur $]-\infty; 0[$.
- $(x^3)'' = 6x$: négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$.

Étudier la convexité de f

1. Calculer f' puis f'' • 2. Étudier le signe de f'' (ou le sens de variation de f') • 3. $f'' \geq 0$: convexe ; $f'' \leq 0$: concave • 4. Repérer les changements de signe : points d'inflexion

Position par rapport à une tangente. La tangente à C au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Si f est convexe sur I , alors pour tout x de I : $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$. Si f est concave, l'inégalité est inversée. On obtient ainsi des inégalités sans étudier de fonction auxiliaire.

5. Point d'inflexion

Définition. Soit f une fonction dérivable sur I et A un point de sa courbe d'abscisse a . On dit que A est un **point d'inflexion** si la courbe traverse sa tangente en A . De manière équivalente, la convexité de f change en a : f est convexe d'un côté de a et concave de l'autre.

Propriété. Si f est deux fois dérivable sur I et si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point de la courbe d'abscisse a est un point d'inflexion.

Exemple. $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 en changeant de signe. L'origine est un point d'inflexion ; la tangente en 0 est l'axe des abscisses, et la courbe passe de dessous à dessus.

Le changement de signe est indispensable. Pour $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ s'annule en 0 mais reste positive : f est convexe sur $\mathbb{R}$, et l'origine n'est PAS un point d'inflexion.

Interprétation. En un point d'inflexion, f' atteint un extremum local : c'est l'endroit où la croissance (ou la décroissance) est la plus rapide. Sur une courbe de croissance d'une population en S , le point d'inflexion marque l'instant où la population croît le plus vite, avant de ralentir vers son plafond.

6. Inégalités de convexité

La convexité fournit des inégalités classiques, de deux types.

Inégalités de tangente. Comme l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = x + 1$: pour tout réel x , $\exp(x) \geq 1 + x$. L'égalité n'a lieu qu'en $x = 0$.

Comme la racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$, sa courbe est en dessous de sa tangente en 1, d'équation $y = (x - 1)/2 + 1 = (x + 1)/2$: pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq (x + 1)/2$.

Application. Pour tout entier $n \geq 1$, en appliquant $\exp(x) \geq 1 + x$ à $x = 1/n$: $\exp(1/n) \geq 1 + 1/n$. Les deux membres étant positifs, on élève à la puissance n : $\exp(1) \geq (1 + 1/n)^n$. Donc $(1 + 1/n)^n \leq e$ pour tout $n \geq 1$.

Inégalités de corde. En prenant $t = 1/2$ dans la définition, une fonction convexe vérifie, pour tous a et b de I : $f((a + b)/2) \leq (f(a) + f(b))/2$. L'image de la moyenne est inférieure à la moyenne des images. Pour une fonction concave, c'est l'inverse.

- Avec $f = \exp$: $\exp((a + b)/2) \leq (\exp(a) + \exp(b))/2$.
- Avec $f = \sqrt{}$ (concave) : pour $a, b \geq 0$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})/2 \leq \sqrt{(a + b)/2}$.

Démonstration directe par une fonction auxiliaire. On peut toujours retrouver une inégalité de tangente en étudiant la différence. Pour $\exp(x) \geq 1 + x$, on pose $d(x) = \exp(x) - 1 - x$: $d'(x) = \exp(x) - 1$, négative sur $]-\infty ; 0]$, positive sur $[0 ; +\infty[$. d admet un minimum en 0, égal à $d(0) = 0$, donc $d(x) \geq 0$ pour tout x .

7. Synthèse : étude complète d'une fonction

Une étude de fonction de Terminale enchaîne désormais :

1. ensemble de définition et limites aux bornes (asymptotes) ;
2. dérivée f' (avec la formule de dérivation d'une composée si besoin), signe de f' , tableau de variations ;
3. dérivée seconde f'' , signe de f'' , intervalles de convexité et de concavité, points d'inflexion ;
4. tangentes remarquables et position de la courbe par rapport à elles.

Le tableau de f' renseigne sur les variations de f ; le tableau de f'' renseigne sur la convexité de f . Ne les mélange pas : une fonction peut être croissante et concave ($\sqrt{x}$), ou décroissante et convexe ($\exp(-x)$).

Exemples résolus

Exemple 1 : dériver des fonctions composées

Calculer la dérivée de : $f(x) = (3x^2 - 1)^4$; $g(x) = \exp(-x^2/2)$; $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; $k(x) = 1/(2x + 1)^3$ sur $]-1/2 ; +\infty[$.

Résolution.

$f = u^4$ avec $u(x) = 3x^2 - 1$, $u'(x) = 6x$. Donc $f'(x) = 4 \times 6x \times (3x^2 - 1)^3 = 24x(3x^2 - 1)^3$.

$g = \exp(u)$ avec $u(x) = -x^2/2$, $u'(x) = -x$. Donc $g'(x) = -x \exp(-x^2/2)$, du signe de $-x$.

$h = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$. Donc $h'(x) = 2x/(2\sqrt{x^2 + 1}) = x/\sqrt{x^2 + 1}$.

$k = u^{-3}$ avec $u(x) = 2x + 1$, non nul sur $]-1/2 ; +\infty[$, $u'(x) = 2$. Donc $k'(x) = -3 \times 2 \times (2x + 1)^{-4} = -6/(2x + 1)^4$.

Exemple 2 : convexité, point d'inflexion et tangente

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$. a) Étudier la convexité de f . b) Montrer que la courbe admet un point d'inflexion A et donner l'équation de la tangente T en A. c) Étudier la position de la courbe par rapport à T.

Résolution.

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. $f''(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$ et $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. **f est concave sur $]-\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$.**

b) f'' s'annule en 1 en changeant de signe : le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, donc **$A(1 ; 0)$** . $f'(1) = 3 - 6 = -3$. La tangente a pour équation $y = -3(x - 1) + 0$, soit **$T : y = -3x + 3$** .

c) $f(x) - (-3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$. Ce nombre est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$: la courbe est sous T à gauche de A et au-dessus à droite. Elle traverse sa tangente, ce qui confirme le point d'inflexion, et c'est cohérent avec a) : sous la tangente là où f est concave, au-dessus là où elle est convexe.

Exemple 3 : la courbe en cloche

Soit $g(x) = \exp(-x^2/2)$ sur $\mathbb{R}$ (courbe utilisée en statistique pour la loi normale). a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. b) Étudier la convexité de g et déterminer ses points d'inflexion.

Résolution.

a) Par l'exemple 1, $g'(x) = -x \exp(-x^2/2)$. C'est un produit : avec $v(x) = -x$ ($v' = -1$) et $w(x) = \exp(-x^2/2)$ ($w' = -x \exp(-x^2/2)$) : $g''(x) = -1 \times \exp(-x^2/2) + (-x)(-x \exp(-x^2/2)) = (x^2 - 1) \exp(-x^2/2)$.

b) L'exponentielle étant strictement positive, $g''(x)$ a le signe de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$: positif sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, négatif sur $]-1 ; 1[$. **g est convexe sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, concave sur $]-1 ; 1[$.** g'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1 : la courbe a **deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1** , d'ordonnée $\exp(-1/2) \approx 0,607$. En statistique, ces abscisses correspondent à un écart type de part et d'autre de la moyenne.

Méthodes et pièges

- Pour dériver une composée, identifie d'abord la fonction intérieure u et écris u' . L'erreur la plus fréquente est d'oublier le facteur u' : la dérivée de $\exp(3x)$ est $3 \exp(3x)$, pas $\exp(3x)$.
- Pour $(ax + b)^n$, n'oublie pas le facteur a : la dérivée de $(2x - 5)^7$ est $14(2x - 5)^6$.
- Pour le signe de f' ou de f'' , mets en facteur les termes strictement positifs (exponentielle, carré non nul) et étudie le reste.
- Convexe signifie $f'' \geq 0$, pas $f \geq 0$ ni f croissante. Ne confonds pas le tableau de f' (variations) et celui de f'' (convexité).
- Un point d'inflexion exige que f'' change de signe, pas seulement qu'elle s'annule (contre-exemple x^4).
- Pour placer une courbe par rapport à une tangente, utilise la convexité : convexe, la courbe est au-dessus ; concave, en dessous. Si l'intervalle contient un point d'inflexion, la position change.
- Pour démontrer une inégalité du type $\exp(x) \geq 1 + x$, deux méthodes : la convexité (courbe au-dessus de la tangente) ou l'étude de la fonction différence.
- Une fonction convexe qui admet un point où $f'(a) = 0$ y atteint son minimum sur l'intervalle, puisque sa courbe est au-dessus de la tangente horizontale en ce point.

Vers le PASS

En PASS, la dérivée d'une composée est omniprésente : vitesse de décroissance d'une concentration $C_0 \exp(-kt)$, dont la dérivée vaut $-kC_0 \exp(-kt)$, sensibilité d'une grandeur à une variation de ses paramètres, calcul d'incertitudes. La dérivée seconde et la convexité servent à lire les courbes biologiques : le point d'inflexion d'une courbe de croissance en S (croissance logistique d'une population, courbe de saturation de l'hémoglobine en dioxygène) indique l'endroit où la variation est la plus rapide ; les points d'inflexion de la courbe en cloche sont à un écart type de la moyenne, ce qui relie l'analyse aux statistiques. Enfin, l'optimisation (chercher un maximum ou un minimum) repose sur le signe de la dérivée, et la convexité assure qu'un minimum local est global.

Suite en PASS : Fonctions, dérivées et optimisation

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Calcule la dérivée des fonctions suivantes, sur un intervalle où elles sont dérivables : a) $f(x) = (2x - 5)^7$; b) $g(x) = \exp(3x^2 + 1)$; c) $h(x) = \sqrt{4 - x}$ sur $]-\infty ; 4[$; d) $k(x) = 1/(x^2 + 1)^2$.
2. Soit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Calcule $f'(x)$, étudie la convexité de f et détermine les points d'inflexion de sa courbe.
3. On donne le sens de variation de la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$: f' est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$. Que peux-tu dire de la convexité de f ? de la courbe au point d'abscisse 2 ?
4. a) Donne l'équation de la tangente à la courbe de $\exp$ en 0 et justifie que $\exp(x) \geq x + 1$ pour tout x . b) Donne l'équation de la tangente à la courbe de la racine carrée au point d'abscisse 4 et déduis-en une inégalité valable pour tout $x \geq 0$.
5. Soit $f(x) = x \exp(x)$. Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$, puis détermine le point d'inflexion de la courbe.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = \exp(-x) + x$ sur $\mathbb{R}$.
a) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f (sans les limites). b) Montre que f est convexe sur $\mathbb{R}$. c) Déduis-en que pour tout réel x , $\exp(-x) \geq 1 - x$. d) Donne l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 1 et précise la position de la courbe par rapport à T .
7. Soit $g(x) = 1/(1 + \exp(-x))$ sur $\mathbb{R}$ (fonction sigmoïde).
a) Montre que $g'(x) = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))^2$, puis que $g'(x) = g(x)(1 - g(x))$. b) Déduis-en que $g''(x) = g'(x)(1 - 2g(x))$. c) Étudie le signe de $1 - 2g(x)$, puis la convexité de g . Montre que la courbe a un point d'inflexion I que tu préciseras. d) Donne l'équation de la tangente en I .
8. a) En utilisant la concavité de la racine carrée, montre que pour tous $a, b \geq 0$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})/2 \leq \sqrt{(a + b)/2}$. Vérifie avec $a = 1$ et $b = 9$.
b) Montre que pour tous réels a et b , $(\exp(a) + \exp(b))/2 - \exp((a + b)/2) = (\exp(a/2) - \exp(b/2))^2/2$. Retrouve ainsi l'inégalité de convexité de l'exponentielle. c) Applique b) avec $a = 0$ et $b = 2$.
9. Dans un repère orthonormé (unité 1 m), un rectangle a un sommet à l'origine, deux côtés sur les axes et le sommet opposé $M(x ; \sqrt{4 - x^2})$ sur le quart de cercle de centre O et de rayon 2, avec $0 \leq x \leq 2$. Son aire est $A(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.
a) Montre que pour $0 \leq x < 2$, $A'(x) = (4 - 2x^2)/\sqrt{4 - x^2}$. b) Déduis-en la valeur de x qui rend l'aire maximale et cette aire maximale.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Après une prise orale, la concentration d'un médicament est $C(t) = 10t \exp(-t/2)$, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, t en heures, $t \geq 0$.
a) Calcule $C'(t)$ et détermine l'instant du pic de concentration et sa valeur. b) Montre que $C''(t) = 2,5(t - 4) \exp(-t/2)$. c) Étudie la convexité de C et détermine le point d'inflexion. Interprète-le en termes de vitesse d'élimination. d) Calcule $C'(4)$ et interprète.
11. Soit m un réel et $\sigma > 0$. On considère $f(x) = \exp(-(x - m)^2/(2\sigma^2))$.

a) Calcule $f'(x)$. b) Montre que $f'(x) = ((x - m)^2 - \sigma^2)/\sigma^4 \times f(x)$. c) Déduis-en les abscisses des points d'inflexion de la courbe de f . Que représentent m et σ graphiquement ?

12. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

a) Si $f'(a) = 0$, la courbe de f a un point d'inflexion d'abscisse a . b) Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. c) Si f est convexe et dérivable sur I et si $f'(a) = 0$, alors $f(a)$ est le minimum de f sur I . d) La somme de deux fonctions convexes deux fois dérivables est convexe. e) Le produit de deux fonctions convexes est convexe.

13. Soit n un entier, $n \geq 2$, et $h(x) = (1 + x)^n$ sur $]-1; +\infty[$.

a) Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$, puis montre que h est convexe sur $]-1; +\infty[$. b) Donne l'équation de la tangente à la courbe de h en 0. c) Déduis-en que pour tout $x > -1$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Quel résultat du chapitre sur les suites retrouves-tu ?

Corrigés

1. a) $u(x) = 2x - 5$, $u' = 2$: $f'(x) = 7 \times 2 \times (2x - 5)^6 = 14(2x - 5)^6$.

b) $u(x) = 3x^2 + 1$, $u'(x) = 6x$: $g'(x) = 6x \exp(3x^2 + 1)$. c) $u(x) = 4 - x > 0$ sur $]-\infty; 4[$, $u' = -1$: $h'(x) = -1/(2\sqrt{4 - x})$. d) $k = u^{-2}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $k'(x) = -2 \times 2x \times (x^2 + 1)^{-3} = -4x/(x^2 + 1)^3$.

2. $f'(x) = 4x^3 - 12x$ et $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$. f' est positive sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$, négative sur $]-1; 1[$. **f est convexe sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, concave sur $]-1; 1[$.** f' s'annule en changeant de signe en -1 et 1 ; $f(-1) = f(1) = 1 - 6 + 1 = -4$. **Points d'inflexion $(-1; -4)$ et $(1; -4)$.**

3. f est dérivable et f' est décroissante sur $]-\infty; 2]$: **f est concave sur $]-\infty; 2]$.** f' est croissante sur $[2; +\infty[$: **f est convexe sur $[2; +\infty[$.** La convexité change en 2 : **le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion** (et f' y atteint son minimum).

4. a) $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = 1$: la tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$. L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde $\exp$ est positive), donc sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes : **$\exp(x) \geq x + 1$ pour tout réel x .**

b) $\sqrt{4} = 2$ et $(\sqrt{\cdot})'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$. Tangente : $y = (1/4)(x - 4) + 2$, soit $y = x/4 + 1$. La racine carrée étant concave sur $[0; +\infty[$, sa courbe est sous ses tangentes : **$\sqrt{x} \leq x/4 + 1$ pour tout $x \geq 0$** (égalité en $x = 4$; vérification en $x = 16$: $4 \leq 5$).

5. $f'(x) = \exp(x) + x \exp(x) = (x + 1) \exp(x)$; $f''(x) = \exp(x) + (x + 1) \exp(x) = (x + 2) \exp(x)$. f' a le signe de $x + 2$: négative pour $x < -2$, positive pour $x > -2$. f est concave sur $]-\infty; -2]$, convexe sur $[-2; +\infty[$. $f(-2) = -2e^{-2} \approx -0,271$. **Point d'inflexion $(-2; -2e^{-2})$.**

6. a) $f'(x) = -\exp(-x) + 1 = 1 - \exp(-x)$. $f'(x) \geq 0$ équivaut à $\exp(-x) \leq 1$, soit $-x \leq 0$, soit $x \geq 0$ (l'exponentielle est strictement croissante et $\exp(0) = 1$). **f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, avec un minimum $f(0) = 1$.**

b) $f''(x) = \exp(-x) > 0$ pour tout x : **f est convexe sur $\mathbb{R}$.** c) La tangente en 0 est horizontale ($f'(0) = 0$) d'équation $y = 1$. f étant convexe, sa courbe est au-dessus : $f(x) \geq 1$, soit $\exp(-x) + x \geq 1$, donc **$\exp(-x) \geq 1 - x$ pour tout x .** d) $f(1) = e^{-1} + 1$ et $f'(1) = 1 - e^{-1}$. $T : y = (1 - e^{-1})(x - 1) + 1 + e^{-1}$, soit **$y = (1 - e^{-1})x + 2e^{-1}$** (environ $y = 0,632x + 0,736$). f étant convexe sur $\mathbb{R}$, **la courbe est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.**

7. a) $g = 1/u$ avec $u(x) = 1 + \exp(-x)$, $u'(x) = -\exp(-x)$. $g'(x) = -u'(x)/u(x)^2 = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))^2$. Par ailleurs $1 - g(x) = (1 + \exp(-x) - 1)/(1 + \exp(-x)) = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))$, donc $g(x)(1 - g(x)) = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))^2 = g'(x)$. **Égalité vérifiée.**

b) $g' = g - g^2$. En dérivant : $g'' = g' - 2g g' = g'(1 - 2g)$. c) $1 - 2g(x) \geq 0$ équivaut à $g(x) \leq 1/2$, soit $1 + \exp(-x) \geq 2$, soit $\exp(-x) \geq 1$, soit $x \leq 0$. Comme $g'(x) > 0$, $g''(x)$ a le signe de $1 - 2g(x)$: **g est convexe sur $]-\infty ; 0]$ et concave sur $[0 ; +\infty[$** . g'' s'annule en 0 en changeant de signe, et $g(0) = 1/2$: **$I(0 ; 1/2)$ est un point d'inflexion**. d) $g'(0) = 1/(1 + 1)^2 = 1/4$. Tangente en I : $y = x/4 + 1/2$. C'est en I que la sigmoïde croît le plus vite.

8. a) La racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$: l'image de la moyenne est supérieure à la moyenne des images. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})/2 \leq \sqrt{(a + b)/2}$. Vérification : $(1 + 3)/2 = 2$ et $\sqrt{5} \approx 2,236$. On a bien $2 \leq 2,236$.

b) Posons $A = \exp(a/2)$ et $B = \exp(b/2)$. Alors $A^2 = \exp(a)$, $B^2 = \exp(b)$ et $AB = \exp((a + b)/2)$. $(A - B)^2/2 = (A^2 + B^2 - 2AB)/2 = (\exp(a) + \exp(b))/2 - \exp((a + b)/2)$. Un carré étant positif ou nul, **$\exp((a + b)/2) \leq (\exp(a) + \exp(b))/2$** , l'inégalité de corde de l'exponentielle convexe. c) Avec $a = 0$, $b = 2$: **$e \leq (1 + e^2)/2$** , ce qui équivaut à $e^2 - 2e + 1 \geq 0$, soit $(e - 1)^2 \geq 0$: vrai (numériquement $2,718 \leq 4,195$).

9. a) A est le produit de x et de $\sqrt{4 - x^2}$. Pour $0 \leq x < 2$, $4 - x^2 > 0$ et $(\sqrt{4 - x^2})' = -2x/(2\sqrt{4 - x^2}) = -x/\sqrt{4 - x^2}$. Donc $A'(x) = \sqrt{4 - x^2} + x \times (-x/\sqrt{4 - x^2}) = ((4 - x^2) - x^2)/\sqrt{4 - x^2} = (4 - 2x^2)/\sqrt{4 - x^2}$.

b) Le dénominateur est strictement positif ; $A'(x)$ a le signe de $4 - 2x^2 = 2(2 - x^2)$, positif pour $0 \leq x < \sqrt{2}$, négatif pour $\sqrt{2} < x < 2$. A est croissante puis décroissante : maximum en $x = \sqrt{2} \approx 1,41$ m, avec $A(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ m². Le rectangle optimal est un carré de côté $\sqrt{2}$ m.

10. a) $C'(t) = 10 \exp(-t/2) + 10t \times (-1/2) \exp(-t/2) = 10(1 - t/2) \exp(-t/2)$, du signe de $1 - t/2$: positive pour $t < 2$, négative pour $t > 2$. Pic à $t = 2$ h, avec $C(2) = 20 e^{-1} \approx 7,36$ mg·L⁻¹.

b) $C'(t) = 10 \exp(-t/2) - 5t \exp(-t/2)$. En dérivant chaque terme : $C''(t) = -5 \exp(-t/2) - 5 \exp(-t/2) + 2,5t \exp(-t/2) = (2,5t - 10) \exp(-t/2) = 2,5(t - 4) \exp(-t/2)$. c) $C''(t)$ a le signe de $t - 4$: **C est concave sur $[0 ; 4]$ et convexe sur $[4 ; +\infty[$** . C'' s'annule en 4 en changeant de signe : **point d'inflexion $(4 ; 40e^{-2})$** , soit environ $(4 ; 5,41)$. C' est décroissante sur $[0 ; 4]$ et croissante ensuite : C' atteint son minimum en $t = 4$. C'est l'instant où la concentration diminue le plus vite. d) $C'(4) = 10(1 - 2) e^{-2} = -10e^{-2} \approx -1,35$ mg·L⁻¹·h⁻¹ : à 4 h, la concentration baisse d'environ 1,35 mg·L⁻¹ par heure, vitesse de baisse maximale. Après, la baisse ralentit.

11. a) $f = \exp(u)$ avec $u(x) = -(x - m)^2/(2\sigma^2)$, $u'(x) = -2(x - m)/(2\sigma^2) = -(x - m)/\sigma^2$. Donc $f'(x) = -((x - m)/\sigma^2) f(x)$.

b) f' est le produit de $v(x) = -(x - m)/\sigma^2$ ($v' = -1/\sigma^2$) et de f . $f''(x) = -f(x)/\sigma^2 + (-(x - m)/\sigma^2)(-(x - m)/\sigma^2) f(x) = (-1/\sigma^2 + (x - m)^2/\sigma^4) f(x) = ((x - m)^2 - \sigma^2)/\sigma^4 \times f(x)$. c) $f(x) > 0$ et $\sigma^4 > 0$: $f''(x)$ a le signe de $(x - m)^2 - \sigma^2 = (x - m - \sigma)(x - m + \sigma)$. Il change de signe en $x = m - \sigma$ et $x = m + \sigma$. **Les points d'inflexion ont pour abscisses $m - \sigma$ et $m + \sigma$** . La courbe en cloche est symétrique par rapport à la droite $x = m$ (son sommet), et σ est la distance entre l'axe de symétrie et chaque point d'inflexion : plus σ est grand, plus la cloche est étalée.

12. a) **Faux**. $f(x) = x^4$: $f'(0) = 0$ mais $f'' = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe ; f est convexe et il n'y a pas d'inflexion en 0.

b) **Faux**. $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais décroissante sur $]-\infty ; 0]$. c) **Vrai**. La courbe est au-dessus de sa tangente en a, d'équation $y = f(a)$ puisque $f'(a) = 0$: $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I. d) **Vrai**. Si $f' \geq 0$ et $g'' \geq 0$, alors $(f + g)'' = f'' + g'' \geq 0$. e) **Faux**. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$ sont convexes (g affine), mais leur produit $-x^3$ a pour dérivée seconde $-6x$, positive pour $x < 0$ et négative pour $x > 0$: il n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

13. a) $h'(x) = n(1 + x)^{n-1}$ et $h''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}$. Sur $]-1 ; +\infty[$, $1 + x > 0$, donc $(1 + x)^{n-2} > 0$, et $n(n - 1) > 0$ pour $n \geq 2$. **$h'' > 0$: h est convexe sur $]-1 ; +\infty[$** .

b) $h(0) = 1$ et $h'(0) = n$: $y = 1 + nx$. c) h étant convexe, sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 : **$(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $x > -1$** . C'est l'inégalité de Bernoulli, démontrée par récurrence pour $x > 0$ dans le chapitre sur les suites, et obtenue ici par convexité sur un intervalle plus large (elle est vraie aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, avec égalité).

Fonction logarithme népérien

COURS • M13 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	8
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Définir $\ln a$, pour $a > 0$, comme l'unique solution de l'équation $e^x = a$, et utiliser les égalités $e^{\ln x} = x$ et $\ln(e^x) = x$.
- Utiliser la relation fonctionnelle $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et ses conséquences (inverse, quotient, puissance entière, racine carrée) pour simplifier une expression.
- Calculer la dérivée de $\ln$ et celle de $\ln(u)$ pour une fonction u strictement positive et dérivable.
- Dresser le tableau de variations de $\ln$, connaître ses limites en 0 et en $+\infty$ et l'allure de sa courbe.
- Utiliser les croissances comparées ($\ln x / x$ en $+\infty$, $x \ln x$ en 0) pour lever une forme indéterminée.
- Résoudre une équation ou une inéquation faisant intervenir $\ln$ ou $\exp$, en commençant par le domaine de validité.
- Déterminer le plus petit entier n tel que q^n dépasse ou passe sous un seuil donné.
- Utiliser le logarithme décimal $\log$ et ses propriétés.
- Exploiter le logarithme dans des modèles : pH d'une solution, niveau sonore en décibels, demi-vie d'une décroissance exponentielle.

Cours

1. Définition comme réciproque de l'exponentielle

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec une limite égale à 0 en $-\infty$ et à $+\infty$ en $+\infty$. Elle prend toutes les valeurs strictement positives, chacune une seule fois (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone).

Définition. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution réelle. On l'appelle **logarithme népérien de a** et on la note $\ln a$. La fonction $\ln$ est ainsi définie sur $]0; +\infty[$.

Autrement dit, pour $x > 0$ et y réel : $y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$.

Conséquences immédiates :

- $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$;
- $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x ;
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$).

Les fonctions exp et ln sont dites **réci-proques** l'une de l'autre. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** : le point $(a ; b)$ est sur la courbe de exp si et seulement si le point $(b ; a)$ est sur celle de ln.

Comme exp est strictement croissante, ln l'est aussi. On en déduit, pour $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.

Justification de la seconde : si $a < b$ avec $\ln a \geq \ln b$, alors, exp étant croissante, $e^{\ln a} \geq e^{\ln b}$, c'est-à-dire $a \geq b$, contradiction. La réciproque se traite de la même façon.

Signe du logarithme : en comparant x à 1 et en utilisant $\ln 1 = 0$,

- $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$;
- $\ln x = 0$ pour $x = 1$;
- $\ln x > 0$ pour $x > 1$.

Ces équivalences sont l'outil principal de résolution des équations et inéquations : on passe d'une égalité ou d'une inégalité entre logarithmes à une égalité ou une inégalité entre les nombres eux-mêmes, et inversement.

2. Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Propriété fondamentale. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration. D'après la propriété de l'exponentielle $e^{x+y} = e^x \times e^y$: $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b = e^{\ln(ab)}$. Deux réels qui ont la même exponentielle sont égaux (exp est strictement croissante), donc $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.

Le logarithme transforme les produits en sommes : c'est historiquement la raison de son invention, pour simplifier les calculs astronomiques.

Conséquences, pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier relatif :

- $\ln(1/a) = -\ln a$, car $\ln a + \ln(1/a) = \ln(a \times 1/a) = \ln 1 = 0$;
- $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, car $a/b = a \times (1/b)$;
- $\ln(a^n) = n \ln a$: pour n entier naturel, par récurrence ($\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a$), puis pour n négatif grâce à l'inverse ;
- $\ln(\sqrt{a}) = (1/2) \ln a$, car $(\sqrt{a})^2 = a$ donne $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a$.

Expression	Transformation
$\ln(ab)$	$\ln a + \ln b$
$\ln(1/a)$	$-\ln a$

Expression	Transformation
$\ln(a/b)$	$\ln a - \ln b$
$\ln(a^n)$	$n \ln a$
$\ln(\sqrt[n]{a})$	$(1/n) \ln a$
$e^{\ln a}$	a
$\ln(e^x)$	x

Exemple. $A = \ln 50 - 2 \ln 5$. On écrit $50 = 2 \times 5^2$, donc $\ln 50 = \ln 2 + 2 \ln 5$ et $A = \ln 2$.

Exemple. $B = \ln(e^2) + \ln(1/\sqrt{e}) = 2 - 1/2 = 3/2$.

Attention : il n'existe **aucune formule** pour $\ln(a + b)$. Par exemple $\ln(1 + 1) = \ln 2$, qui n'est pas égal à $\ln 1 + \ln 1 = 0$.

Ces règles exigent que a et b soient strictement positifs. L'expression $\ln(x^2)$ est définie pour tout x non nul, mais elle vaut $2 \ln|x|$ et non $2 \ln x$: si $x = -3$, $\ln(x^2) = \ln 9 = 2 \ln 3$, alors que $2 \ln(-3)$ n'existe pas.

3. Dérivée de $\ln$ et de $\ln(u)$

Propriété. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = 1/x$.

Justification (la dérivabilité étant admise). Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. On dérive les deux membres, le premier comme une composée $(e^u)' = u' e^u$: $\ln'(x) \times e^{\ln x} = 1$, soit $\ln'(x) \times x = 1$, donc $\ln'(x) = 1/x$.

Une autre lecture de ce résultat : le nombre dérivé de $\ln$ en 1 vaut 1, ce qui s'écrit, avec le taux d'accroissement,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h) - \ln(1)}{h} = 1$.

Cette limite est très utile : pour h proche de 0, $\ln(1 + h)$ est proche de h (approximation affine). Par exemple $\ln(1,02) \approx 0,0198$, très proche de 0,02.

Dérivée d'une composée. Si u est dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = u'/u$.

C'est un cas particulier de la dérivée de $x \mapsto g(u(x))$, égale à $u'(x) \times g'(u(x))$, avec $g = \ln$.

Exemples :

- $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 > 0$, et $f'(x) = 2x/(x^2 + 1)$;
- $g(x) = \ln(3x - 6)$ est définie sur $]2; +\infty[$, et $g'(x) = 3/(3x - 6) = 1/(x - 2)$;
- $h(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$: par la dérivée d'un produit, $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times (1/x) = \ln x + 1$.

Remarque : comme u' et u'/u ont le même signe lorsque $u > 0$, la fonction $\ln(u)$ a **les mêmes variations que u** sur I . C'est cohérent avec la croissance de $\ln$.

Tangente en 1 : $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$, donc la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.

Convexité : la dérivée seconde vaut $\ln''(x) = -1/x^2$, strictement négative. La fonction $\ln$ est donc **concave** sur $]0 ; +\infty[$ et sa courbe est située **sous chacune de ses tangentes**. En particulier :

$\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

4. Variations, limites et courbe

La dérivée $1/x$ est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$: **$\ln$ est strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

Limites aux bornes. $\lim$ quand x tend vers $+\infty$ de $\ln x = +\infty$; $\lim$ quand x tend vers 0 par valeurs positives de $\ln x = -\infty$.

Justification de la limite en $+\infty$. Soit M un réel quelconque. Dès que $x > e^M$, la croissance de $\ln$ donne $\ln x > \ln(e^M) = M$. Donc $\ln x$ dépasse tout réel M pour x assez grand.

Justification de la limite en 0. Pour $x > 0$, $\ln x = -\ln(1/x)$. Quand x tend vers 0 par valeurs positives, $1/x$ tend vers $+\infty$, donc $\ln(1/x)$ tend vers $+\infty$ et $\ln x$ tend vers $-\infty$.

Conséquence graphique : l'axe des ordonnées (droite $x = 0$) est **asymptote verticale** à la courbe de $\ln$.

Tableau de variations :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x) = 1/x$	$\parallel$	+		+		+	
$\ln x$	$-\infty$	$\boxtimes$	0	$\boxtimes$	1	$\boxtimes$	$+\infty$

Valeurs utiles : $\ln 2 \approx 0,693$; $\ln 3 \approx 1,099$; $\ln 10 \approx 2,303$; $e \approx 2,718$.

L'allure de la courbe : elle traverse l'axe des abscisses en $x = 1$, monte très vite près de 0 (pente $1/x$ grande) puis de plus en plus lentement (pente $1/x$ proche de 0 pour x grand), sans jamais avoir de limite finie. Pour atteindre $\ln x = 10$, il faut déjà $x = e^{10} \approx 22\,026$.

Repères de la courbe de $\ln$

Passe par (1 ; 0) et (e ; 1)

Asymptote verticale $x = 0$

Tangente $y = x - 1$ en 1

Concave, sous ses tangentes

Symétrique de $\exp$ par rapport à $y = x$

Repères complémentaires, sans séquence causale

5. Croissances comparées

Lorsque x tend vers $+\infty$, x et $\ln x$ tendent tous deux vers $+\infty$: le quotient $\ln x / x$ est une forme indéterminée. Le résultat suivant la lève.

Croissances comparées.

$\lim$ quand x tend vers $+\infty$ de $\ln x / x = 0$;

$\lim$ quand x tend vers 0 par valeurs positives de $x \ln x = 0$.

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln x / x^n$ tend vers 0 en $+\infty$ et $x^n \ln x$ tend vers 0 en 0.

Démonstration de la première. On pose $X = \ln x$, soit $x = e^X$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$, et $\ln x / x = X / e^X$. Or on sait (croissance comparée de l'exponentielle) que e^X / X tend vers $+\infty$, donc X / e^X tend vers 0.

Démonstration de la seconde. On pose $t = 1/x$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs positives. Alors $x \ln x = (1/t) \times \ln(1/t) = -\ln t / t$, qui tend vers 0 d'après la première limite.

Pour la généralisation : $\ln x / x^n = (\ln x / x) \times (1/x^{n-1})$, produit d'un terme qui tend vers 0 et d'un terme borné pour $x \geq 1$.

On retient l'idée : **en $+\infty$, toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$; en 0, toute puissance de x l'emporte aussi sur $\ln x$.** Le logarithme croît, mais beaucoup plus lentement que n'importe quelle puissance.

Exemples :

- $\lim$ en $+\infty$ de $(x - \ln x)$: on factorise, $x - \ln x = x(1 - \ln x / x)$. Le facteur entre parenthèses tend vers 1, donc la limite est $+\infty$;
- $\lim$ en $+\infty$ de $\ln x / \sqrt{x}$: en posant $X = \sqrt{x}$, $\ln x = 2 \ln X$ et $\ln x / \sqrt{x} = 2 \ln X / X$, qui tend vers 0.

6. Équations, inéquations et seuils

La méthode générale tient en cinq étapes.

Résoudre une équation avec $\ln$

1. Déterminer le domaine de validité
2. Regrouper les logarithmes avec les propriétés
3. Se ramener à $\ln A = \ln B$ ou $A = e^k$
4. Résoudre l'équation algébrique
5. Garder les solutions du domaine

Exemples :

- $e^x = 5$ équivaut à $x = \ln 5$;
- $\ln(2x - 1) = 3$: domaine $2x - 1 > 0$, soit $x > 1/2$. L'équation équivaut à $2x - 1 = e^3$, donc $x = (e^3 + 1)/2$, qui vérifie bien $x > 1/2$;
- $\ln(x - 2) \leq 1$: domaine $x > 2$. Comme $1 = \ln e$, l'inéquation équivaut à $x - 2 \leq e$ ($\ln$ est croissante), soit $x \leq 2 + e$. Ensemble des solutions : $]2 ; 2 + e]$;
- $e^{3x} > 2$: $\ln$ étant croissante, $3x > \ln 2$, soit $x > (\ln 2)/3$.

Problème de seuil. On cherche le plus petit entier n tel que $0,8^n < 0,01$. Les deux membres sont strictement positifs, et $\ln$ est strictement croissante, donc l'inégalité équivaut à $\ln(0,8^n) < \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,8) < \ln(0,01)$. Comme $\ln(0,8) < 0$ (car $0,8 < 1$), la division par $\ln(0,8)$ **change le sens** : $n > \ln(0,01)/\ln(0,8) \approx 20,64$. Le plus petit entier convenable est **$n = 21$** . Vérification : $0,8^{20} \approx 0,0115$ et $0,8^{21} \approx 0,0092$.

Équations de degré 2 déguisées : pour $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$, on pose $X = \ln x$. L'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2, donc $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$, soit $x = e$ ou $x = e^2$.

7. Logarithme décimal

Définition. Le **logarithme décimal** est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par **$\log x = \ln x / \ln 10$** .

Comme $\ln 10 > 0$, $\log$ a les mêmes variations et les mêmes propriétés algébriques que $\ln$:

- $\log(ab) = \log a + \log b$; $\log(a/b) = \log a - \log b$; $\log(a^n) = n \log a$;
- **$\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, et $\log(10^n) = n$** pour tout entier n ;
- **$y = \log x$ équivaut à $x = 10^y$** (on note $10^y = e^{y \ln 10}$ pour un réel y quelconque).

Le logarithme décimal mesure l'**ordre de grandeur** d'un nombre : $\log(1\,000) = 3$, $\log(0,001) = -3$. Un nombre entier $N \geq 1$ qui s'écrit avec k chiffres vérifie $10^{k-1} \leq N < 10^k$, donc $k - 1 \leq \log N < k$: le nombre de chiffres de N est la partie entière de $\log N$, plus 1.

Une **échelle logarithmique** remplace une grandeur x par $\log x$: multiplier x par 10 revient à ajouter 1 à $\log x$. Elle sert à représenter des grandeurs qui s'étalent sur plusieurs ordres de grandeur (concentrations, intensités sonores, magnitudes).

8. Applications : pH, décibels, demi-vie

pH d'une solution aqueuse. Pour une solution diluée, on définit **$\text{pH} = -\log([H_3O^+]/c^\circ)$** , avec $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, ce qui revient à **$\text{pH} = -\log[H_3O^+]$** avec la concentration exprimée en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Réciproquement, **$[H_3O^+] = 10^{-\text{pH}} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$** .

Exemple. $[H_3O^+] = 2,5 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ donne $\text{pH} = -(\log 2,5 + \log 10^{-4}) = 4 - \log 2,5 \approx 4 - 0,398 \approx 3,60$.

Conséquence : diviser $[H_3O^+]$ par 10 augmente le pH d'une unité. Deux solutions dont les pH diffèrent de 2 ont des concentrations en ions oxonium dans un rapport $10^2 = 100$.

Niveau d'intensité sonore. Pour une intensité sonore I (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$), le niveau d'intensité sonore, en décibels (dB), est **$L = 10 \log(I/I_0)$** , avec $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (seuil d'audibilité).

Exemple. $I = 1,0 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ donne $L = 10 \log(10^7) = 70 \text{ dB}$.

Doubler l'intensité ajoute $10 \log 2 \approx 3,0 \text{ dB}$: deux sources identiques et indépendantes de 70 dB donnent environ 73 dB, et non 140 dB. Multiplier l'intensité par 10 ajoute 10 dB.

Demi-vie d'une décroissance exponentielle. Une grandeur qui décroît selon $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, avec $\lambda > 0$ (désintégrations radioactives, élimination d'un médicament, refroidissement de l'écart de température), est divisée par 2 au bout d'une durée constante appelée **demi-vie** $t_{1/2}$: $N(t_{1/2}) = N_0/2$ équivaut à $e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$, soit $-\lambda t_{1/2} = \ln(1/2) = -\ln 2$, donc

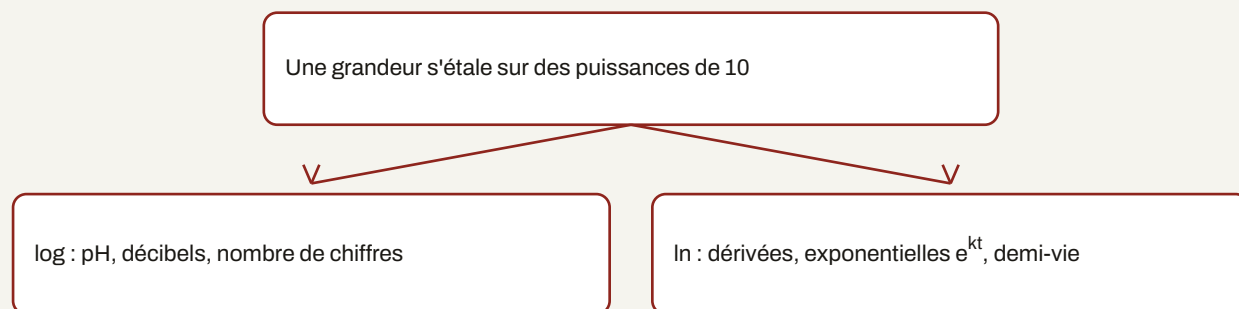
$$t_{1/2} = \ln 2 / \lambda.$$

Cette durée ne dépend pas de N_0 ni de l'instant de départ. Au bout de n demi-vies, il reste $N_0/2^n$.

Exemple (datation). Le carbone 14 a une demi-vie de 5 730 ans, donc $\lambda = \ln 2 / 5\,730 \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$. Un échantillon qui ne contient plus que 30 % de son carbone 14 initial vérifie $e^{-\lambda t} = 0,30$, soit $t =$

$$\ln(1/0,30)/\lambda = 5\,730 \times \ln(10/3)/\ln 2 \approx 9,95 \times 10^3 \text{ ans.}$$

Quel logarithme utiliser ?



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Exemples résolus

Exemple 1 : étude de la fonction $x \mapsto \ln x / x$

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x / x$. a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. b) Étudier les variations de f . c) Résoudre $f(x) = 0$ et donner le signe de f . d) En déduire la comparaison des nombres e^π et π^e .

Résolution. a) En 0 par valeurs positives : $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $1/x$ tend vers $+\infty$, donc le produit $\ln x \times (1/x)$ tend vers $-\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée. En $+\infty$: forme indéterminée levée par croissance comparée, $\lim f(x) = 0$. La courbe admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. b) f est un quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annule pas sur $]0 ; +\infty[$: $f'(x) = [(1/x) \times x - \ln x \times 1]/x^2 = (1 - \ln x)/x^2$. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - \ln x$. Or $1 - \ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 1$, soit $x < e$. Donc f est strictement croissante sur $]0 ; e]$ et strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$, avec un **maximum** $f(e) = 1/e \approx 0,368$. c) $f(x) = 0$ équivaut à $\ln x = 0$, soit $x = 1$. f est négative sur $]0 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$ (signe de $\ln x$, puisque $x > 0$). d) On a $e < \pi$, et f est strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$, donc $f(\pi) < f(e)$, c'est-à-dire $\ln \pi / \pi < \ln e / e = 1/e$. On multiplie par $e\pi > 0$: $e \ln \pi < \pi$, soit $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, $\pi^e < e^\pi$. (Numériquement, $\pi^e \approx 22,46$ et $e^\pi \approx 23,14$.)

Exemple 2 : équation et inéquation

Énoncé. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$. b) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $(\ln x)^2 - \ln x - 2 < 0$.

Résolution. a) Domaine : il faut $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $x > 2$. Sur $]2 ; +\infty[$, $\ln x + \ln(x - 2) = \ln(x(x - 2))$. L'équation équivaut à $\ln(x^2 - 2x) = \ln 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$. Le discriminant vaut $4 + 12 = 16$, les racines sont $(2 + 4)/2 = 3$ et $(2 - 4)/2 = -1$. Seule 3 appartient au domaine : $S = \{3\}$. Vérification : $\ln 3 + \ln 1 = \ln 3$. b) On pose $X = \ln x$. L'inéquation devient $X^2 - X - 2 < 0$. Les racines du trinôme sont 2 et -1 (somme 1, produit -2), et un trinôme de coefficient dominant positif est négatif strictement entre ses racines : $-1 < X < 2$. Donc $-1 < \ln x < 2$, et par croissance de $\exp$, $e^{-1} < x < e^2$. $S =]1/e ; e^2[$.

Exemple 3 : demi-vie d'un médicament

Énoncé. Après une injection intraveineuse, la concentration plasmatique d'un médicament est modélisée par $C(t) = C_0 e^{-kt}$, t en heures, C en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. On mesure $C_0 = 12 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et, trois heures plus tard, $C(3) = 7,5 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. a) Déterminer k . b) Calculer la demi-vie d'élimination. c) Au bout de combien de temps la concentration passe-t-elle sous $1,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$?

Résolution. a) $12 e^{-3k} = 7,5$ équivaut à $e^{-3k} = 7,5/12 = 0,625$, soit $-3k = \ln 0,625$, donc $k = -\ln(0,625)/3 = \ln(1,6)/3 \approx 0,470/3$, $k \approx 0,157 \text{ h}^{-1}$. b) $t_{1/2} = \ln 2 / k = 3 \ln 2 / \ln 1,6 \approx 0,6931 \times 3/0,4700 \approx 4,4 \text{ h}$. c) $C(t) < 1$ équivaut à $e^{-kt} < 1/12$, soit $-kt < -\ln 12$ ($\ln$ croissante), donc $t > \ln 12 / k \approx 2,485/0,1567 \approx 15,9$. La concentration passe sous $1,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ au bout d'environ **15,9 h**.

Méthodes et pièges

- Pour toute équation ou inéquation, commence par écrire le domaine de validité : chaque $\ln$ doit porter sur une quantité strictement positive. Élimine à la fin les solutions hors domaine.
- Pour passer de $\ln A < \ln B$ à $A < B$, invoque explicitement la stricte croissance de $\ln$; pour passer de $A < B$ à $\ln A < \ln B$, vérifie que A et B sont strictement positifs.
- Quand tu divises une inégalité par $\ln q$ avec $0 < q < 1$, $\ln q$ est négatif : le sens de l'inégalité change. C'est l'erreur la plus fréquente dans les problèmes de seuil.
- N'écris jamais $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$, ni $\ln(a)/\ln(b) = \ln(a/b)$, ni $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(ab)$.
- $(\ln u)'$ vaut u'/u , pas $1/u$: n'oublie pas le facteur u' .
- Devant une forme indéterminée avec $\ln$, cherche à faire apparaître $\ln x / x$ ou $x \ln x$, éventuellement par factorisation ou changement de variable.
- Ne confonds pas $\ln$ et $\log$: pH et décibels utilisent $\log$, la demi-vie s'écrit avec $\ln 2$ parce que le modèle est en $e^{-\lambda t}$.
- Pour un seuil, donne un entier et vérifie-le en calculant le terme juste avant et juste après.

Vers le PASS

En PASS, le logarithme est partout où une grandeur varie sur plusieurs ordres de grandeur ou décroît de façon exponentielle. En chimie, il sert au calcul du pH des acides et des bases, à la relation de Henderson-Hasselbalch des solutions tampons ($\text{pH} = \text{pK}_a + \log$ du rapport base sur acide) et à l'expression de l'enthalpie libre. En biophysique, l'équation de Nernst donne le potentiel d'équilibre d'un ion à partir du logarithme du rapport des concentrations de part et d'autre de la membrane. En pharmacocinétique, on trace $\ln C$ en fonction de t pour obtenir une droite dont la pente donne la constante d'élimination, puis la demi-vie et la clairance. En radioactivité, la loi de décroissance et la demi-vie servent en médecine nucléaire et en dosimétrie. Il faut savoir manipuler ces calculs sans calculatrice, avec $\ln 2 \approx 0,69$, $\ln 10 \approx 2,3$ et $\log 2 \approx 0,30$.

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Simplifier les nombres suivants : $A = \ln 8 + \ln 2 - \ln 4$; $B = \ln(e^3) - \ln(1/e)$; $C = e^{2 \ln 3}$; $D = \ln(\sqrt{e})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^x = 7$; b) $\ln x = -2$; c) $\ln(3x + 1) = 0$; d) $e^{2x-1} = 1$.
3. Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué : $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0 ; +\infty[$; $g(x) = \ln(x^2 + 3)$ sur $\mathbb{R}$; $h(x) = (\ln x)^2$ sur $]0 ; +\infty[$; $k(x) = \ln(1 - x)$ sur $] -\infty ; 1[$.
4. Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / \sqrt{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x + \ln x)$.
5. a) Calculer le pH d'une solution où $[H_3O^+] = 3,0 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. b) Calculer $[H_3O^+]$ dans une solution de pH 8,2.

Niveau 2 : type bac

6. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2 \ln x$.
 - a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b) Étudier les variations de f et en déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
 - c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse e .
7. Un stock de 500 unités diminue de 8 % chaque mois. On note u_n le stock au bout de n mois.
 - a) Exprimer u_n en fonction de n .
 - b) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 50$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
8. Le seuil d'audibilité vaut $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et $L = 10 \log(I/I_0)$.
 - a) Calculer le niveau sonore d'une source d'intensité $1,0 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
 - b) Quel est le niveau sonore produit par deux sources identiques de ce type fonctionnant ensemble ?
 - c) Quelle intensité correspond à un niveau de 85 dB ?
 - d) Combien de sources de 70 dB faut-il au minimum pour atteindre 85 dB ?
9. Résoudre :
 - a) $\ln(2x + 1) \geq \ln(x + 3)$; b) $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$; c) $\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln 6$.
10. L'iode 131, utilisé en médecine nucléaire, a une demi-vie de 8,02 jours. Le nombre de noyaux suit $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, t en jours.
 - a) Calculer λ .
 - b) Quel pourcentage des noyaux initiaux reste-t-il au bout de 30 jours ?
 - c) Au bout de combien de jours l'activité est-elle divisée par 100 ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.
 - a) Pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
 - b) Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.
 - c) La limite en $+\infty$ de $(\ln x)^3/x$ vaut 0.
 - d) L'équation $\ln x = x/e$ admet exactement une solution sur $]0 ; +\infty[$.
12. Un médicament a une demi-vie d'élimination de 6 h. Après une injection, la concentration vaut $C(t) = C_0 e^{-kt}$, avec $C_0 = 8 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Il est efficace tant que $C(t) \geq 2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
 - a) Calculer k .
 - b) Pendant combien de temps le médicament est-il efficace ?
 - c) On double la dose, donc $C_0 = 16 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. De combien de temps la durée d'efficacité augmente-t-elle ? Commenter.
 - d) Montrer que $\ln C(t)$ est une fonction affine de t et préciser sa pente.
13. a) Combien de chiffres le nombre 2^{2026} comporte-t-il en écriture décimale ? On donne $\log 2 \approx 0,301030$.
 - b) Déterminer le plus petit entier n tel que $3^{n-1} > 2^n$.

Corrigés

1. $A : \ln 8 + \ln 2 - \ln 4 = \ln(8 \times 2 / 4) = \ln 4 = 2 \ln 2$, donc $A = 2 \ln 2$.

$B : \ln(e^3) = 3$ et $\ln(1/e) = -1$, donc $B = 3 - (-1)$, $B = 4$. $C : 2 \ln 3 = \ln(3^2) = \ln 9$, donc $C = e^{\ln 9}$, $C = 9$. $D : \sqrt{e} = e^{1/2}$, donc $D = 1/2$.

2. a) $e^x = 7$ équivaut à $x = \ln 7$.

b) $\ln x = -2$ (avec $x > 0$) équivaut à $x = e^{-2}$. c) Domaine : $3x + 1 > 0$, soit $x > -1/3$. $\ln(3x + 1) = 0 = \ln 1$ équivaut à $3x + 1 = 1$, $x = 0$, qui est bien dans le domaine. d) $e^{2x-1} = 1 = e^0$ équivaut à $2x - 1 = 0$, $x = 1/2$.

3. $f'(x) = (1 \times \ln x + x \times 1/x) - 1 = \ln x + 1 - 1$, $f'(x) = \ln x$.

$g = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 3 > 0$ et $u'(x) = 2x$: $g'(x) = 2x/(x^2 + 3)$. $h = u^2$ avec $u = \ln x$: $h' = 2u'u$, $h'(x) = 2 \ln x / x$. $k = \ln(u)$ avec $u(x) = 1 - x > 0$ et $u'(x) = -1$: $k'(x) = -1/(1 - x)$, $k'(x) = 1/(x - 1)$.

4. a) Forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $\ln x - x = x(\ln x / x - 1)$. Par croissance comparée, $\ln x / x$ tend vers 0, donc la parenthèse tend vers -1 et x tend vers $+\infty$: **la limite est $-\infty$** .

b) $x^2 \ln x = x \times (x \ln x)$. Or $x \ln x$ tend vers 0 en 0^+ et x aussi : **la limite est 0**. c) On pose $X = \sqrt{x}$, qui tend vers $+\infty$. Alors $\ln x = \ln(X^2) = 2 \ln X$ et $\ln x / \sqrt{x} = 2 \ln X / X$, qui tend vers 0 : **la limite est 0**. d) Forme « $+\infty - \infty$ ». On écrit $1/x + \ln x = (1 + x \ln x)/x$. Le numérateur tend vers $1 + 0 = 1$ et le dénominateur vers 0 par valeurs positives : **la limite est $+\infty$** .

5. a) $\text{pH} = -\log(3,0 \times 10^{-5}) = -(\log 3,0 + \log 10^{-5}) = 5 - \log 3,0 \approx 5 - 0,477$, $\text{pH} \approx 4,52$.

b) $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8,2} = 10^{0,8} \times 10^{-9} \approx 6,3 \times 10^{-9}$, $[\text{H}_3\text{O}^+] \approx 6,3 \times 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

6. a) En 0^+ : x^2 tend vers 0 et $-2 \ln x$ tend vers $+\infty$, donc **$\lim f = +\infty$** .

En $+\infty$: forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On factorise $f(x) = x^2(1 - 2 \ln x / x^2)$. Par croissance comparée, $\ln x / x^2$ tend vers 0, la parenthèse tend vers 1, donc **$\lim f = +\infty$** . b) $f'(x) = 2x - 2/x = 2(x^2 - 1)/x = 2(x - 1)(x + 1)/x$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x + 1 > 0$ et $x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$: négatif sur $]0 ; 1[$, positif sur $]1 ; +\infty[$. f est décroissante sur $]0 ; 1[$, croissante sur $]1 ; +\infty[$, de minimum $f(1) = 1 - 0 = 1$. Ainsi $f(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$: **f est strictement positive**. c) $f(e) = e^2 - 2$ et $f'(e) = 2e - 2/e$. Tangente : $y = (2e - 2/e)(x - e) + e^2 - 2$. En développant, $(2e - 2/e) \times e = 2e^2 - 2$, d'où $y = (2e - 2/e)x - 2e^2 + 2 + e^2 - 2$, soit $y = (2e - 2/e)x - e^2$.

7. a) Diminuer de 8 % revient à multiplier par 0,92. La suite est géométrique de premier terme 500 et de raison 0,92 : **$u_n = 500 \times 0,92^n$** .

b) $u_n < 50$ équivaut à $0,92^n < 0,1$, soit ($\ln$ croissante, deux membres positifs) $n \ln 0,92 < \ln 0,1$. Comme $\ln 0,92 < 0$, $n > \ln 0,1 / \ln 0,92 \approx (-2,3026)/(-0,0834) \approx 27,6$. **Le plus petit entier est $n = 28$** . Vérification : $u_{27} \approx 52,6$ et $u_{28} \approx 48,4$. c) Comme $0 < 0,92 < 1$, $0,92^n$ tend vers 0 : **la suite tend vers 0**.

8. a) $I/I_0 = 10^{-5}/10^{-12} = 10^7$, donc $L = 10 \times 7$, **$L = 70 \text{ dB}$** .

b) L'intensité double : $L = 10 \log(2 \times 10^7) = 10(\log 2 + 7) \approx 10 \times 7,301$, **$L \approx 73 \text{ dB}$** . c) $85 = 10 \log(I/I_0)$ équivaut à $I/I_0 = 10^{8,5}$, donc $I = 10^{-12} \times 10^{8,5} = 10^{-3,5}$, **$I \approx 3,2 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$** . d) N sources donnent N fois l'intensité, soit $L = 70 + 10 \log N$. On veut $70 + 10 \log N \geq 85$, soit $\log N \geq 1,5$, $N \geq 10^{1,5} \approx 31,6$. **Il faut au moins 32 sources**.

9. a) Domaine : $2x + 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > -1/2$. $\ln$ étant strictement croissante, l'inéquation équivaut à $2x + 1 \geq x + 3$, soit $x \geq 2$. Avec le domaine : **$S = [2 ; +\infty[$** .

b) On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 \leq 0$, soit $(X - 1)(X - 2) \leq 0$, donc $1 \leq X \leq 2$. Ainsi $1 \leq e^x \leq 2$, soit, par croissance de $\ln$, $0 \leq x \leq \ln 2$. **$S = [0 ; \ln 2]$** . c) Domaine : $x > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $x > 0$. L'inéquation s'écrit $\ln(x(x + 1)) \geq \ln 6$, soit $x^2 + x - 6 \geq 0$, c'est-à-dire $(x + 3)(x - 2) \geq 0$, vrai pour $x \leq -3$ ou $x \geq 2$. Avec $x > 0$: **$S = [2 ; +\infty[$** .

$[2; +\infty[$.

10. a) $\lambda = \ln 2 / t_{1/2} = 0,6931/8,02$, $\lambda \approx 8,64 \times 10^{-2} \text{ j}^{-1}$.

b) $N(30)/N_0 = e^{-30\lambda} = e^{-30 \ln 2 / 8,02} = 2^{-30/8,02} \approx 2^{-3,741} \approx e^{-2,593} \approx 0,075$. Il reste environ 7,5 % des noyaux.

c) L'activité est proportionnelle à N . $e^{-\lambda t} = 1/100$ équivaut à $t = \ln 100 / \lambda = 8,02 \times \ln 100 / \ln 2 \approx 8,02 \times 6,644$, $t \approx 53,3$ jours.

11. a) **Vrai**. Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. $g'(x) = 1 - 1/x = (x - 1)/x$, négatif sur $]0; 1[$ et positif sur $]1; +\infty[$. Le minimum est $g(1) = 0$, donc $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$. (C'est aussi la position de la courbe concave de $\ln$ sous sa tangente en 1.)

b) **Faux**. Contre-exemple : $a = b = 1$ donne $\ln 2 \approx 0,693$ à gauche et 0 à droite. c) **Vrai**. On pose $x = e^X$ avec X tendant vers $+\infty$: $(\ln x)^3/x = X^3/e^X$. Par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances, X^3/e^X tend vers 0. d) **Vrai**. La tangente à la courbe de $\ln$ en e a pour équation $y = (1/e)(x - e) + 1 = x/e$. La fonction $\ln$ étant concave, sa courbe est sous cette tangente : $\ln x \leq x/e$ pour tout $x > 0$. L'égalité a lieu en $x = e$ ($\ln e = 1 = e/e$). Pour montrer qu'elle n'a lieu qu'en e , on étudie $h(x) = x/e - \ln x$: $h'(x) = 1/e - 1/x$, négatif sur $]0; e[$, positif sur $]e; +\infty[$, donc h est strictement décroissante puis strictement croissante, de minimum $h(e) = 0$, et $h(x) > 0$ pour $x \neq e$. Une seule solution : $x = e$.

12. a) $k = \ln 2 / t_{1/2} = \ln 2 / 6$, $k \approx 0,116 \text{ h}^{-1}$.

b) $C(t) \geq 2$ équivaut à $e^{-kt} \geq 2/8 = 1/4$, soit $-kt \geq -\ln 4$, $t \leq \ln 4 / k = 2 \ln 2 \times 6 / \ln 2 = 12$. **Le médicament est efficace pendant 12 h** (deux demi-vies : $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). c) Avec $C_0 = 16$: $e^{-kt} \geq 2/16 = 1/8$, $t \leq \ln 8 / k = 3 \ln 2 \times 6 / \ln 2 = 18 \text{ h}$. **La durée augmente de 6 h seulement**, soit une demi-vie : doubler la dose ne double pas la durée d'action, elle ajoute une demi-vie. Pour prolonger l'effet, on répète plutôt les prises. d) $\ln C(t) = \ln C_0 + \ln(e^{-kt}) = \ln C_0 - kt$. C'est une **fonction affine de t, de pente $-k \approx -0,116 \text{ h}^{-1}$** et d'ordonnée à l'origine $\ln C_0$. En pratique, on trace $\ln C$ en fonction de t et la pente de la droite donne k .

13. a) $\log(2^{2026}) = 2026 \times \log 2 \approx 2026 \times 0,301030 \approx 609,89$. Donc $10^{609} \leq 2^{2026} < 10^{610}$, et le nombre de chiffres vaut $609 + 1$, **610 chiffres**.

b) Les deux membres sont positifs : $3^{n-1} > 2^n$ équivaut à $(n - 1) \ln 3 > n \ln 2$, soit $n(\ln 3 - \ln 2) > \ln 3$. Comme $\ln 3 - \ln 2 = \ln(3/2) > 0$, $n > \ln 3 / \ln(3/2) \approx 1,0986/0,4055 \approx 2,71$. **Le plus petit entier est $n = 3$** . Vérification : pour $n = 2$, $3^1 = 3 < 4 = 2^2$; pour $n = 3$, $3^2 = 9 > 8 = 2^3$.

Fonctions sinus et cosinus

COURS • M14 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Lire sur le cercle trigonométrique le cosinus et le sinus d'un réel, et utiliser les valeurs remarquables et les angles associés.
- Justifier la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus et en déduire leurs symétries graphiques.
- Calculer la dérivée de $\sin$, de $\cos$ et de fonctions composées comme $\sin(ax + b)$ ou $\cos(u)$.
- Établir et utiliser la limite de $\sin x / x$ en 0.
- Dresser le tableau de variations de $\sin$ et de $\cos$ sur une période et tracer leurs courbes.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle une équation du type $\cos x = a$ ou $\sin x = a$, puis $\cos(u) = \cos(v)$ ou $\sin(u) = \sin(v)$.
- Résoudre une inéquation trigonométrique simple sur un intervalle à l'aide du cercle.
- Identifier l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence et la phase à l'origine d'une fonction $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$.
- Modéliser un phénomène périodique (tension alternative, oscillateur, marée, signal physiologique) par une fonction sinusoïdale et exploiter ce modèle.

Cours

1. Rappels : cercle trigonométrique et valeurs remarquables

Dans un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. À tout réel x , on associe un unique point $M(x)$ du cercle, obtenu en « enroulant » la droite des réels sur le cercle à partir du point $I(1 ; 0)$. Le réel x est une mesure, en **radians**, de l'angle orienté (vecteur OI , vecteur OM). Un tour complet mesure 2π radians, donc π radians correspondent à 180° .

Définition. Le **cosinus** de x est l'abscisse de $M(x)$, le **sinus** de x est son ordonnée : $M(x)$ a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.

Conséquences immédiates, pour tout réel x :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (théorème de Pythagore, $OM = 1$) ;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout entier relatif k , car x et $x + 2k\pi$ repèrent le même point.

Valeurs remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Angles associés (lus par symétries du cercle) :

- symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$;
- symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- symétrie de centre O : $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- symétrie par rapport à la droite $y = x$: $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$;
- quart de tour : $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$, $\sin(x + \pi/2) = \cos x$.

Exemple. $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$. $\sin(7\pi/6) = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$.

Pour trouver le cosinus d'un réel « grand », on lui retranche un multiple de 2π : $17\pi/4 = 4\pi + \pi/4$, donc $\cos(17\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

2. Les fonctions sinus et cosinus : définition, parité, périodicité

Définition. La fonction **cosinus** est la fonction $x \mapsto \cos x$ et la fonction **sinus** est la fonction $x \mapsto \sin x$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.

Périodicité. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période T** ($T > 0$) si $f(x + T) = f(x)$ pour tout réel x . Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont **2π -périodiques**. Graphiquement, la courbe est invariante par la translation de vecteur $2\pi \times$ vecteur i : il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π puis de la reproduire.

Parité. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x (courbe symétrique par rapport à l'origine).

- **cos est paire** car $\cos(-x) = \cos x$;
- **sin est impaire** car $\sin(-x) = -\sin x$.

Conséquence pratique : grâce à la parité et à la périodicité, l'étude de $\cos$ et de $\sin$ peut se limiter à l'intervalle $[0 ; \pi]$, puis on complète par symétrie sur $[-\pi ; \pi]$ et par translation sur $\mathbb{R}$.

Période d'une fonction composée. Pour $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto \cos(\omega x)$ est périodique de période $2\pi/\omega$, car $\cos(\omega(x + 2\pi/\omega)) = \cos(\omega x + 2\pi) = \cos(\omega x)$. Par exemple $\sin(3x)$ a pour période $2\pi/3$ et $\cos(x/2)$ a pour période 4π .

3. Dérivées et limite fondamentale

Propriété (admise). Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos x \text{ et } \cos'(x) = -\sin x.$$

En particulier elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

La propriété a une interprétation géométrique : quand x augmente légèrement, le point $M(x)$ se déplace sur le cercle perpendiculairement au rayon, avec une vitesse de norme 1 ; le vecteur vitesse a pour coordonnées $(-\sin x ; \cos x)$, qui sont les dérivées de $\cos$ et de $\sin$.

Limite fondamentale. Le nombre dérivé de $\sin$ en 0 vaut $\cos 0 = 1$. Par définition du nombre dérivé, le taux d'accroissement $(\sin h - \sin 0)/h = \sin h / h$ tend vers 1 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin h / h = 1.$$

De même, le nombre dérivé de $\cos$ en 0 vaut $-\sin 0 = 0$, donc $(\cos x - 1)/x$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Interprétation : pour x proche de 0 (en radians), $\sin x \approx x$. C'est l'approximation des petits angles utilisée en physique pour le pendule. Par exemple $\sin(0,1) \approx 0,0998$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(5x)/x$: on écrit $\sin(5x)/x = 5 \times \sin(5x)/(5x)$. En posant $X = 5x$, qui tend vers 0, $\sin X / X$ tend vers 1, donc la limite vaut 5.

Dérivées des composées. Si u est dérivable sur un intervalle I :

$$(\sin u)' = u' \cos u \text{ et } (\cos u)' = -u' \sin u.$$

En particulier, pour a et b réels : $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$ et $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$.

Exemples :

- $f(x) = \cos(3x - \pi/4)$: $f'(x) = -3 \sin(3x - \pi/4)$;
- $g(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$: $g'(x) = 2 \sin x \cos x$;
- $h(x) = x \cos x$: $h'(x) = \cos x - x \sin x$.

Dérivées secondes : $\sin'' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos$. Les fonctions sinus et cosinus vérifient donc $y'' = -y$, et plus généralement $x \mapsto \cos(\omega x)$ vérifie $y'' = -\omega^2 y$. C'est l'équation d'un **oscillateur harmonique**, que l'on rencontre en mécanique et en électricité.

4. Variations et courbes sur une période

Étude de $\cos$ sur $[0 ; \pi]$: $\cos'(x) = -\sin x$, et $\sin x \geq 0$ sur $[0 ; \pi]$ (le point $M(x)$ est dans le demi-plan supérieur), nul seulement en 0 et en π . Donc **cos est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$** , de 1 à -1. Par parité, $\cos$ est strictement croissante sur $[-\pi ; 0]$.



x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x) = -\sin x$	0	+	0	-	0
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

Étude de sin sur $[-\pi ; \pi]$: $\sin'(x) = \cos x$, positif sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$ et négatif sur $[-\pi ; -\pi/2]$ et sur $[\pi/2 ; \pi]$.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\sin'(x) = \cos x$	-1	-	0	+	0	-	-1
$\sin x$	0	↗	-1	↘	1	↗	0

Les courbes de sin et de cos sont des **sinusoïdes**. Comme $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, la courbe de cos est l'image de celle de sin par la translation de vecteur $-(\pi/2) \times$ vecteur i : c'est la même courbe, décalée d'un quart de période.

Repères des sinusoïdes

sin s'annule en $k\pi$, vaut 1 en $\pi/2 + 2k\pi$

cos s'annule en $\pi/2 + k\pi$, vaut 1 en $2k\pi$

Tangente à sin en 0 : $y = x$

Courbe de cos symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Courbe de sin symétrique par rapport à l'origine

Repères complémentaires, sans séquence causale

Remarque : la tangente à la courbe de sin en 0 a pour équation $y = x$ (car $\sin 0 = 0$ et $\sin'(0) = 1$). Pour $x \geq 0$, on montre que $\sin x \leq x$: la fonction $x \mapsto x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x \geq 0$, elle est donc croissante et vaut 0 en 0.

5. Équations trigonométriques

Le cercle trigonométrique montre que deux réels ont le même cosinus si et seulement si leurs points sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et le même sinus si et seulement si leurs points sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété. Pour tous réels x et a :

$\cos x = \cos a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, avec k entier relatif ;

$\sin x = \sin a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, avec k entier relatif.

Résoudre $\cos x = c$ ou $\sin x = c$

1. Vérifier que $-1 \leq c \leq 1$ (sinon aucune solution) • 2. Trouver un réel a avec $\cos a = c$ ou $\sin a = c$ • 3. Écrire les deux familles de solutions • 4. Sélectionner celles de l'intervalle demandé

Exemples :

- $\cos x = 1/2 = \cos(\pi/3)$: $x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/3 + 2k\pi$. Sur $]-\pi ; \pi]$, les solutions sont $-\pi/3$ et $\pi/3$;
- $\sin x = -1$: un seul point du cercle, $x = -\pi/2 + 2k\pi$;
- $\cos x = 2$: **aucune solution**, car un cosinus est compris entre -1 et 1 ;
- $\cos(2x) = 0 = \cos(\pi/2)$: $2x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $2x = -\pi/2 + 2k\pi$, ce qui se résume en $2x = \pi/2 + k\pi$, soit $x = \pi/4 + k\pi/2$. Attention : on divise aussi la période par 2.

Cas des valeurs non remarquables : pour $\cos x = 0,3$, la calculatrice (touche $\cos^{-1}$ en mode radian) fournit l'unique réel a de $[0 ; \pi]$ tel que $\cos a = 0,3$, soit $a \approx 1,266$; les solutions sont alors $x = \pm a + 2k\pi$.

Équations se ramenant au second degré : pour $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, on pose $X = \sin x$, avec $-1 \leq X \leq 1$. L'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ se factorise en $(2X + 1)(X - 1) = 0$, d'où $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1/2$.

Inéquations. On les résout sur un intervalle donné à l'aide du cercle : on place les points où l'égalité a lieu, puis on repère l'arc où l'inégalité est vraie.

Exemple. $\cos x \geq 1/2$ sur $]-\pi ; \pi]$: les points d'abscisse supérieure ou égale à $1/2$ forment l'arc compris entre $M(-\pi/3)$ et $M(\pi/3)$, qui contient I. Ensemble des solutions : $[-\pi/3 ; \pi/3]$.

Exemple. $\sin x > 0$ sur $]-\pi ; \pi]$: les points d'ordonnée strictement positive forment le demi-cercle supérieur ouvert, d'où $]0 ; \pi[$.

6. Les fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$

En physique, une grandeur sinusoïdale s'écrit

$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, avec $A > 0$ et $\omega > 0$, où :

- A est l'**amplitude** : $s(t)$ varie entre $-A$ et A ;
- ω est la **pulsation**, en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $T = 2\pi/\omega$ est la **période**, en secondes ;
- $f = 1/T = \omega/(2\pi)$ est la **fréquence**, en hertz (Hz) ;
- φ est la **phase à l'origine** (en radians) ; $\omega t + \varphi$ est la **phase** à l'instant t .

Justification de la période : $s(t + 2\pi/\omega) = A \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi) = s(t)$.

On peut aussi écrire $s(t) = A \cos(\omega(t + \varphi/\omega))$: la courbe de s est celle de $A \cos(\omega t)$ décalée dans le temps de φ/ω . Une phase à l'origine positive correspond à une **avance**.

Dérivées :

- $s'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$, d'amplitude $A\omega$;
- $s''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s(t)$.

Lorsque s est une position, s' est la vitesse et s'' l'accélération : l'accélération est proportionnelle à la position et de signe opposé. La vitesse est nulle aux extrémités ($s = \pm A$) et maximale en valeur absolue au passage par 0.

Détermination de φ . Connaissant A , ω , la valeur $s(0)$ et le sens de variation à l'instant 0, on trouve φ : $\cos \varphi = s(0)/A$ donne deux valeurs possibles (φ et $-\varphi$), et le signe de $s'(0) = -A\omega \sin \varphi$ permet de choisir.

Une grandeur qui oscille autour d'une valeur moyenne m s'écrit $s(t) = m + A \cos(\omega t + \varphi)$. Elle varie entre $m - A$ et $m + A$, donc $m = (\max + \min)/2$ et $A = (\max - \min)/2$.

Modéliser un phénomène périodique

1. Mesurer la période T , en déduire $\omega = 2\pi/T$ • 2. Mesurer le maximum et le minimum, en déduire m et A • 3. Utiliser la valeur initiale et le sens de variation pour φ • 4. Contrôler le modèle sur une autre mesure

7. Modélisation de phénomènes périodiques

Tension du secteur. En France, la tension du secteur a une fréquence de 50 Hz et une valeur efficace de 230 V, soit une amplitude de $230 \times \sqrt{2} \approx 325$ V. On la modélise par $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$, avec $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $T = 20 \text{ ms}$.

Oscillateur mécanique. Un solide accroché à un ressort de raideur k , de masse m , écarté de sa position d'équilibre puis lâché, oscille sans frottement selon $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. L'équation $x'' = -\omega_0^2 x$ traduit la deuxième loi de Newton.

Pendule simple. Pour de petites oscillations ($\sin \theta \approx \theta$), l'angle suit $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, soit une période $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ indépendante de l'amplitude.

Phénomènes naturels et biologiques. La hauteur de la marée, la température au cours d'une journée ou d'une année, la pression dans une artère au cours d'un cycle cardiaque ou le volume pulmonaire lors d'une respiration calme sont approximativement périodiques. Un modèle sinusoïdal en donne une description simple, dont on doit discuter les limites : la vraie courbe n'est pas exactement une sinusoïde, et la période peut varier.

Exemple. Une pression oscille entre 80 et 120 (en mmHg) avec une période de 0,8 s. On prend $m = 100$, $A = 20$, $\omega = 2\pi/0,8 = 2,5\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, et si le maximum a lieu à $t = 0$: $P(t) = 100 + 20 \cos(2,5\pi t)$. La fréquence vaut $1/0,8 = 1,25 \text{ Hz}$, soit 75 cycles par minute.

Exemples résolus

Exemple 1 : étude de $x \mapsto x - 2 \sin x$

Énoncé. Soit f définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = x - 2 \sin x$. a) Calculer $f'(x)$. b) Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0 ; 2\pi]$, puis étudier le signe de $f'(x)$. c) Dresser le tableau de variations de f avec les valeurs exactes des extremums.

Résolution. a) $f'(x) = 1 - 2 \cos x$. b) $f'(x) = 0$ équivaut à $\cos x = 1/2 = \cos(\pi/3)$, soit $x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/3 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi]$: $x = \pi/3$ ou $x = 5\pi/3$. $f'(x) > 0$ équivaut à $\cos x < 1/2$. Sur le cercle, les points d'abscisse strictement inférieure à $1/2$ correspondent à x dans $] \pi/3 ; 5\pi/3[$. Donc $f'(x) < 0$ sur $[0 ; \pi/3[$ et sur $] 5\pi/3 ; 2\pi]$, $f'(x) > 0$ sur $] \pi/3 ; 5\pi/3[$. c) Valeurs : $f(0) = 0$; $f(\pi/3) = \pi/3 - 2 \times (\sqrt{3}/2) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0,685$; $f(5\pi/3) = 5\pi/3 - 2 \times (-\sqrt{3}/2) = 5\pi/3 + \sqrt{3} \approx 6,968$; $f(2\pi) = 2\pi \approx 6,283$.

x	0		$\pi/3$		$5\pi/3$		2π
$f'(x)$	-1	-	0	+	0	-	-1
$f(x)$	0	$\boxtimes$	$\pi/3 - \sqrt{3}$	$\boxtimes$	$5\pi/3 + \sqrt{3}$	$\boxtimes$	2π

Exemple 2 : équations et inéquation

Énoncé. a) Résoudre $\sin(2x) = \sqrt{3}/2$ sur $[0 ; 2\pi[$. b) Résoudre $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$. c) Résoudre $\cos x > -1/2$ sur $]-\pi ; \pi]$.

Résolution. a) $\sqrt{3}/2 = \sin(\pi/3)$. L'équation équivaut à $2x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \pi/3 + 2k\pi = 2\pi/3 + 2k\pi$, soit $x = \pi/6 + k\pi$ ou $x = \pi/3 + k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$ ($k = 0$ ou $k = 1$) : $S = \{\pi/6 ; \pi/3 ; 7\pi/6 ; 4\pi/3\}$. On obtient quatre solutions, car $\sin(2x)$ parcourt deux périodes quand x parcourt $[0 ; 2\pi[$. b) On pose $X = \sin x$: $2X^2 - X - 1 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 8 = 9$, les racines sont $(1 + 3)/4 = 1$ et $(1 - 3)/4 = -1/2$. $\sin x = 1$ donne $x = \pi/2$. $\sin x = -1/2 = \sin(-\pi/6)$ donne $x = -\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = \pi + \pi/6 + 2k\pi$, soit, dans $[0 ; 2\pi[$, $x = 11\pi/6$ ou $x = 7\pi/6$. $S = \{\pi/2 ; 7\pi/6 ; 11\pi/6\}$. c) $\cos x = -1/2$ pour $x = 2\pi/3$ ou $x = -2\pi/3$ dans $]-\pi ; \pi]$. Les points d'abscisse strictement supérieure à $-1/2$ forment l'arc ouvert de $M(-2\pi/3)$ à $M(2\pi/3)$ passant par I. $S =]-2\pi/3 ; 2\pi/3[$.

Exemple 3 : modéliser une tension sinusoïdale

Énoncé. Un oscilloscope affiche une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, avec φ dans $]-\pi ; \pi]$. On relève : valeur maximale 12 V, période 20 ms, $u(0) = 6,0$ V et u décroissante à l'instant 0. a) Déterminer U_m , ω et la fréquence. b) Déterminer φ . c) Calculer le premier instant $t > 0$ où la tension s'annule.

Résolution. a) $U_m = 12$ V. $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0,020 = 100\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \approx 314 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, et $f = 1/T = 50$ Hz. b) $u(0) = 12 \cos \varphi = 6$, donc $\cos \varphi = 1/2$, d'où $\varphi = \pi/3$ ou $\varphi = -\pi/3$. La dérivée vaut $u'(t) = -12\omega \sin(\omega t + \varphi)$, donc $u'(0) = -12\omega \sin \varphi$. Comme u est décroissante en 0, $u'(0) < 0$, donc $\sin \varphi > 0$: $\varphi = \pi/3$. c) $u(t) = 0$ équivaut à $\cos(100\pi t + \pi/3) = 0$, soit $100\pi t + \pi/3 = \pi/2 + k\pi$. La plus petite valeur positive s'obtient pour $k = 0$: $100\pi t = \pi/6$, $t = 1/600$ s, soit $t \approx 1,7$ ms.

Méthodes et pièges

- Règle ta calculatrice en mode radian : $\cos(\pi/3)$ en mode degré ne donne pas 0,5.
- Pour résoudre $\cos x = c$ ou $\sin x = c$, écris toujours les deux familles de solutions, puis sélectionne celles de l'intervalle en testant les valeurs de k une par une.
- Dans $\cos(2x) = c$, la période des solutions devient π et non 2π : divise aussi le terme $2k\pi$.
- Avant de chercher des solutions, vérifie que c est entre -1 et 1 ; sinon, l'ensemble des solutions est vide.
- Pour une inéquation, dessine le cercle, place les points d'égalité, colorie l'arc solution et lis ses extrémités dans le sens direct, en respectant l'intervalle imposé.
- N'oublie pas le facteur intérieur : $(\cos(\omega t + \varphi))' = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$, pas $-\sin(\omega t + \varphi)$.
- Ne confonds pas pulsation ω ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), fréquence f (Hz) et période T (s) : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.
- Pour déterminer φ , $\cos \varphi$ seul ne suffit pas : utilise le sens de variation à l'instant 0 (signe de la dérivée).

Vers le PASS

En PASS, les fonctions sinusoïdales servent d'abord en physique : oscillations mécaniques et électriques, ondes sonores et ultrasonores (échographie), ondes électromagnétiques, courant alternatif. La notion de fréquence relie ces signaux à l'audition (gamme des fréquences audibles) et à l'imagerie. Le cosinus intervient aussi dans les projections de vecteurs (composantes d'une force, travail d'une force, moment d'une force en biomécanique) et dans le produit scalaire. Enfin, l'idée qu'un signal périodique se décompose en sinusoïdes de fréquences différentes est à la base du traitement des signaux biologiques (électrocardiogramme, électroencéphalogramme) et de l'IRM.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Donner la valeur exacte de : $\cos(2\pi/3)$; $\sin(7\pi/6)$; $\cos(-\pi/4)$; $\sin(11\pi/3)$; $\cos(5\pi/6)$.
- Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$; $g(x) = \cos(3x - \pi/4)$; $h(x) = x \sin x$; $k(x) = \sin^2 x$; $m(x) = \cos x / (2 + \sin x)$.
- a) Montrer que $f(x) = \cos(2x)$ est paire et π -périodique. b) Montrer que $g(x) = x^2 \cos x$ est paire. c) Donner la période de $x \mapsto \sin(3x)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\cos x = \sqrt{2}/2$; b) $\sin x = -1$; c) $\sin x = \sin(\pi/5)$; d) $\cos(2x) = 0$.
- Déterminer les limites : a) en 0 de $\sin(3x)/x$; b) en 0 de $\sin x / (2x)$; c) en $+\infty$ de $\sin x / x$; d) en $+\infty$ de $x + \cos x$.

Niveau 2 : type bac

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$.
a) Montrer que f est impaire et 2π -périodique. b) Montrer que $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. c) Étudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$ et donner son maximum exact. d) En déduire l'allure des variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.
- Résoudre :
a) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ sur $]-\pi ; \pi]$; b) $\cos(x - \pi/4) = 1/2$ sur $[0 ; 2\pi[$; c) $2\cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$; d) $\sin x \leq 1/2$ sur $[0 ; 2\pi[$.
- Un solide accroché à un ressort oscille horizontalement. Sa position, en mètres, est $x(t) = 0,050 \cos(10t + \pi/6)$, t en secondes.
a) Donner l'amplitude, la pulsation, la période et la fréquence du mouvement. b) Exprimer la vitesse $v(t) = x'(t)$ et donner sa valeur maximale. c) Vérifier que $x''(t) + 100 x(t) = 0$ pour tout t . d) Déterminer le premier instant $t > 0$ où le solide passe par la position d'équilibre $x = 0$.
- Dans un port, la hauteur d'eau (en mètres) est modélisée par $h(t) = 4 + 3 \cos(\pi t/6)$, t en heures, $t = 0$ correspondant à une pleine mer.
a) Donner les hauteurs maximale et minimale et la période du phénomène. b) Un bateau ne peut entrer que si $h(t) \geq 5,5$ m. Sur $[0 ; 12]$, déterminer les plages horaires d'entrée possibles. c) À quel instant de $[0 ; 12]$ la mer monte-t-elle le plus vite ? Avec quelle vitesse ?

10. La tension du secteur est modélisée par $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$, t en secondes, u en volts.

a) Donner l'amplitude, la période et la fréquence. b) Résoudre $u(t) = 162,5$ sur $[0 ; 0,020[$. c) Calculer la valeur maximale de $|u'(t)|$.

Niveau 3 : vers le PASS

11. Vrai ou faux ? Justifier.

a) La fonction $t \mapsto \sin t + \sin(2t)$ est périodique de période 2π . b) L'équation $\cos x = x$ admet exactement une solution réelle. c) Pour tout $x \geq 0$, $\sin x \leq x$. d) La limite en 0 de $(1 - \cos x)/x^2$ vaut $1/2$.

12. Un pendule simple de longueur $L = 1,00$ m oscille avec de petits angles, $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\theta_m = 0,10$ rad et φ dans $]-\pi ; \pi]$.

a) Calculer ω_0 et la période T_0 . b) À $t = 0$, $\theta(0) = 0,050$ rad et l'angle augmente. Déterminer φ . c) Calculer le premier instant $t > 0$ où $\theta(t) = \theta_m$. d) Calculer la valeur maximale de la vitesse angulaire $\theta'(t)$.

13. On modélise la pression dans une artère par $P(t) = 100 + 20 \cos(\omega t)$, t en secondes, P en mmHg, avec une période de $0,80$ s.

a) Calculer ω , ainsi que les valeurs extrêmes de P et le nombre de cycles par minute. b) Pendant quelle durée, au cours d'un cycle, a-t-on $P(t) \geq 110$? c) La fréquence passe à 90 cycles par minute. Donner la nouvelle pulsation. d) La proportion du cycle pendant laquelle $P(t) \geq 110$ dépend-elle de la fréquence ? Justifier.

Corrigés

1. $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3)$, $\cos(2\pi/3) = -1/2$.

$\sin(7\pi/6) = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin(\pi/6)$, $\sin(7\pi/6) = -1/2$. $\cos$ est paire : $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4)$, $\cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$. $11\pi/3 = 4\pi - \pi/3$, donc $\sin(11\pi/3) = \sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3)$, $\sin(11\pi/3) = -\sqrt{3}/2$. $\cos(5\pi/6) = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos(\pi/6)$, $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.

2. $f'(x) = 3 \cos x + 2 \sin x$.

$g'(x) = -3 \sin(3x - \pi/4)$, par la règle $(\cos u)' = -u' \sin u$ avec $u' = 3$: $g'(x) = -3 \sin(3x - \pi/4)$. $h = uv$ avec $u = x$ et $v = \sin x$: $h'(x) = \sin x + x \cos x$. $k = (\sin x)^2$: $k' = 2 \times \sin'(x) \times \sin x$, $k'(x) = 2 \sin x \cos x$. $m = u/v$ avec $u = \cos x$ et $v = 2 + \sin x > 0$ (car $\sin x \geq -1$) : $m' = (u'v - uv')/v^2 = [-\sin x(2 + \sin x) - \cos x \times \cos x]/(2 + \sin x)^2 = (-2 \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x)/(2 + \sin x)^2$. Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: $m'(x) = -(2 \sin x + 1)/(2 + \sin x)^2$.

3. a) f est définie sur $\mathbb{R}$, et $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$ par parité de $\cos$: f est paire. De plus $f(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$: f est π -périodique.

b) $g(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = g(x)$: g est paire. c) $\sin(3(x + 2\pi/3)) = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x)$: la période est $2\pi/3$.

4. a) $\sqrt{2}/2 = \cos(\pi/4)$: $x = \pi/4 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/4 + 2k\pi$, k entier relatif.

b) Seul le point $M(-\pi/2)$ a pour ordonnée -1 : $x = -\pi/2 + 2k\pi$. c) $x = \pi/5 + 2k\pi$ ou $x = \pi - \pi/5 + 2k\pi = 4\pi/5 + 2k\pi$. d) $\cos(2x) = \cos(\pi/2)$ équivaut à $2x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $2x = -\pi/2 + 2k\pi$. Ces deux familles se regroupent en $2x = \pi/2 + k\pi$, donc $x = \pi/4 + k\pi/2$.

5. a) $\sin(3x)/x = 3 \times \sin(3x)/(3x)$. Avec $X = 3x$ qui tend vers 0, $\sin X / X$ tend vers 1 : limite 3.

b) $\sin x / (2x) = (1/2) \times \sin x / x$: limite $1/2$. c) Pour $x > 0$, $-1/x \leq \sin x / x \leq 1/x$, et les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, limite 0. d) $x + \cos x \geq x - 1$, qui tend vers $+\infty$: par comparaison, limite $+\infty$.

6. a) $f(-x) = \sin(-x)(1 + \cos(-x)) = -\sin x (1 + \cos x) = -f(x)$: **f est impaire**. $f(x + 2\pi) = f(x)$ car sin et cos sont 2π -périodiques : **f est 2π -périodique**.

b) $f(x) = \sin x + \sin x \cos x$. $f'(x) = \cos x + (\cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$. Avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$. Or $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 2\cos^2 x + 2 \cos x - \cos x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1$. D'où $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. c) Sur $[0 ; \pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$ (nul seulement en π). $2 \cos x - 1 > 0$ équivaut à $\cos x > 1/2$, soit x dans $[0 ; \pi/3[$; il est négatif sur $]\pi/3 ; \pi]$. Donc f est croissante sur $[0 ; \pi/3]$ et décroissante sur $[\pi/3 ; \pi]$. $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0 \times 0 = 0$ et $f(\pi/3) = (\sqrt{3}/2)(1 + 1/2) = 3\sqrt{3}/4$. **Maximum : $3\sqrt{3}/4 \approx 1,30$, atteint en $\pi/3$** . d) f étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine : f est décroissante sur $[-\pi ; -\pi/3]$, de 0 à $-3\sqrt{3}/4$, puis croissante sur $[-\pi/3 ; \pi/3]$, de $-3\sqrt{3}/4$ à $3\sqrt{3}/4$, puis décroissante sur $[\pi/3 ; \pi]$, de $3\sqrt{3}/4$ à 0. **Minimum $-3\sqrt{3}/4$ en $-\pi/3$, maximum $3\sqrt{3}/4$ en $\pi/3$** .

7. a) $\sin x = -\sqrt{3}/2 = \sin(-\pi/3)$: $x = -\pi/3 + 2k\pi$ ou $x = \pi + \pi/3 + 2k\pi = 4\pi/3 + 2k\pi$. Dans $]-\pi ; \pi]$: $-\pi/3$ et $4\pi/3 - 2\pi = -2\pi/3$. **$S = \{-2\pi/3 ; -\pi/3\}$** .

b) $\cos(x - \pi/4) = \cos(\pi/3)$: $x - \pi/4 = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x - \pi/4 = -\pi/3 + 2k\pi$, soit $x = 7\pi/12 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/12 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$: $7\pi/12$ et $-\pi/12 + 2\pi = 23\pi/12$. **$S = \{7\pi/12 ; 23\pi/12\}$** . c) $X = \cos x$: $2X^2 + 3X + 1 = 0$, discriminant $9 - 8 = 1$, racines $(-3 + 1)/4 = -1/2$ et $(-3 - 1)/4 = -1$. $\cos x = -1/2$ donne $2\pi/3$ et $4\pi/3$; $\cos x = -1$ donne π . **$S = \{2\pi/3 ; \pi ; 4\pi/3\}$** . d) $\sin x = 1/2$ pour $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$ dans $[0 ; 2\pi]$. On a $\sin x > 1/2$ sur l'arc supérieur $]\pi/6 ; 5\pi/6[$. Donc $\sin x \leq 1/2$ sur le reste : **$S = [0 ; \pi/6] \cup [5\pi/6 ; 2\pi]$** .

8. a) Amplitude $X_m = 0,050 \text{ m} = 5,0 \text{ cm}$; pulsation $\omega = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$; période $T = 2\pi/10 \approx 0,63 \text{ s}$; fréquence $f = 1/T = 10/(2\pi) \approx 1,6 \text{ Hz}$.

b) $v(t) = -0,050 \times 10 \sin(10t + \pi/6) = -0,50 \sin(10t + \pi/6)$. Le sinus valant au plus 1 en valeur absolue, la **vitesse maximale vaut $0,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$** . c) $x''(t) = v'(t) = -0,50 \times 10 \cos(10t + \pi/6) = -5,0 \cos(10t + \pi/6) = -100 \times 0,050 \cos(10t + \pi/6) = -100 x(t)$. **Donc $x'' + 100x = 0$** . d) $x(t) = 0$ équivaut à $\cos(10t + \pi/6) = 0$, soit $10t + \pi/6 = \pi/2 + k\pi$. Le plus petit $t > 0$ est obtenu pour $k = 0$: $10t = \pi/3$, **$t = \pi/30 \approx 0,105 \text{ s}$** .

9. a) Le cosinus varie entre -1 et 1 : **$h_{\max} = 4 + 3 = 7 \text{ m}$, $h_{\min} = 4 - 3 = 1 \text{ m}$** . Période $T = 2\pi/(\pi/6) = 12 \text{ h}$.

b) $h(t) \geq 5,5$ équivaut à $\cos(\pi t/6) \geq 1/2$. Pour t dans $[0 ; 12]$, $X = \pi t/6$ parcourt $[0 ; 2\pi]$, et $\cos X \geq 1/2$ pour X dans $[0 ; \pi/3] \cup [5\pi/3 ; 2\pi]$, soit t dans $[0 ; 2] \cup [10 ; 12]$. **Entrée possible entre 0 h et 2 h, puis entre 10 h et 12 h** (4 h par cycle, centrées sur la pleine mer). c) $h'(t) = -3 \times (\pi/6) \sin(\pi t/6) = -(\pi/2) \sin(\pi t/6)$. La montée est la plus rapide quand $h'(t)$ est maximal, c'est-à-dire quand $\sin(\pi t/6) = -1$, soit $\pi t/6 = 3\pi/2$, **$t = 9 \text{ h}$** , à mi-chemin entre la basse mer (6 h) et la pleine mer suivante (12 h). **Vitesse : $\pi/2 \approx 1,6 \text{ m}\cdot\text{h}^{-1}$** .

10. a) Amplitude **325 V** ; $\omega = 100\pi$, donc **$T = 2\pi/(100\pi) = 0,020 \text{ s} = 20 \text{ ms}$** et **$f = 50 \text{ Hz}$** .

b) $325 \cos(100\pi t) = 162,5$ équivaut à $\cos(100\pi t) = 1/2$. Pour t dans $[0 ; 0,020[$, $X = 100\pi t$ parcourt $[0 ; 2\pi]$, et $\cos X = 1/2$ pour $X = \pi/3$ ou $X = 5\pi/3$. Donc $t = 1/300 \text{ s}$ ou $t = 5/300 = 1/60 \text{ s}$. **$S = \{1/300 ; 1/60\}$, soit environ 3,3 ms et 16,7 ms**. c) $u'(t) = -325 \times 100\pi \sin(100\pi t)$. Son maximum en valeur absolue vaut $32\,500\pi \approx 1,02 \times 10^5 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$, atteint quand la tension passe par 0.

11. a) **Vrai**. $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ et $\sin(2(t + 2\pi)) = \sin(2t + 4\pi) = \sin(2t)$, donc la somme est inchangée par $t \mapsto t + 2\pi$.

b) **Vrai.** Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$, une solution vérifie $-1 \leq x \leq 1$. Sur $[-1 ; 0]$, $\cos x > 0 \geq x$ (car $\cos x \geq \cos 1 > 0$ sur $[-1 ; 1]$), donc pas de solution. Sur $[0 ; 1]$, $g(x) = \cos x - x$ a pour dérivée $-\sin x - 1 \leq -1 < 0$ (car $\sin x \geq 0$ sur $[0 ; 1]$), g est strictement décroissante et continue, avec $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), **g s'annule exactement une fois** (vers $x \approx 0,739$). c) **Vrai.** $h(x) = x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x \geq 0$, donc h est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $h(x) \geq h(0) = 0$. d) **Vrai.** Pour x non nul proche de 0, $1 + \cos x \neq 0$ et $(1 - \cos x)/x^2 = (1 - \cos x)(1 + \cos x)/(x^2(1 + \cos x)) = \sin^2 x / (x^2(1 + \cos x)) = (\sin x / x)^2 \times 1/(1 + \cos x)$. Le premier facteur tend vers $1^2 = 1$, le second vers $1/2$: **la limite vaut $1/2$.**

12. a) $\omega_0 = \sqrt{9,81/1,00} \approx 3,13 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 2,01 \text{ s}$.

b) $\theta(0) = 0,10 \cos \varphi = 0,050$, donc $\cos \varphi = 1/2$ et $\varphi = \pm\pi/3$. $\theta'(0) = -\theta_m \omega_0 \sin \varphi > 0$ impose $\sin \varphi < 0$: $\varphi = -\pi/3$. c) $\theta(t) = \theta_m$ équivaut à $\cos(\omega_0 t - \pi/3) = 1$, soit $\omega_0 t - \pi/3 = 2k\pi$. Le premier instant positif correspond à $k = 0$: $t = \pi/(3\omega_0) = T_0/6 \approx 0,33 \text{ s}$. d) $\theta'(t) = -\theta_m \omega_0 \sin(\omega_0 t - \pi/3)$, de valeur maximale $\theta_m \omega_0 = 0,10 \times 3,13 \approx 0,31 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, atteinte au passage par la verticale.

13. a) $\omega = 2\pi/0,80 = 2,5\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \approx 7,85 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. P varie entre **80 et 120 mmHg**. Nombre de cycles par minute : $60/0,80 = 75$.

b) $P(t) \geq 110$ équivaut à $\cos(\omega t) \geq 1/2$. Sur un cycle, avec $X = \omega t$ dans $[-\pi ; \pi]$, la condition s'écrit X dans $[-\pi/3 ; \pi/3]$, intervalle de longueur $2\pi/3$. La durée correspondante vaut $(2\pi/3)/\omega = (2\pi/3)/(2,5\pi) = 4/15 \text{ s}$, **soit environ 0,27 s par cycle**. c) $T = 60/90 = 2/3 \text{ s}$, donc $\omega = 2\pi/(2/3) = 3\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \approx 9,4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. d) La durée vaut $(2\pi/3)/\omega$ et la période $2\pi/\omega$: leur rapport vaut $1/3$ quelle que soit ω . **Non : $P(t) \geq 110$ pendant un tiers de chaque cycle, quelle que soit la fréquence** (dans ce modèle, où seule ω change).

Primitives et équations différentielles

COURS • M15 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Définir une primitive d'une fonction sur un intervalle et justifier que deux primitives diffèrent d'une constante.
- Calculer une primitive des fonctions usuelles (puissances, inverse, exponentielle, sinus, cosinus) et de fonctions composées du type $u'u^n$, u'/u , $u'e^u$, $u' \cos u$.
- Déterminer la primitive qui prend une valeur donnée en un point.
- Résoudre l'équation $y' = f$ lorsque f admet une primitive connue.
- Résoudre les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$, avec a non nul, et trouver la solution vérifiant une condition initiale.
- Traduire une situation (décroissance radioactive, refroidissement, charge d'un condensateur, administration d'un médicament) par une équation différentielle, la résoudre et interpréter la solution (valeur d'équilibre, temps caractéristique, demi-vie).

Cours

1. Notion d'équation différentielle

Définition. Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y , définie sur un intervalle I , et une ou plusieurs de ses dérivées. Une **solution** sur I est une fonction dérivable sur I qui vérifie cette égalité pour tout réel de I .

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions. Contrairement à une équation numérique, l'inconnue est une **fonction**, et il y a en général une infinité de solutions.

Exemple. Pour l'équation $y' = 2y$, la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée vaut $2e^{2x}$. La fonction $x \mapsto 5e^{2x}$ l'est aussi, ainsi que la fonction nulle.

Exemple. Pour vérifier que $f(x) = x^2 + 1/x$ est solution de $x y' + y = 3x^2$ sur $]0; +\infty[$, on calcule $f'(x) = 2x - 1/x^2$, puis $x f'(x) + f(x) = 2x^2 - 1/x + x^2 + 1/x = 3x^2$. C'est vérifié.

On note souvent la variable t lorsqu'elle représente le temps, et on écrit alors $y'(t)$. En physique, les équations différentielles traduisent des **lois d'évolution** : la vitesse de variation d'une grandeur dépend de la valeur de cette grandeur.

2. Primitives d'une fonction

L'équation différentielle la plus simple est $y' = f$, où f est une fonction donnée : on cherche une fonction dont la dérivée est f .

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I .

Exemple. $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$. $G(x) = x^3 + 7$ en est une autre.

Propriété. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I , alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Démonstration. Les fonctions $F + C$ conviennent, car la dérivée d'une constante est nulle. Réciproquement, si G est une primitive de f sur I , alors $(G - F)' = f - f = 0$ sur I . Une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante (conséquence du lien entre signe de la dérivée et variations), donc $G - F = C$.

Propriété. Pour x_0 dans I et y_0 réel, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

En effet, parmi les fonctions $F + C$, la condition $F(x_0) + C = y_0$ fixe $C = y_0 - F(x_0)$.

Théorème (admis à ce stade). Toute fonction **continue** sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Ce théorème sera justifié dans le chapitre sur le calcul intégral. Attention : il assure l'existence d'une primitive, pas qu'on sache l'écrire avec les fonctions usuelles.

Les solutions de l'équation $y' = f$ sur I sont donc les primitives de f sur I .

3. Primitives des fonctions usuelles

On lit à l'envers le tableau des dérivées. Dans le tableau, C désigne une constante réelle.

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n (n entier, $n \geq 0$)	$x^{n+1}/(n+1)$	$\mathbb{R}$
$1/x^2$	$-1/x$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$



Fonction f	Une primitive F	Intervalle
$1/x^n$ (n entier, $n \geq 2$)	$-1/((n-1)x^{n-1})$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$1/x$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Linéarité. Si F et G sont des primitives de f et g sur I et k un réel, alors F + G est une primitive de f + g et kF une primitive de kf.

Exemple. Une primitive de $f(x) = 4x^3 - 6x + 2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$.

Attention : il n'y a **pas** de règle simple pour le produit ou le quotient. Une primitive de $x e^x$ n'est pas $(x^2/2) e^x$.

4. Primitives des fonctions composées

En lisant à l'envers la dérivée d'une composée, on obtient, pour une fonction u dérivable sur I :

Forme de f	Une primitive F	Condition
$u' u^n$ (n entier, $n \geq 1$)	$u^{n+1}/(n+1)$	
u'/u^2	$-1/u$	u ne s'annule pas sur I
$u'/\sqrt{u}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
u'/u	$\ln u$	$u > 0$ sur I
$u' e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	
$f(ax+b)$, $a \neq 0$	$(1/a) G(ax+b)$, où G est une primitive de f	

Méthode : reconnaître la forme, puis ajuster une constante multiplicative. On repère u, on calcule u', et si u' n'apparaît qu'à un facteur constant près, on multiplie et on divise par ce facteur.

Exemples :

- $f(x) = x/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$, donc $f = (1/2) u'/u$ et $F(x) = (1/2) \ln(x^2 + 1)$;
- $f(x) = (2x + 1) e^{x^2 + x}$ sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + x$, $f = u' e^u$, donc $F(x) = e^{x^2 + x}$;

- $f(x) = \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $\sin$ est $-\cos$, donc $F(x) = -(1/3) \cos(3x)$;
- $f(x) = (2x - 1)^4$. Avec $u = 2x - 1$, $u' = 2$, $f = (1/2) u' u^4$, donc $F(x) = (2x - 1)^5/10$;
- $f(x) = e^{-0,5x}$. Avec $a = -0,5$: $F(x) = -2 e^{-0,5x}$.

Contrôle systématique : on dérive F et on doit retrouver f . C'est rapide et cela évite la plupart des erreurs de constante.

Calculer une primitive

1. Repérer une forme du tableau (somme, $u \cdot u^n$, u'/u , $u'e^{\dots}$) • 2. Identifier u et calculer u' • 3. Ajuster le facteur constant • 4. Écrire F • 5. Dériver F pour vérifier

5. L'équation $y' = ay$

Théorème. Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$, où C est une constante réelle.

Démonstration. Les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$ sont solutions : leur dérivée vaut $C a e^{ax} = a \times (C e^{ax})$.

Réciproquement, soit y une solution. On pose $g(x) = y(x) e^{-ax}$. Alors $g'(x) = y'(x) e^{-ax} - a y(x) e^{-ax} = (y'(x) - a y(x)) e^{-ax} = 0$. Donc g est constante sur $\mathbb{R}$, égale à un réel C , et $y(x) = C e^{ax}$.

Condition initiale. Pour x_0 et y_0 réels, il existe une **unique** solution de $y' = ay$ telle que $y(x_0) = y_0$: c'est $y(x) = y_0 e^{a(x - x_0)}$. En particulier, si $x_0 = 0$, $y(x) = y_0 e^{ax}$.

Interprétation : $y' = ay$ signifie que la vitesse de variation de y est **proportionnelle** à y . Si $a > 0$ et $y_0 > 0$, c'est une croissance exponentielle (population sans contrainte, intérêts composés en continu) ; si $a < 0$, c'est une décroissance exponentielle vers 0.

Les courbes des solutions ne se croisent jamais : deux solutions égales en un point sont égales partout (unicité).

6. L'équation $y' = ay + b$

Théorème. Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$x \mapsto C e^{ax} - b/a$, où C est une constante réelle.

Démonstration. La fonction constante $y_p = -b/a$ est une **solution particulière** : sa dérivée est nulle, et $a \times (-b/a) + b = 0$. Pour une fonction y dérivable, on pose $z = y - y_p$. Alors $y' = ay + b$ équivaut à $z' = a(z + y_p) + b = az + a y_p + b = az$, puisque $a y_p + b = 0$. Donc y est solution si et seulement si z est solution de $z' = az$, c'est-à-dire $z(x) = C e^{ax}$. D'où $y(x) = C e^{ax} - b/a$.

On retient la structure : **solution générale** = **solution générale de $y' = ay$** + **une solution particulière**.

La constante C est fixée par une condition initiale : avec $y(0) = y_0$, on obtient $C - b/a = y_0$, donc $C = y_0 + b/a$.

Comportement à l'infini lorsque $a < 0$: e^{ax} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc toute solution tend vers $-b/a$, quelle que soit la condition initiale. Cette valeur est la **valeur d'équilibre** (ou régime permanent) du système. Le nombre $\tau = -1/a$ (ou $1/|a|$) est le **temps caractéristique** : au bout de τ , l'écart

à l'équilibre est multiplié par $e^{-1} \approx 0,37$; au bout de 5τ , il ne reste que $e^{-5} \approx 0,7\%$ de l'écart initial.

Résoudre $y' = ay + b$ avec $y(0) = y_0$

1. Mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et lire a et b • 2. Écrire $y = C e^{ax} - b/a$ • 3. Utiliser $y(0) = y_0$ pour trouver C • 4. Vérifier en dérivant • 5. Interpréter la limite $-b/a$ si $a < 0$

Exemple. $y' + 3y = 6$ s'écrit $y' = -3y + 6$, avec $a = -3$ et $b = 6$. Les solutions sont $y(x) = C e^{-3x} + 2$. Avec $y(0) = 0$: $C = -2$, donc $y(x) = 2 - 2e^{-3x} = 2(1 - e^{-3x})$. La fonction croît de 0 vers l'équilibre 2.

7. Modèles

Décroissance radioactive. Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon diminue d'autant plus vite qu'il y a de noyaux : $N'(t) = -\lambda N(t)$, où $\lambda > 0$ est la **constante radioactive** (en s^{-1} ou an^{-1}). Avec $N(0) = N_0$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, demi-vie $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$. L'activité $A(t) = -N'(t) = \lambda N(t)$ suit la même loi.

Refroidissement (loi de Newton). Un corps de température $\theta(t)$, placé dans un milieu de température constante θ_a , se refroidit d'autant plus vite que l'écart est grand : $\theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_a)$, avec $k > 0$. C'est une équation $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $b = k\theta_a$, d'où $\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a) e^{-kt}$. La température tend vers celle du milieu : l'écart $\theta - \theta_a$ décroît exponentiellement.

Charge d'un condensateur. Dans un circuit série comprenant un générateur de tension constante E , un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C initialement déchargé, la loi des mailles et la relation $i = C \times u'$, où u désigne la tension aux bornes du condensateur, donnent $RC u'(t) + u(t) = E$, soit $u' = -(1/(RC)) u + E/(RC)$. Avec $u(0) = 0$: $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, où $\tau = RC$ est la constante de temps (en secondes si R est en ohms et C en farads). À $t = \tau$, $u \approx 0,63 E$; à $t = 5\tau$, $u \approx 0,993 E$: on considère le condensateur chargé.

Pharmacocinétique. On modélise souvent l'organisme par un seul compartiment de volume V (volume de distribution), d'où le médicament est éliminé avec une vitesse proportionnelle à sa concentration $C(t)$: constante d'élimination k .

- Après une **injection intraveineuse unique** (bolus) de dose D : $C' = -kC$, $C(0) = D/V$, d'où $C(t) = (D/V) e^{-kt}$.
- Pendant une **perfusion continue** à débit d'administration constant Q (en $mg \cdot h^{-1}$) : $C' = Q/V - kC$, $C(0) = 0$. C'est une équation $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $b = Q/V$. On obtient

$C(t) = (Q/(kV))(1 - e^{-kt})$. La concentration tend vers le **plateau** $C_s = Q/(kV)$. Le produit kV est la **clairance** du médicament (volume de plasma épuré par unité de temps), d'où $C_s = Q/\text{clairance}$. Le temps pour atteindre une fraction donnée du plateau ne dépend que de k , donc de la demi-vie : on atteint 50 % du plateau en une demi-vie, 75 % en deux, 87,5 % en trois.

Un seul modèle, quatre situations

Radioactivité : $N' = -\lambda N$

Refroidissement : $\theta' = -k(\theta - \theta_a)$

Condensateur : $RC u' + u = E$

Perfusion : $C' = Q/V - kC$

Repères complémentaires, sans séquence causale

Exemples résolus

Exemple 1 : calculs de primitives

Énoncé. Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué. a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$, puis la primitive F telle que $F(1) = 0$. b) $g(x) = x/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$. c) $h(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x}$ sur $\mathbb{R}$. d) $k(x) = 1/(2x - 1)^2$ sur $]1/2; +\infty[$.

Résolution. a) Par linéarité, $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C$. $F(1) = 1 - 2 + 5 + C = 4 + C = 0$ donne $C = -4$: $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$. Vérification : $F'(x) = 3x^2 - 4x + 5$. b) $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$, $g = (1/2) u'/u$: $G(x) = (1/2) \ln(x^2 + 1)$. c) $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$, $h = u' e^u$: $H(x) = e^{x^2 + x}$. d) $u(x) = 2x - 1$, qui ne s'annule pas sur $]1/2; +\infty[$, $u' = 2$, et $k = (1/2) u'/u^2$: $K(x) = -1/(2(2x - 1))$. Vérification : $K(x) = -(1/2)(2x - 1)^{-1}$, $K'(x) = (1/2) \times 2 \times (2x - 1)^{-2} = 1/(2x - 1)^2$.

Exemple 2 : équation $y' = ay + b$ avec condition initiale

Énoncé. On considère l'équation (E) : $y' + 2y = 6$. a) Déterminer une solution constante de (E). b)

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. c) Déterminer la solution f telle que $f(0) = 1$, puis sa limite en $+\infty$.

Résolution. a) (E) s'écrit $y' = -2y + 6$. Une constante c est solution si $0 = -2c + 6$, soit $c = 3$. b) Les solutions de $y' = -2y$ sont $x \mapsto C e^{-2x}$. Les solutions de (E) sont donc $y(x) = C e^{-2x} + 3$, C réel. c) $f(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2$: $f(x) = 3 - 2e^{-2x}$. Comme e^{-2x} tend vers 0 en $+\infty$, **f tend vers 3**. Vérification : $f'(x) = 4e^{-2x}$ et $f'(x) + 2f(x) = 4e^{-2x} + 6 - 4e^{-2x} = 6$.

Exemple 3 : refroidissement d'une boisson

Énoncé. Une boisson à 80 °C est posée dans une pièce à 20 °C. Sa température $\theta(t)$, t en minutes, vérifie $\theta' = -k(\theta - 20)$, $k > 0$. Au bout de 5 minutes, elle vaut 60 °C. a) Exprimer $\theta(t)$ en fonction de k . b) Déterminer k . c) Au bout de combien de temps la boisson atteint-elle 40 °C ?

Résolution. a) L'équation s'écrit $\theta' = -k\theta + 20k$, de solution constante 20. Donc $\theta(t) = C e^{-kt} + 20$, et $\theta(0) = 80$ donne $C = 60$: $\theta(t) = 20 + 60 e^{-kt}$. b) $\theta(5) = 60$: $60 e^{-5k} = 40$, soit $e^{-5k} = 2/3$, $-5k = \ln(2/3)$, **$k = \ln(1,5)/5 \approx 0,0811 \text{ min}^{-1}$** . c) $\theta(t) = 40$: $60 e^{-kt} = 20$, $e^{-kt} = 1/3$, $t = \ln 3 / k \approx 1,0986/0,0811$, **$t \approx 13,5 \text{ min}$** .

Méthodes et pièges

- Une primitive se vérifie toujours en la dérivant : fais-le à chaque fois.
- Précise l'intervalle : $\ln x$ n'est une primitive de $1/x$ que sur $]0 ; +\infty[$, et $\ln(u)$ n'est utilisable que si $u > 0$.
- N'oublie pas la constante C quand on te demande toutes les primitives ou toutes les solutions, puis détermine-la avec la condition donnée.
- Pour une composée $f(ax + b)$, divise par a : une primitive de e^{3x} est $e^{3x}/3$, pas $3e^{3x}$.
- Avant de résoudre, mets l'équation sous la forme exacte $y' = ay + b$: dans $y' + 2y = 6$, a vaut -2 et non 2.
- La solution particulière constante vaut $-b/a$: vérifie son signe en la remplaçant dans l'équation.
- Applique la condition initiale à la solution générale complète (avec le terme $-b/a$), pas seulement à e^{ax} .
- En modélisation, contrôle les unités (k en min^{-1} si t est en minutes) et la cohérence physique : une température ne doit pas passer sous celle du milieu au cours d'un refroidissement.

Vers le PASS

En PASS, les équations différentielles du premier ordre traduisent des bilans : ce qui entre moins ce qui sort donne la vitesse de variation d'une quantité. Elles décrivent la cinétique chimique d'ordre 1 (avec la même notion de demi-vie), la radioactivité et la décroissance de l'activité d'un traceur en médecine nucléaire, la pharmacocinétique (injection, perfusion, clairance, temps pour atteindre le plateau, accumulation lors de prises répétées), les échanges à travers une membrane et la charge des membranes cellulaires assimilées à des condensateurs. Savoir écrire l'équation, reconnaître la valeur d'équilibre et le temps caractéristique sans tout recalculer est un gain précieux en QCM.

Suite en PASS : Équations différentielles et bilans

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de : $f_1(x) = 4x^3 - 6x + 1$; $f_2(x) = e^{2x}$; $f_3(x) = \cos x - 3 \sin x$; $f_4(x) = (x + 1)^2$; $f_5(x) = 5e^{-x}$.
- Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué : $g_1(x) = 1/x^2 + 1/x$ sur $]0 ; +\infty[$; $g_2(x) = 2x/(x^2 + 4)$ sur $\mathbb{R}$; $g_3(x) = 1/(2x + 1)$ sur $] -1/2 ; +\infty[$; $g_4(x) = x e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$; $g_5(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.
- a) Vérifier que $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0 ; +\infty[$. b) En déduire la primitive de $\ln$ qui s'annule en 1.
- Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$: a) $y' = 3y$; b) $y' = -0,5y$ avec $y(0) = 4$; c) $y' = 2y - 6$; d) $y' + y = 1$ avec $y(0) = 0$.
- Déterminer la primitive F de $f(x) = 6x^2 - 2x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 3$.

Niveau 2 : type bac

6. Le cobalt 60 a une demi-vie de 5,27 ans. On note $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t (en années), avec $N'(t) = -\lambda N(t)$ et $N(0) = N_0$.
- a) Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 , λ et t . b) Calculer λ . c) Quel pourcentage des noyaux reste-t-il au bout de 10 ans ? d) Au bout de combien de temps le nombre de noyaux est-il divisé par 10 ?
7. On charge un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$ à travers une résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$, sous une tension $E = 12 \text{ V}$. La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur vérifie $RC u' + u = E$ et $u(0) = 0$.
- a) Calculer $\tau = RC$ et écrire l'équation sous la forme $u' = au + b$. b) Résoudre et exprimer $u(t)$. c) Au bout de combien de temps u atteint-elle 99 % de E ? d) L'intensité vaut $i(t) = C u'(t)$. Calculer $i(0)$.
8. Un médicament est administré par perfusion continue au débit $Q = 20 \text{ mg}\cdot\text{h}^{-1}$. Le volume de distribution vaut $V = 40 \text{ L}$ et la constante d'élimination $k = 0,25 \text{ h}^{-1}$. La concentration $C(t)$ (en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$) vérifie $C' = Q/V - kC$, avec $C(0) = 0$.
- a) Résoudre cette équation. b) Déterminer la concentration au plateau. c) Au bout de combien de temps atteint-on 90 % du plateau ? Exprimer ce temps en nombre de demi-vies. d) Quel débit faudrait-il pour obtenir un plateau de $3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$?
9. Soit $f(x) = (x - 1) e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- a) Montrer que $F(x) = (x - 2) e^x$ est une primitive de f . b) Déterminer la primitive G de f telle que $G(0) = 0$. c) Étudier les variations de G et donner son minimum.
10. Une cuve contient 100 L d'eau dans laquelle sont dissous 2 000 g de sel. On y verse de l'eau salée à $10 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ avec un débit de $5 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$, et le mélange, homogène, s'écoule au même débit. La masse $m(t)$ de sel (en g, t en minutes) vérifie $m' = 50 - 0,05 m$.
- a) Justifier cette équation par un bilan de matière. b) Résoudre l'équation avec $m(0) = 2 000$. c) Vers quelle masse tend $m(t)$? Interpréter. d) Au bout de combien de temps la masse vaut-elle 1 500 g ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Vrai ou faux ? Justifier.
- a) Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I . b) Si F et G sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$ telles que $F(0) = G(0)$, alors $F = G$. c) Toutes les solutions de $y' = 2y$ sont strictement positives. d) La solution de $y' = -3y + 6$ telle que $y(0) = y_0$ est croissante sur $\mathbb{R}$ dès que $y_0 < 2$.
12. Après une injection intraveineuse unique de 500 mg d'un médicament, la concentration plasmatique suit $C(t) = C_0 e^{-kt}$. On mesure $C(1) = 8,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et $C(4) = 4,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ (t en heures).
- a) Déterminer la demi-vie et k . b) Calculer C_0 . c) En déduire le volume de distribution $V = D/C_0$. d) Calculer la clairance kV .
13. On considère l'équation (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$.
- a) Vérifier que $g(x) = x e^{-2x}$ est une solution particulière de (E). b) Montrer qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -2y$. c) En déduire toutes les solutions de (E). d) Déterminer la solution telle que $y(0) = 1$ et sa limite en $+\infty$.

Corrigés

1. On vérifie chaque résultat en dérivant.

$F_1(x) = x^4 - 3x^2 + x \cdot e^{2x}$ est de la forme e^{ax} avec $a = 2$: $F_2(x) = (1/2) e^{2x}$. Une primitive de $\cos$ est $\sin$, une primitive de $-3 \sin$ est $3 \cos$: $F_3(x) = \sin x + 3 \cos x$. $u = x + 1$, $u' = 1$, $f_4 = u' u^2$: $F_4(x) = (x + 1)^3/3$. Une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$: $F_5(x) = -5e^{-x}$.

2. $G_1(x) = -1/x + \ln x$ (sur $]0 ; +\infty[$).

$u = x^2 + 4 > 0$, $u' = 2x$, $g_2 = u'/u$: $G_2(x) = \ln(x^2 + 4)$. $u = 2x + 1 > 0$ sur $] -1/2 ; +\infty[$, $u' = 2$, $g_3 = (1/2) u'/u$: $G_3(x) = (1/2) \ln(2x + 1)$. $u = x^2$, $u' = 2x$, $g_4 = (1/2) u' e^{\square}$: $G_4(x) = (1/2) e^{x^2}$. $G_5(x) = 2\sqrt{x}$, car $(2\sqrt{x})' = 2 \times 1/(2\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x}$.

3. a) $F'(x) = (1 \times \ln x + x \times 1/x) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. **F est bien une primitive de $\ln$ sur $]0 ; +\infty[$.**

b) Les primitives de $\ln$ sont $x \ln x - x + C$. En $1 : 1 \times 0 - 1 + C = 0$, donc $C = 1$: $G(x) = x \ln x - x + 1$.

4. a) $y(x) = C e^{3x}$, C réel.

b) $y(x) = C e^{-0,5x}$ et $y(0) = C = 4$: $y(x) = 4e^{-0,5x}$. c) $a = 2$, $b = -6$, solution constante $-b/a = 3$: $y(x) = C e^{2x} + 3$, C réel. d) $y' = -y + 1$: $a = -1$, $b = 1$, solution constante 1 , donc $y(x) = C e^{-x} + 1$. $y(0) = C + 1 = 0$ donne $C = -1$: $y(x) = 1 - e^{-x}$.

5. $F(x) = 2x^3 - x^2 + C$. $F(1) = 2 - 1 + C = 1 + C = 3$, donc $C = 2$: $F(x) = 2x^3 - x^2 + 2$.

6. a) Les solutions de $N' = -\lambda N$ sont $N(t) = K e^{-\lambda t}$, et $N(0) = K = N_0$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

b) $\lambda = \ln 2 / 5,27 \approx 0,132 \text{ an}^{-1}$. c) $N(10)/N_0 = e^{-10\lambda} = 2^{-10/5,27} \approx 2^{-1,898} \approx 0,268$. **Il reste environ 27 % des noyaux.** d) $e^{-\lambda t} = 1/10$ donne $t = \ln 10 / \lambda = 5,27 \times \ln 10 / \ln 2 \approx 5,27 \times 3,32$, $t \approx 17,5 \text{ ans}$.

7. a) $\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 1,0 \text{ s}$. En divisant par RC : $u' = -(1/\tau) u + E/\tau$, soit $u' = -u + 12$ (t en secondes, u en volts).

b) Solution constante : 12 . Donc $u(t) = K e^{-t} + 12$, et $u(0) = 0$ donne $K = -12$: $u(t) = 12(1 - e^{-t})$. c) $u(t) = 0,99 \times 12$ équivaut à $1 - e^{-t} = 0,99$, $e^{-t} = 0,01$, $t = \ln 100 \approx 4,6 \text{ s}$ (soit $4,6\tau$). d) $u'(t) = 12 e^{-t}$, donc $i(t) = C u'(t) = 100 \times 10^{-6} \times 12 e^{-t}$ et $i(0) = 1,2 \times 10^{-3} \text{ A}$, $i(0) = 1,2 \text{ mA}$. On retrouve $E/R = 12/10\,000 = 1,2 \text{ mA}$: au départ, le condensateur déchargé se comporte comme un fil.

8. a) $Q/V = 20/40 = 0,5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$, donc $C' = -0,25C + 0,5$. Solution constante : $0,5/0,25 = 2$. Donc $C(t) = K e^{-0,25t} + 2$, avec $C(0) = 0$, $K = -2$: $C(t) = 2(1 - e^{-0,25t})$.

b) $e^{-0,25t}$ tend vers 0 : **plateau $2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$** (c'est $Q/(kV) = 20/(0,25 \times 40)$). c) $C(t) = 0,9 \times 2$ équivaut à $e^{-0,25t} = 0,1$, $t = \ln 10 / 0,25 = 4 \ln 10$, $t \approx 9,2 \text{ h}$. La demi-vie vaut $\ln 2 / 0,25 \approx 2,77 \text{ h}$, donc $t = \ln 10 / \ln 2 \approx 3,3$ **demi-vies**. d) Le plateau vaut $Q/(kV)$, donc $Q = 3 \times kV = 3 \times 0,25 \times 40$, **$Q = 30 \text{ mg} \cdot \text{h}^{-1}$** . Le plateau est proportionnel au débit.

9. a) $F'(x) = 1 \times e^{\square} + (x - 2) e^{\square} = (x - 1) e^{\square} = f(x)$. **F est une primitive de f .**

b) $G(x) = (x - 2) e^{\square} + C$, $G(0) = -2 + C = 0$, donc $C = 2$: $G(x) = (x - 2) e^{\square} + 2$. c) $G' = f$, du signe de $x - 1$ (car $e^{\square} > 0$) : G est décroissante sur $] -\infty ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$. **Minimum : $G(1) = -e + 2 \approx -0,72$.**

10. a) Pendant une petite durée, il entre $5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1} \times 10 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 50 \text{ g} \cdot \text{min}^{-1}$ de sel. Il en sort $5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ à la concentration $m/100 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$, soit $0,05 \text{ m g} \cdot \text{min}^{-1}$. La vitesse de variation de m vaut entrée moins sortie : **$m' = 50 - 0,05 \text{ m}$.**

b) $a = -0,05$ et $b = 50$, solution constante $50/0,05 = 1\,000$. Donc $m(t) = K e^{-0,05t} + 1\,000$, et $m(0) = 2\,000$ donne $K = 1\,000$: $m(t) = 1\,000 + 1\,000 e^{-0,05t}$. c) $m(t)$ tend vers $1\,000$ g : la concentration tend vers $1\,000/100 = 10$ g·L⁻¹, celle de l'eau versée. d) $1\,000 e^{-0,05t} = 500$, $e^{-0,05t} = 0,5$, $t = \ln 2 / 0,05 = 20 \ln 2$, $t \approx 13,9$ min.

11. a) **Vrai**. Une fonction continue sur I a au moins une primitive F, et toutes les $F + C$, C réel, en sont aussi : il y en a une infinité.

b) **Vrai**. $G - F$ est constante sur $\mathbb{R}$ (deux primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante), et cette constante vaut $G(0) - F(0) = 0$. c) **Faux**. Les solutions sont $C e^{2x}$; avec $C = -1$, la solution $-e^{2x}$ est négative, et $C = 0$ donne la fonction nulle. d) **Vrai**. La solution vaut $y(x) = 2 + (y_0 - 2) e^{-3x}$, de dérivée $y'(x) = -3(y_0 - 2) e^{-3x}$. Si $y_0 < 2$, $y_0 - 2 < 0$, donc $y'(x) > 0$: la solution est strictement croissante (elle monte vers l'équilibre 2).

12. a) La concentration est divisée par 2 entre $t = 1$ et $t = 4$: la demi-vie vaut 3 h. Donc $k = \ln 2 / 3 \approx 0,231$ h⁻¹. (Par le calcul : $C(4)/C(1) = e^{-3k} = 1/2$.)

b) $C(1) = C_0 e^{-k}$ donne $C_0 = 8,0 e^k = 8,0 \times 2^{1/3} \approx 8,0 \times 1,260$, $C_0 \approx 10$ mg·L⁻¹ (10,1 mg·L⁻¹). c) $V = 500/10,08$, $V \approx 50$ L. d) Clairance = $kV \approx 0,231 \times 49,6$, clairance ≈ 11 L·h⁻¹.

13. a) $g'(x) = e^{-2x} - 2x e^{-2x}$. Donc $g'(x) + 2g(x) = e^{-2x} - 2x e^{-2x} + 2x e^{-2x} = e^{-2x}$. **g est solution de (E).**

b) Posons $z = y - g$. Alors $z' + 2z = (y' + 2y) - (g' + 2g) = (y' + 2y) - e^{-2x}$. Ainsi $y' + 2y = e^{-2x}$ équivaut à $z' + 2z = 0$, c'est-à-dire $z' = -2z$. **y est solution de (E) si et seulement si y - g est solution de y' = -2y.** c) Les solutions de $z' = -2z$ sont $z(x) = C e^{-2x}$. Donc $y(x) = C e^{-2x} + x e^{-2x} = (x + C) e^{-2x}$, C réel. d) $y(0) = C = 1$: $y(x) = (x + 1) e^{-2x}$. En $+\infty$, $y(x) = x e^{-2x} + e^{-2x}$. Le second terme tend vers 0 ; pour le premier, $x e^{-2x} = (1/2) \times (2x)/e^{2x}$ tend vers 0 par croissance comparée. **La limite vaut 0.**

Calcul intégral

COURS • M16 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Interpréter l'intégrale d'une fonction continue et positive comme une aire, exprimée en unités d'aire, et la calculer géométriquement dans les cas simples.
- Énoncer et utiliser le lien entre intégrale et primitive : si F est une primitive de f , $\int$ de a à b de $f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Justifier que la fonction $x \mapsto \int$ de a à x de $f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- Utiliser la linéarité, la relation de Chasles, la positivité et la croissance de l'intégrale pour calculer ou encadrer une intégrale.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle et l'interpréter.
- Calculer l'aire du domaine compris entre deux courbes, après avoir étudié leur position relative.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, en choisissant judicieusement les deux fonctions.
- Étudier une suite d'intégrales (relation de récurrence, encadrement, limite).
- Utiliser l'intégrale pour calculer une quantité cumulée (distance à partir d'une vitesse, aire sous la courbe d'une concentration).

Cours

1. Intégrale d'une fonction continue et positive

Dans un repère orthogonal $(O ; I, J)$, l'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ . Si l'unité vaut 2 cm sur chaque axe, $1 \text{ u.a.} = 4 \text{ cm}^2$.

Définition. Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a ; b]$. L'**intégrale de f de a à b** , notée $\int$ de a à b de $f(x) dx$, est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Vocabulaire : a et b sont les **bornes** de l'intégrale ; la variable x est **muette** : $\int$ de a à b de $f(x) dx = \int$ de a à b de $f(t) dt$. Le symbole $\int$ est un S allongé (somme) et dx rappelle une petite largeur : l'intégrale est la limite de sommes d'aires de rectangles fins $f(x) \times dx$.

Exemples géométriques :

- pour une constante $k \geq 0$, $\int$ de a à b de $k dx = k(b - a)$ (rectangle) ;
- $\int$ de 0 à 2 de $x dx = 2$ (triangle de base 2 et de hauteur 2, d'aire $2 \times 2 / 2$) ;
- $\int$ de -1 à 1 de $\sqrt{1 - x^2} dx = \pi/2$ (demi-disque de rayon 1) ;
- $\int$ de a à a de $f(x) dx = 0$.

Méthode des rectangles. Pour approcher l'intégrale d'une fonction monotone, on découpe $[a ; b]$ en n intervalles de même largeur $h = (b - a)/n$ et on additionne les aires des rectangles de hauteur $f(x_k)$. Pour une fonction croissante, les rectangles construits à gauche donnent une valeur par défaut et ceux construits à droite une valeur par excès ; l'écart entre les deux vaut $h \times |f(b) - f(a)|$ et tend vers 0 quand n augmente. Cette idée se programme facilement avec une boucle.

2. Fonction intégrale et théorème fondamental

Théorème fondamental. Si f est continue et positive sur $[a ; b]$, la fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int$ de a à x de $f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$, et $F' = f$. C'est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration dans le cas où f est de plus **croissante**. Soit x dans $[a ; b]$ et $h > 0$ tel que $x + h \leq b$. La différence $F(x + h) - F(x)$ est l'aire sous la courbe entre x et $x + h$. Comme f est croissante, cette bande est comprise entre le rectangle de hauteur $f(x)$ et celui de hauteur $f(x + h)$: $h f(x) \leq F(x + h) - F(x) \leq h f(x + h)$, d'où $f(x) \leq (F(x + h) - F(x))/h \leq f(x + h)$. Quand h tend vers 0, $f(x + h)$ tend vers $f(x)$ par continuité, et le théorème des gendarmes donne que le taux d'accroissement tend vers $f(x)$. On raisonne de même pour $h < 0$. Donc F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Ce théorème justifie l'existence de primitives admise au chapitre précédent : **toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.**

Du calcul d'aire au calcul de primitive

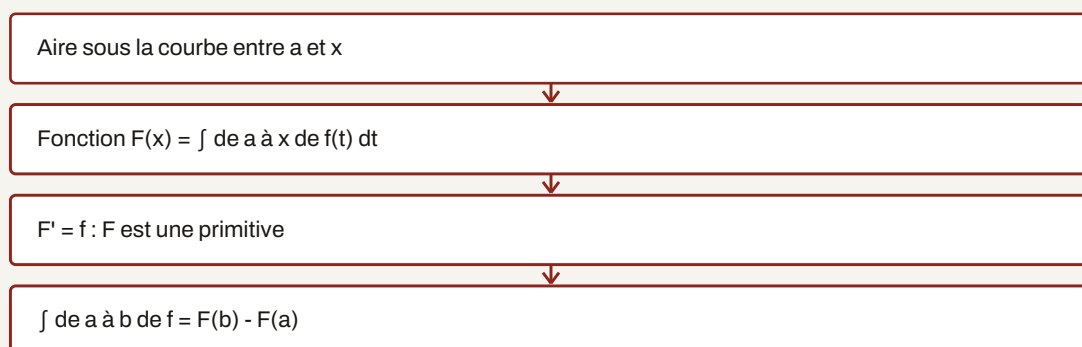


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

3. Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f continue et positive sur $[a ; b]$ et G une primitive quelconque de f . Les deux primitives G et F (la fonction intégrale) diffèrent d'une constante C , donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) - 0 = \int_a^b f$.

Propriété. Si f est continue sur un intervalle I contenant a et b , et si F est une primitive de f sur I , alors

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, que l'on note $[F(x)]$ de a à b .

Pour une fonction continue **de signe quelconque**, on prend cette égalité comme **définition** de l'intégrale. Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie, puisque la constante C disparaît dans la différence. Cette définition permet aussi $a > b$, et l'on a $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Exemples :

- $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$;
- $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$;
- $\int_1^e (1/x) dx = [\ln x]_1^e = 1 - 0 = 1$;
- $\int_0^1 e^{2x} dx = [e^{2x}/2]_0^1 = (e^2 - 1)/2$.

Interprétation du signe. Si f est négative sur $[a ; b]$ (avec $a < b$), son intégrale est l'**opposé de l'aire** du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses. Si f change de signe, l'intégrale est une **aire algébrique** : les parties au-dessus de l'axe comptent positivement, celles en dessous négativement. Par exemple $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$, alors que l'aire du domaine entre la courbe et l'axe vaut $2 + 2 = 4$ u.a.

4. Propriétés de l'intégrale

Soient f et g continues sur un intervalle I , a, b, c dans I et λ un réel.

Linéarité. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Justification : si F et G sont des primitives de f et g , $F + G$ et λF sont des primitives de $f + g$ et λf .

Relation de Chasles. $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Justification : $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$. Pour une fonction positive et $a < b < c$, c'est l'additivité des aires. Elle sert à découper un intervalle là où la fonction change d'expression ou de signe.

Positivité. Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

Croissance (comparaison). Si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Justification : $g - f \geq 0$, donc par positivité et linéarité $\int (g - f) = \int g - \int f \geq 0$.

Inégalité de la moyenne. Si $a \leq b$ et $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a ; b]$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$.

Attention à l'ordre des bornes : ces trois propriétés exigent $a \leq b$. Si $a > b$, les inégalités s'inversent.

Exemple d'encadrement. Pour x dans $[0 ; 1]$, $0 \leq x^2 \leq x$, donc $0 \leq x^2 e^{-x} \leq x e^{-x}$. On peut ainsi comparer deux intégrales sans les calculer.

Propriété	Écriture	Condition
Linéarité	$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$	f, g continues
Chasles	$\int \text{de } a \text{ à } c = \int \text{de } a \text{ à } b + \int \text{de } b \text{ à } c$	
Inversion des bornes	$\int \text{de } b \text{ à } a \text{ de } f = - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f$	
Positivité	$f \geq 0$ donne $\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f \geq 0$	$a \leq b$
Croissance	$f \leq g$ donne $\int f \leq \int g$	$a \leq b$
Moyenne	$m(b-a) \leq \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f \leq M(b-a)$	$a \leq b$

5. Valeur moyenne d'une fonction

Définition. Soit f continue sur $[a ; b]$, avec $a < b$. La **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ est le réel

$$\mu = (1/(b-a)) \times \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f(x) \, dx.$$

Interprétation : pour f positive, μ est la hauteur du rectangle de base $[a ; b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe. On « aplatit » la courbe en conservant l'aire. D'après l'inégalité de la moyenne, μ est compris entre le minimum et le maximum de f sur $[a ; b]$.

Exemples :

- valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0 ; 3]$: $(1/3) \times [x^3/3] \text{ de } 0 \text{ à } 3 = (1/3) \times 9 = 3$;
- valeur moyenne de $\sin$ sur $[0 ; \pi]$: $(1/\pi) \times 2 = 2/\pi \approx 0,64$;
- pour une fonction affine, la valeur moyenne sur $[a ; b]$ est égale à la valeur au milieu, $f((a+b)/2)$.

En sciences, la valeur moyenne d'une grandeur sur une durée est une moyenne temporelle : température moyenne d'une journée, concentration moyenne d'un médicament entre deux prises, puissance moyenne. Pour une vitesse $v(t)$, la distance parcourue entre t_1 et t_2 vaut $\int \text{de } t_1 \text{ à } t_2 \text{ de } v(t) \, dt$ (si $v \geq 0$), et la vitesse moyenne est la valeur moyenne de v .

6. Aire entre deux courbes

Propriété. Si f et g sont continues sur $[a ; b]$ ($a < b$) et $f \geq g$ sur $[a ; b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut

$$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } (f(x) - g(x)) \, dx \text{ unités d'aire.}$$

Justification : si f et g sont positives, c'est la différence des aires sous chaque courbe. Sinon, on ajoute une même constante k aux deux fonctions pour les rendre positives, ce qui translate le domaine sans changer son aire ni la différence $f - g$.

Calculer l'aire entre deux courbes

1. Résoudre $f(x) = g(x)$ pour trouver les points d'intersection • 2. Étudier le signe de $f - g$ sur chaque intervalle • 3. Intégrer (courbe du dessus) - (courbe du dessous) • 4. Additionner les morceaux, convertir les u.a. si demandé

Si les courbes se croisent dans $[a ; b]$, on découpe avec la relation de Chasles et on intègre, sur chaque morceau, la fonction du dessus moins celle du dessous : l'aire vaut $\int$ de a à b de $|f - g|$.

Exemple. Entre les courbes de $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0 ; 1]$, on a $x \geq x^2$, donc l'aire vaut $\int$ de 0 à 1 de $(x - x^2)$ $dx = [x^2/2 - x^3/3]$ de 0 à 1 = $1/2 - 1/3 = 1/6$ u.a.

7. Intégration par parties

Toutes les fonctions n'ont pas de primitive évidente : $x e^x$, $\ln x$ ou $x \sin x$ ne sont pas dans le tableau. L'intégration par parties ramène leur calcul à celui d'une intégrale plus simple.

Théorème. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$, de dérivées u' et v' continues. Alors

$$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)] \text{ de } a \text{ à } b - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } u'(x) v(x) dx.$$

Démonstration. La fonction uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions $u'v$ et uv' sont continues, donc intégrables, et uv est une primitive de $u'v + uv'$. Ainsi $\int$ de a à b de $(u'v + uv') = [uv]$ de a à b . Par linéarité, $\int$ de a à b de $uv' = [uv]$ de a à b - $\int$ de a à b de $u'v$.

Choix de u et v' : on dérive la fonction qui se **simplifie** en la dérivant et on primitive celle qu'on sait **primitiver**.

- Un polynôme multiplié par e^x , $\sin x$ ou $\cos x$: u = le polynôme (son degré baisse), $v' =$ l'autre facteur.
- Un polynôme multiplié par $\ln x$: $u = \ln x$ (sa dérivée $1/x$ est simple), $v' =$ le polynôme.

Exemple 1. $I = \int$ de 0 à 1 de $x e^x dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$: $I = [x e^x]$ de 0 à 1 - $\int$ de 0 à 1 de $e^x dx = e - [e^x]$ de 0 à 1 = $e - (e - 1) = 1$.

Exemple 2. $J = \int$ de 1 à e de $\ln x dx$. On écrit $\ln x = \ln x \times 1$, avec $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = 1/x$, $v(x) = x$: $J = [x \ln x]$ de 1 à e - $\int$ de 1 à e de $(1/x) \times x dx = (e \times 1 - 0) - (e - 1) = 1$. On en déduit au passage que $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$.

8. Quantités cumulées et suites d'intégrales

L'intégrale sert à **cumuler** une grandeur qui varie : si $r(t)$ est un débit (en $L \cdot s^{-1}$, en $mg \cdot h^{-1}$...), la quantité accumulée entre t_1 et t_2 vaut $\int$ de t_1 à t_2 de $r(t) dt$. Si $C(t)$ est la concentration d'un médicament dans le plasma, l'**aire sous la courbe** (souvent notée ASC, en $mg \cdot h \cdot L^{-1}$) $\int$ de 0 à T de $C(t) dt$ mesure l'exposition de l'organisme au médicament sur la durée T .

Une **suite d'intégrales** est définie par $I_n = \int$ de a à b de $f_n(x) dx$. On l'étudie typiquement :

- par une **intégration par parties** qui donne une relation entre I_{n+1} et I_n ;
- par la **croissance de l'intégrale** pour obtenir son sens de variation (si $f_{n+1} \leq f_n$, alors $I_{n+1} \leq I_n$) ;
- par un **encadrement** qui donne sa limite (théorème des gendarmes).

Outils pour une intégrale qu'on ne sait pas calculer directement

Reconnaître une forme composée

Intégration par parties

Relation de Chasles pour découper

Encadrement par comparaison

Méthode des rectangles pour approcher

Repères complémentaires, sans séquence causale

Exemples résolus

Exemple 1 : calculs d'intégrales

Énoncé. Calculer : $A = \int \text{de } 0 \text{ à } 2 \text{ de } (3x^2 - 2x + 1) dx$; $B = \int \text{de } 0 \text{ à } \ln 2 \text{ de } e^{2x} dx$; $C = \int \text{de } 0 \text{ à } 1 \text{ de } x/(x^2 + 1) dx$; $D = \int \text{de } 0 \text{ à } \pi/2 \text{ de } \cos x dx$.

Résolution. $A = [x^3 - x^2 + x] \text{ de } 0 \text{ à } 2 = (8 - 4 + 2) - 0$, $A = 6$. B : une primitive de e^{2x} est $e^{2x}/2$. $B = (e^{2 \ln 2} - e^0)/2 = (4 - 1)/2$, car $e^{2 \ln 2} = e^{\ln 4} = 4$. $B = 3/2$. C : avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $x/(x^2 + 1) = (1/2) u'/u$, de primitive $(1/2) \ln(x^2 + 1)$. $C = (1/2)(\ln 2 - \ln 1)$, $C = (\ln 2)/2 \approx 0,347$. $D = [\sin x] \text{ de } 0 \text{ à } \pi/2 = 1 - 0$, $D = 1$.

Exemple 2 : aire entre une parabole et une droite

Énoncé. Soient $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x + 2$. Le repère a pour unités 1 cm sur chaque axe. a) Déterminer les abscisses des points d'intersection des deux courbes. b) Étudier la position relative des courbes entre ces points. c) Calculer l'aire du domaine qu'elles délimitent, en cm^2 .

Résolution. a) $f(x) = g(x)$ équivaut à $-x^2 + 4 = x + 2$, soit $x^2 + x - 2 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 8 = 9$, les racines sont $(-1 + 3)/2 = 1$ et $(-1 - 3)/2 = -2$. **Les courbes se coupent en $x = -2$ et $x = 1$.** b) $f(x) - g(x) = -x^2 - x + 2 = -(x - 1)(x + 2)$. Ce trinôme, de coefficient dominant négatif, est positif entre ses racines : **sur $[-2 ; 1]$, la parabole est au-dessus de la droite.** c) Aire = $\int \text{de } -2 \text{ à } 1 \text{ de } (-x^2 - x + 2) dx = [-x^3/3 - x^2/2 + 2x] \text{ de } -2 \text{ à } 1$. En 1 : $-1/3 - 1/2 + 2 = 7/6$. En -2 : $8/3 - 2 - 4 = -10/3$. Aire = $7/6 - (-10/3) = 7/6 + 20/6 = 27/6 = 9/2$. Avec 1 u.a. = 1 cm^2 : **aire = 4,5 cm^2 .**

Exemple 3 : exposition à un médicament

Énoncé. Après une prise orale, la concentration plasmatique d'un médicament est modélisée par $C(t) = 20 t e^{-t}$, t en heures, C en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, pour t dans $[0 ; 6]$. a) Montrer que $G(t) = -(t + 1) e^{-t}$ est une primitive de $t \mapsto t e^{-t}$, puis retrouver ce résultat par intégration par parties. b) Calculer l'aire sous la courbe ASC = $\int \text{de } 0 \text{ à } 6 \text{ de } C(t) dt$. c) En déduire la concentration moyenne sur les six premières heures et la comparer au maximum de C .

Résolution. a) $G'(t) = -e^{-t} - (t + 1) \times (-e^{-t}) = -e^{-t} + (t + 1) e^{-t} = t e^{-t}$. Par parties, avec $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t}$, $u'(t) = 1$, $v(t) = -e^{-t}$: $\int \text{de } 0 \text{ à } x \text{ de } t e^{-t} dt = [-t e^{-t}] \text{ de } 0 \text{ à } x + \int \text{de } 0 \text{ à } x \text{ de } e^{-t} dt = -x e^{-x} + 1 - e^{-x} = 1 - (x + 1) e^{-x} =$

$G(x) - G(0)$. Les deux méthodes concordent. b) $ASC = 20 [G(t)]$ de 0 à 6 = $20(-7e^{-6} + 1) = 20(1 - 7e^{-6})$. Avec $e^{-6} \approx 0,002\,479$: $ASC \approx 19,7 \text{ mg}\cdot\text{h}\cdot\text{L}^{-1}$. c) Valeur moyenne : $\mu = ASC/6 \approx 3,3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Le maximum : $C'(t) = 20 e^{-t}(1 - t)$, positif avant 1 et négatif après, donc le maximum vaut $C(1) = 20/e \approx 7,4 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$, atteint à $t = 1 \text{ h}$. La moyenne vaut moins de la moitié du pic, car la concentration décroît ensuite pendant cinq heures.

Méthodes et pièges

- Pour calculer $\int$ de a à b de f , cherche une primitive F , vérifie-la en dérivant, puis calcule $F(b) - F(a)$ dans cet ordre, sans oublier les parenthèses autour de $F(a)$ quand elle est négative.
- Une intégrale n'est une aire que si la fonction est positive et $a \leq b$: pour une aire, étudie d'abord le signe et découpe avec la relation de Chasles.
- Pour une aire entre deux courbes, intègre toujours (courbe du dessus) - (courbe du dessous) : le résultat doit être positif. Un résultat négatif signale une erreur de position relative.
- Exprime le résultat d'une aire en unités d'aire, puis convertis en cm^2 si les unités graphiques sont données (1 u.a. = produit des unités des deux axes).
- Positivité, croissance et inégalité de la moyenne ne valent que si la borne inférieure est la plus petite.
- En intégration par parties, n'oublie pas le crochet $[uv]$ et le signe moins devant la seconde intégrale ; choisis u de façon que u' soit plus simple que u .
- La valeur moyenne se divise par la longueur $b - a$ de l'intervalle, pas par b .
- Ne confonds pas $\int$ de 0 à 2π de $\sin x \, dx = 0$ (aire algébrique) et l'aire géométrique, égale à 4 u.a.

Vers le PASS

En PASS, l'intégrale est l'outil de toutes les grandeurs cumulées. En pharmacocinétique, l'aire sous la courbe des concentrations sert à calculer la biodisponibilité d'une forme orale (rapport des aires sous la courbe orale et intraveineuse) et la clairance (dose divisée par l'aire sous la courbe totale). En physiologie, on intègre un débit pour obtenir un volume (volume courant de la respiration, débit cardiaque mesuré par dilution d'un indicateur). En physique, le travail d'une force variable, la charge électrique transportée par un courant ou l'énergie absorbée en dosimétrie s'écrivent comme des intégrales. En biostatistique enfin, une probabilité associée à une loi continue (comme la loi normale) est l'aire sous une courbe de densité.

Suite en PASS : Intégrales, aires et quantités cumulées

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Calculer : a) $\int$ de 1 à 3 de $(2x + 1) \, dx$; b) $\int$ de 0 à 1 de $e^x \, dx$; c) $\int$ de 1 à e de $(1/x) \, dx$; d) $\int$ de 0 à π de $\sin x \, dx$; e) $\int$ de -1 à 1 de $x^3 \, dx$.
2. a) Calculer géométriquement $\int$ de 0 à 4 de $(x/2 + 1) \, dx$, puis vérifier à l'aide d'une primitive.
b) Calculer géométriquement $\int$ de -2 à 2 de $\sqrt{4 - x^2} \, dx$.
3. Calculer à l'aide d'une primitive de fonction composée : a) $\int$ de 0 à 1 de $2x e^{x^2} \, dx$; b) $\int$ de 0 à 1 de $1/(x + 1) \, dx$; c) $\int$ de 0 à $\pi/4$ de $\cos(2x) \, dx$; d) $\int$ de 0 à 1 de $(2x + 1)^2 \, dx$.

4. On sait que $\int_0^2 f = 3$, $\int_2^5 f = -1$ et $\int_0^5 g = 4$. Calculer : a) $\int_0^5 f$; b) $\int_0^5 (2f - 3g)$; c) $\int_5^0 f$; d) $\int_2^0 f$.
5. Calculer la valeur moyenne : a) de $x \mapsto x^2$ sur $[0 ; 3]$; b) de $\sin$ sur $[0 ; \pi]$; c) de $x \mapsto 1/x$ sur $[1 ; e]$.

Niveau 2 : type bac

6. Soient $f(x) = e^x$ et $g(x) = x + 1$.

a) Montrer que $f(x) \geq g(x)$ pour tout réel x . b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = 0$ et $x = 1$. c) Le repère a pour unités 2 cm sur chaque axe. Donner cette aire en cm^2 .

7. Calculer par intégration par parties :

a) $\int_0^\pi x \sin x \, dx$; b) $\int_1^e x \ln x \, dx$; c) $\int_0^1 (2x + 1) e^x \, dx$.

8. Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$.

a) Donner $F(1)$ et $F'(x)$. b) Étudier les variations de F . c) Calculer $F(x)$ explicitement et vérifier que $F(e) = 1$.

9. Un véhicule démarre et sa vitesse vaut $v(t) = 20(1 - e^{-0,5t})$, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, t en secondes.

a) Calculer la distance parcourue pendant les 10 premières secondes. b) En déduire la vitesse moyenne sur cet intervalle.

10. On pose $I = \int_0^1 e^{-x^2} \, dx$, que l'on ne sait pas calculer à l'aide d'une primitive usuelle.

a) Justifier que, pour tout réel u , $e^u \geq 1 + u$. En déduire que $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ pour x dans $[0 ; 1]$. b) En déduire un encadrement de I . c) Avec quatre rectangles de largeur 0,25, encadrer I plus finement (la fonction est décroissante sur $[0 ; 1]$).

Niveau 3 : vers le PASS

11. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$.

a) Calculer I_0 . b) Montrer par intégration par parties que $I_{n+1} = e - (n + 1) I_n$. c) En déduire I_1 et I_2 . d) Montrer que $0 \leq I_n \leq e/(n + 1)$ et en déduire la limite de la suite (I_n) .

12. Après une injection intraveineuse de 400 mg, la concentration d'un médicament est $C(t) = 10 e^{-0,2t}$, t en heures, C en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Calculer $\text{ASC}(T) = \int_0^T C(t) \, dt$ pour $T > 0$. b) Déterminer la limite ASC_∞ de $\text{ASC}(T)$ quand T tend vers $+\infty$. c) La clairance vaut dose / ASC_∞ . La calculer et vérifier qu'elle est égale à kV , avec $k = 0,2 \, \text{h}^{-1}$ et $V = \text{dose} / C(0)$. d) Calculer la concentration moyenne sur les 10 premières heures.

13. Vrai ou faux ? Justifier.

a) Si f est continue sur $[a ; b]$ ($a < b$) et $\int_a^b f = 0$, alors f est la fonction nulle. b) $\int_0^1 x^2 \, dx < \int_0^1 x \, dx$. c) La valeur moyenne de $f(x) = 2x + 1$ sur $[0 ; 4]$ est égale à $f(2)$. d) Pour tout $x > 0$, $\int_1^x (1/t) \, dt = \ln x$. e) L'aire du domaine compris entre la courbe de $\sin$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2\pi$ vaut $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$.

Corrigés

1. a) $[x^2 + x]$ de 1 à 3 = $(9 + 3) - (1 + 1)$, **10**.
- b) $[e^x]$ de 0 à 1, $e - 1 \approx 1,72$. c) $[\ln x]$ de 1 à $e = 1 - 0$, **1**. d) $[-\cos x]$ de 0 à $\pi = -(-1) - (-1)$, **2**. e) $[x^4/4]$ de -1 à 1 = $1/4 - 1/4$, **0** (fonction impaire : les aires de part et d'autre de l'origine se compensent).
2. a) Sur $[0 ; 4]$, $f(x) = x/2 + 1$ est positive ; le domaine est un trapèze de bases $f(0) = 1$ et $f(4) = 3$ et de hauteur 4, d'aire $(1 + 3)/2 \times 4 = 8$. Vérification : $[x^2/4 + x]$ de 0 à 4 = $4 + 4 = 8$. **L'intégrale vaut 8**.
- b) $y = \sqrt{4 - x^2}$ avec $y \geq 0$ équivaut à $x^2 + y^2 = 4$ et $y \geq 0$: c'est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 2. L'intégrale est l'aire du demi-disque : $\pi \times 2^2/2$, **$2\pi \approx 6,28$** .
3. a) $u = x^2$, $u' = 2x$: $2x e^{x^2} = u' e^u$, de primitive e^{x^2} . $[e^{x^2}]$ de 0 à 1, **$e - 1$** .
- b) $[\ln(x + 1)]$ de 0 à 1 = $\ln 2 - \ln 1$, **$\ln 2 \approx 0,693$** . c) $[\sin(2x)/2]$ de 0 à $\pi/4 = (\sin(\pi/2) - \sin 0)/2$, **1/2**. d) $u = 2x + 1$, $u' = 2$: $(2x + 1)^2 = (1/2) u' u^2$, de primitive $(2x + 1)^3/6$. $[(2x + 1)^3/6]$ de 0 à 1 = $(27 - 1)/6 = 26/6$, **13/3**.
4. a) Chasles : $3 + (-1)$, **$\int$ de 0 à 5 de $f = 2$** .
- b) Linéarité : $2 \times 2 - 3 \times 4$, **-8**. c) Inversion des bornes : **-2**. d) **-3**.
5. a) $\mu = (1/3) \times [x^3/3]$ de 0 à 3 = $(1/3) \times 9$, **$\mu = 3$** .
- b) $\mu = (1/\pi) \times 2$, **$\mu = 2/\pi \approx 0,637$** . c) $\mu = (1/(e - 1)) \times [\ln x]$ de 1 à $e = 1/(e - 1)$, **$\mu \approx 0,582$** .
6. a) Soit $h(x) = e^x - x - 1$. $h'(x) = e^x - 1$, négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$. h a un minimum en 0, $h(0) = 0$, donc $h(x) \geq 0$: **$e^x \geq x + 1$ pour tout réel x** .
- b) Comme $f \geq g$, aire = $\int$ de 0 à 1 de $(e^x - x - 1) dx = [e^x - x^2/2 - x]$ de 0 à 1 = $(e - 1/2 - 1) - 1 = e - 5/2$. **Aire = $e - 2,5 \approx 0,218$ u.a.** c) 1 u.a. = $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, donc aire = $4(e - 2,5) \approx 0,87 \text{ cm}^2$.
7. a) $u = x$, $v' = \sin x$, $u' = 1$, $v = -\cos x$. $\int = [-x \cos x]$ de 0 à $\pi + \int$ de 0 à π de $\cos x dx = (-\pi \cos \pi - 0) + [\sin x]$ de 0 à $\pi = \pi + 0$, **π** .
- b) $u = \ln x$, $v' = x$, $u' = 1/x$, $v = x^2/2$. $\int = [(x^2/2) \ln x]$ de 1 à $e - \int$ de 1 à e de $x/2 dx = e^2/2 - [x^2/4]$ de 1 à $e = e^2/2 - (e^2 - 1)/4 = (2e^2 - e^2 + 1)/4$, **$(e^2 + 1)/4 \approx 2,10$** . c) $u = 2x + 1$, $v' = e^x$, $u' = 2$, $v = e^x$. $\int = [(2x + 1) e^x]$ de 0 à 1 - $\int$ de 0 à 1 de $2e^x dx = (3e - 1) - 2(e - 1) = 3e - 1 - 2e + 2$, **$e + 1 \approx 3,72$** .
8. a) **$F(1) = 0$** (bornes égales). $\ln$ est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc F est la primitive de $\ln$ qui s'annule en 1 : **$F'(x) = \ln x$** .
- b) $F'(x) = \ln x$ est négatif sur $]0 ; 1[$ et positif sur $]1 ; +\infty[$: **F est décroissante sur $]0 ; 1[$ et croissante sur $]1 ; +\infty[$** , de minimum $F(1) = 0$. Donc $F(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. c) Une primitive de $\ln$ est $x \ln x - x$ (vérifiée par dérivation). $F(x) = [t \ln t - t]$ de 1 à $x = x \ln x - x - (0 - 1)$, **$F(x) = x \ln x - x + 1$** . $F(e) = e - e + 1$, **$F(e) = 1$** .
9. a) Une primitive de v est $V(t) = 20(t + 2e^{-0,5t})$, car la dérivée de $2e^{-0,5t}$ est $-e^{-0,5t}$. Distance = $V(10) - V(0) = 20(10 + 2e^{-5}) - 20 \times 2 = 20(8 + 2e^{-5}) = 160 + 40e^{-5}$. Avec $e^{-5} \approx 0,00674$: **distance $\approx 160,3 \text{ m}$** .
- b) Vitesse moyenne = distance / 10, **environ $16,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$** .
10. a) La fonction $\varphi(u) = e^u - 1 - u$ a pour dérivée $e^u - 1$, négative pour $u < 0$ et positive pour $u > 0$: minimum $\varphi(0) = 0$, donc **$e^u \geq 1 + u$** . Avec $u = -x^2$, on obtient **$e^{-x^2} \geq 1 - x^2$** . De plus $-x^2 \leq 0$ donne **$e^{-x^2} \leq e^0 = 1$** . D'où **$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ sur $[0 ; 1]$** .

b) Par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$) : $\int_0^1 (1 - x^2) dx \leq I \leq \int_0^1 1 dx$. Or $\int_0^1 (1 - x^2) dx = 1 - 1/3 = 2/3$. $2/3 \leq I \leq 1$. c) Valeurs : $f(0) = 1$; $f(0,25) = e^{-0,0625} \approx 0,9394$; $f(0,5) = e^{-0,25} \approx 0,7788$; $f(0,75) = e^{-0,5625} \approx 0,5698$; $f(1) = e^{-1} \approx 0,3679$. La fonction étant décroissante, les rectangles à gauche donnent une valeur par excès et ceux à droite une valeur par défaut : par excès : $0,25 \times (1 + 0,9394 + 0,7788 + 0,5698) \approx 0,8220$; par défaut : $0,25 \times (0,9394 + 0,7788 + 0,5698 + 0,3679) \approx 0,6640$. $0,664 \leq I \leq 0,822$ (la valeur réelle est environ 0,747).

11. a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$, $I_0 = e - 1$.

b) $u(x) = x^{n+1}$, $v'(x) = e^{-x}$, $u'(x) = (n+1)x^n$, $v(x) = e^{-x}$. $I_{n+1} = [x^{n+1} e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^{-x} dx = (e - 0) - (n+1)I_n$. $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. c) $I_1 = e - I_0 = 1$; $I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \approx 0,718$. d) Pour x dans $[0 ; 1]$, $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n \times e$ (car $e^{-x} \leq e$). Par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$) : $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx = e/(n+1)$. Comme $e/(n+1)$ tend vers 0, le théorème des gendarmes donne $\lim I_n = 0$.

12. a) Une primitive de $10 e^{-0,2t}$ est $-50 e^{-0,2t}$. $ASC(T) = [-50 e^{-0,2t}]_0^T$ de 0 à T, $ASC(T) = 50(1 - e^{-0,2T})$ $mg \cdot h \cdot L^{-1}$.

b) $e^{-0,2T}$ tend vers 0, $ASC_{\infty} = 50 mg \cdot h \cdot L^{-1}$ (c'est $C(0)/k = 10/0,2$). c) Clairance = $400/50$, $8 L \cdot h^{-1}$. $V = 400/10 = 40 L$ et $kV = 0,2 \times 40 = 8 L \cdot h^{-1}$: les deux calculs concordent. d) $\mu = ASC(10)/10 = 50(1 - e^{-2})/10 = 5(1 - e^{-2}) \approx 5 \times 0,8647$, $\mu \approx 4,3 mg \cdot L^{-1}$.

13. a) **Faux**. Contre-exemple : $f(x) = x$ sur $[-1 ; 1]$ n'est pas nulle et $\int_{-1}^1 x dx = [x^2/2]_{-1}^1 = 0$. (La propriété devient vraie si f est continue et positive.)

b) **Vrai**. $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$ et $\int_0^1 x dx = 1/2$, et $1/3 < 1/2$. On le prévoit sans calcul car $x^2 \leq x$ sur $[0 ; 1]$. c) **Vrai**. $\mu = (1/4)[x^2 + x]_0^4 = (1/4) \times 20 = 5$, et $f(2) = 5$. d) **Vrai**. $\ln$ est une primitive de $1/t$ sur $]0 ; +\infty[$, intervalle qui contient 1 et x , donc l'intégrale vaut $\ln x - \ln 1 = \ln x$. e) **Faux**. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0$, car $\sin$ est négative sur $[\pi ; 2\pi]$. L'aire vaut $\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2 - (-2) = 4$ u.a.

Dénombrement et combinatoire

COURS • M17 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	8
Vers le PASS	9
Exercices	9
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Déterminer le cardinal d'une réunion d'ensembles finis disjoints (principe additif) et utiliser le complémentaire.
- Déterminer le cardinal d'un produit cartésien (principe multiplicatif) et représenter une situation de choix successifs par un arbre.
- Dénombrer les k-uplets (listes ordonnées avec répétition possible) d'un ensemble à n éléments.
- Dénombrer les arrangements (k-uplets d'éléments distincts) et les permutations d'un ensemble fini.
- Calculer une factorielle et simplifier un quotient de factorielles.
- Dénombrer les combinaisons (parties à k éléments) d'un ensemble à n éléments et calculer un coefficient « k parmi n ».
- Démontrer et utiliser les propriétés des combinaisons : symétrie, relation de Pascal, somme égale à 2^n .
- Construire le triangle de Pascal et l'utiliser pour développer une puissance de $(a + b)$ par la formule du binôme.
- Choisir le bon modèle (ordre ou non, répétition ou non) à partir d'un énoncé et l'appliquer au calcul d'une probabilité en situation d'équiprobabilité.

Cours

1. Ensembles finis, cardinal et principe additif

Un ensemble E est **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Ce nombre est le **cardinal** de E, noté $\text{card}(E)$. Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ a pour cardinal 0.

Exemple : $E = \{a, b, c, d\}$ a pour cardinal 4. L'ensemble des chiffres $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a pour cardinal 10.

Dénombrer, c'est compter les éléments d'un ensemble sans les écrire tous, en ramenant le comptage à des règles générales. Deux règles portent toute la suite du chapitre : le principe additif et le principe

multiplicatif.

Principe additif. Si A et B sont deux ensembles finis **disjoints** ($A \cap B = \emptyset$), alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Plus généralement, si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont deux à deux disjoints, le cardinal de leur réunion est la somme de leurs cardinaux. On dit que les A_i forment une **partition** de leur réunion quand ils sont non vides et deux à deux disjoints.

Pourquoi ? Chaque élément de la réunion appartient à un et un seul des ensembles : en comptant chaque ensemble séparément puis en additionnant, aucun élément n'est oublié ni compté deux fois.

Si A et B ne sont pas disjoints, les éléments de $A \cap B$ sont comptés deux fois dans $\text{card}(A) + \text{card}(B)$. D'où :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Complémentaire. Si A est une partie de E, son complémentaire $\bar{A}$ (éléments de E qui ne sont pas dans A) vérifie $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$, donc :

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

Cette égalité est l'outil de base des énoncés « au moins un » : il est souvent bien plus simple de compter les cas où il n'y en a « aucun », puis de les retirer du total.

Méthode du complémentaire : « au moins un » = total – « aucun ».

2. Produit cartésien et principe multiplicatif

Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble des **couples** (a ; b) avec a dans A et b dans B. L'ordre compte : (a ; b) et (b ; a) sont deux couples différents dès que $a \neq b$.

Principe multiplicatif. Si A et B sont finis :

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B).$$

$$\text{Plus généralement, } \text{card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_2) \times \dots \times \text{card}(A_p).$$

Justification : pour chacun des $\text{card}(A)$ choix du premier élément, il y a $\text{card}(B)$ choix du second. Le nombre total de couples s'obtient en additionnant $\text{card}(B)$ autant de fois qu'il y a d'éléments dans A (principe additif appliqué à une partition de $A \times B$ selon le premier élément), ce qui donne le produit.

On visualise ce principe par un **arbre de choix** : chaque niveau correspond à un choix, chaque branche à une option. Si chaque nœud d'un niveau a le même nombre de branches, le nombre de chemins complets est le produit des nombres de branches de chaque niveau.

Exemple : une tenue est formée d'un haut (5 possibilités), d'un bas (3 possibilités) et d'une paire de chaussures (2 possibilités). Le nombre de tenues est $5 \times 3 \times 2 = 30$.

Le principe multiplicatif reste valable quand l'ensemble des options du deuxième choix dépend du premier choix, **pourvu que leur nombre n'en dépende pas**. C'est ce qui permet de compter les arrangements (paragraphe 4).

Principe multiplicatif

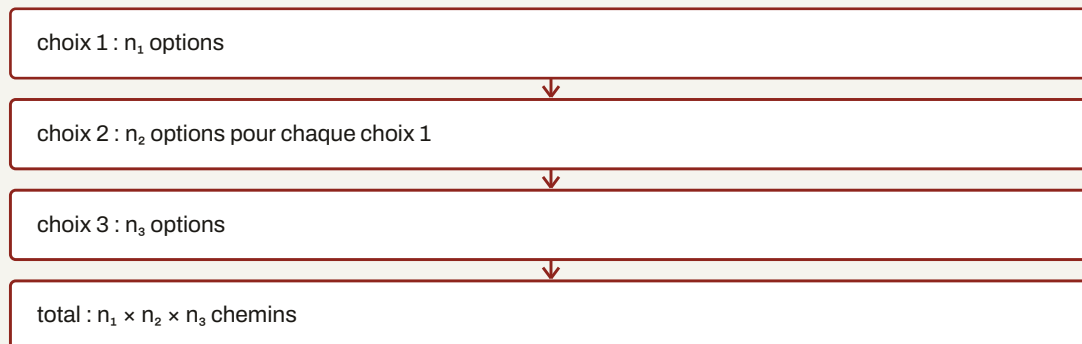


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

3. k-uplets et nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments et k un entier naturel non nul. Un **k-uplet** (ou **k-liste**) d'éléments de E est une suite ordonnée $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_k)$ de k éléments de E , **non nécessairement distincts**. C'est un élément de $E \times E \times \dots \times E$ (k facteurs), noté E^k .

Propriété. Le nombre de k -uplets d'un ensemble à n éléments est n^k .

C'est le principe multiplicatif : n choix pour chacune des k positions.

Exemples :

- un code de carte bancaire à 4 chiffres est un 4-uplet de $\{0, \dots, 9\}$: il y en a $10^4 = 10\,000$;
- une suite de 3 lancers d'une pièce (P ou F) est un 3-uplet de $\{P, F\}$: il y en a $2^3 = 8$;
- un brin d'ADN de 5 nucléotides (A, C, G, T) est un 5-uplet d'un ensemble à 4 éléments : il y en a $4^5 = 1\,024$.

Situation type : tirages successifs avec remise de k objets parmi n . L'ordre compte et un même objet peut sortir plusieurs fois.

Nombre de parties d'un ensemble. Une **partie** (ou sous-ensemble) de E est un ensemble dont tous les éléments appartiennent à E ($\emptyset$ et E lui-même sont des parties de E). L'ensemble des parties de E est noté $P(E)$.

Théorème. Un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

Démonstration. Numérotions les éléments de E : $e_1, e_2, \dots, e_n$. À toute partie A de E , on associe le n -uplet $(c_1 ; \dots ; c_n)$ de $\{0 ; 1\}$ défini par $c_i = 1$ si e_i appartient à A et $c_i = 0$ sinon. Réciproquement, tout n -uplet de 0 et de 1 définit une unique partie (celle des e_i pour lesquels $c_i = 1$). Cette correspondance est donc une bijection entre $P(E)$ et $\{0 ; 1\}^n$, qui contient 2^n éléments. Ainsi $\text{card}(P(E)) = 2^n$.

Exemple : $E = \{a, b, c\}$ a $2^3 = 8$ parties : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

4. Factorielle, arrangements et permutations

Factorielle. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle **factorielle n** le nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$. On a la relation de récurrence $(n + 1)! = (n + 1) \times n!$, qui permet les simplifications :

$$8!/6! = 8 \times 7 = 56 ; 10!/(9!) = 10.$$

Valeurs à connaître : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5\,040$, $8! = 40\,320$, $10! = 3\,628\,800$. La factorielle croît extrêmement vite : $20!$ dépasse déjà 2×10^{18} .

Arrangements. Soit E un ensemble à n éléments et k un entier avec $1 \leq k \leq n$. Un **arrangement** de k éléments de E est un k -uplet d'éléments **deux à deux distincts** de E .

Propriété. Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n est :

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = n!/(n - k)!.$$

Ce produit comporte exactement k facteurs. Justification : n choix pour le premier élément, puis $n - 1$ pour le second (il doit différer du premier), ..., puis $n - k + 1$ pour le k -ième. Le nombre d'options ne dépend pas des choix précédents, seulement de leur nombre, donc le principe multiplicatif s'applique. Enfin, en multipliant et divisant par $(n - k)!$, on obtient l'écriture $n!/(n - k)!$.

Si $k > n$, il n'existe aucun arrangement (on ne peut pas choisir plus d'éléments distincts qu'il n'y en a).

Situation type : **tirages successifs sans remise** de k objets parmi n , ou attribution de k rôles distincts à k personnes différentes.

Exemple : dans un club de 12 membres, on élit un président, un trésorier et un secrétaire (trois personnes différentes). Il y a $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$ bureaux possibles.

Permutations. Une **permutation** de E est un arrangement de ses n éléments : c'est une façon de les ranger tous dans un ordre.

Propriété. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Exemple : 6 élèves peuvent s'asseoir sur 6 chaises alignées de $6! = 720$ façons. Les anagrammes du mot MATHS (5 lettres distinctes) sont au nombre de $5! = 120$. Quand un mot contient des lettres répétées, échanger deux lettres identiques ne crée pas d'anagramme nouvelle : on compte alors en choisissant les places de chaque lettre répétée (voir l'exercice 11).

5. Combinaisons

Soit E un ensemble à n éléments et k un entier naturel avec $0 \leq k \leq n$. Une **combinaison** de k éléments de E est une **partie** de E ayant k éléments. Il n'y a ni ordre ni répétition : $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont la même partie.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n se note $C(n, k)$ et se lit « **k parmi n** ». On l'appelle aussi **coefficient binomial**. (Dans les manuels, il s'écrit avec n placé au-dessus de k entre grandes parenthèses.)

Théorème. Pour $0 \leq k \leq n$:

$$C(n, k) = n!/(k! \times (n - k)!) = [n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)]/k!.$$

Démonstration. Comptons les arrangements de k éléments de E de deux manières. D'une part, il y en a $n!/(n - k)!$. D'autre part, on obtient chaque arrangement en choisissant d'abord la partie formée de ses k éléments ($C(n, k)$ choix), puis l'ordre dans lequel on les range ($k!$ permutations de cette partie). Par le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements vaut $C(n, k) \times k!$. Donc $C(n, k) \times k! = n!/(n - k)!$, d'où la formule.

En pratique, on calcule avec la seconde écriture, qui évite les grands nombres : $C(10, 3) = (10 \times 9 \times 8) / (3 \times 2 \times 1) = 720/6 = 120$.

Situation type : **tirages simultanés** de k objets parmi n (une main de cartes, une délégation, un groupe), ou choix de k positions parmi n .

Valeurs particulières. $C(n, 0) = 1$ (seule la partie vide a 0 élément), $C(n, n) = 1$ (seul E a n éléments), $C(n, 1) = n$, $C(n, 2) = n(n-1)/2$.

Propriété de symétrie. Pour $0 \leq k \leq n$: $C(n, k) = C(n, n-k)$.

Justification par la formule : les deux nombres valent $n! / (k!(n-k)!)$. Justification combinatoire : choisir les k éléments que l'on garde revient à choisir les $n-k$ éléments que l'on laisse. Ainsi $C(20, 18) = C(20, 2) = 190$.

Relation de Pascal. Pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k).$$

Démonstration combinatoire. Fixons un élément particulier a de E . Les parties de E à k éléments se répartissent en deux catégories disjointes :

- celles qui contiennent a : il reste à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ autres, soit $C(n-1, k-1)$ parties ;
- celles qui ne contiennent pas a : on choisit les k éléments parmi les $n-1$ autres, soit $C(n-1, k)$ parties.

Le principe additif donne la relation.

Démonstration par le calcul. $C(n-1, k-1) + C(n-1, k) = (n-1)! / ((k-1)!(n-k)!) + (n-1)! / (k!(n-k-1)!)$. On réduit au dénominateur commun $k!(n-k)!$: on obtient $(n-1)! \times [k + (n-k)] / (k!(n-k)!) = n \times (n-1)! / (k!(n-k)!) = n! / (k!(n-k)!) = C(n, k)$.

Somme des coefficients d'une ligne. Pour tout entier naturel n :

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n.$$

Justification : le membre de gauche compte les parties de E en les classant selon leur nombre d'éléments (principe additif) ; le membre de droite est le nombre total de parties (paragraphe 3).

6. Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, sans factorielle. On les range dans un tableau : la ligne n contient $C(n, 0)$, $C(n, 1)$, ..., $C(n, n)$. Chaque ligne commence et finit par 1, et chaque coefficient intérieur est la somme du coefficient situé juste au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche.

n	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				

n	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Lectures utiles : chaque ligne est symétrique (propriété de symétrie), la somme de la ligne n vaut 2^n (ligne 5 : $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$), et les coefficients croissent jusqu'au milieu de la ligne puis décroissent.

Exemple : $C(7, 3) = C(6, 2) + C(6, 3) = 15 + 20 = 35$.

7. Formule du binôme de Newton

Théorème. Pour tous nombres réels a et b et tout entier naturel n :

$$(a + b)^n = C(n, 0)a^n + C(n, 1)a^{n-1}b + C(n, 2)a^{n-2}b^2 + \dots + C(n, n)b^n,$$

c'est-à-dire la somme, pour k allant de 0 à n , des termes $C(n, k) a^{n-k} b^k$.

Justification combinatoire. $(a + b)^n = (a + b)(a + b)\dots(a + b)$, avec n facteurs. En développant, on choisit dans chaque facteur soit a , soit b , et on fait le produit des n termes choisis. Un produit égal à $a^{n-k}b^k$ s'obtient chaque fois que l'on a choisi b dans exactement k facteurs : il y a autant de tels choix que de parties à k éléments parmi les n facteurs, soit $C(n, k)$. Le coefficient de $a^{n-k}b^k$ est donc $C(n, k)$.

On peut aussi démontrer la formule par récurrence sur n , en utilisant la relation de Pascal : c'est exactement la règle de construction du triangle.

Développements à connaître :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;
- $(1 + x)^n = 1 + nx + C(n, 2)x^2 + \dots + x^n$.

Pour $(a - b)^n$, on écrit $a - b = a + (-b)$: les signes alternent, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Conséquences.

- Avec $a = b = 1$: la somme des $C(n, k)$ vaut $(1 + 1)^n = 2^n$ (on retrouve le résultat du paragraphe 5).
- Avec $a = 1$ et $b = -1$, pour $n \geq 1$: $C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \dots + (-1)^nC(n, n) = 0^n = 0$. Un ensemble non vide a donc autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
- Pour $x \geq 0$: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, car tous les termes négligés sont positifs (inégalité de Bernoulli, déjà rencontrée par récurrence).

8. Choisir le bon modèle

Avant tout calcul, pose-toi deux questions : l'ordre compte-t-il ? Un même élément peut-il être choisi plusieurs fois ?

Situation	Ordre	Répétition	Objet mathématique	Nombre
Tirages successifs avec remise	oui	oui	k-uplet	n^k
Tirages successifs sans remise, rôles distincts	oui	non	arrangement	$n!/(n - k)!$
Ranger tous les éléments	oui	non ($k = n$)	permutation	$n!$
Tirages simultanés, groupe, main	non	non	combinaison	$C(n, k)$

Choisir le modèle

1. L'ordre compte-t-il ? • 2. Oui : avec répétition n^k , sans répétition $n!/(n - k)!$ • 3. Non (sans répétition) : $C(n, k)$

Lien avec les probabilités. En situation d'**équiprobabilité** sur un univers Ω fini, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega).$$

Le dénombrement sert donc à calculer $\text{card}(A)$ et $\text{card}(\Omega)$. Règle d'or : **compter A et Ω avec le même modèle** (tous deux ordonnés, ou tous deux non ordonnés). Dans un tirage simultané, on peut d'ailleurs raisonner en tirages successifs sans remise : chaque partie correspond à $k!$ arrangements, et ce facteur se simplifie dans le quotient.

Compter avec des contraintes. Les énoncés combinent souvent les principes :

- « exactement 2 as et 3 autres cartes » : on choisit les as, puis les autres cartes, et on **multiplie** (principe multiplicatif) ;
- « 2 filles ou 3 filles » : on compte chaque cas séparément et on **additionne** (cas disjoints) ;
- « au moins un » : on passe par le **complémentaire**.

Exemples résolus

Exemple 1 : codes à quatre chiffres

Un digicode accepte les codes formés de 4 chiffres pris parmi 0, 1, ..., 9. a) Combien de codes différents existe-t-il ? b) Combien de codes ont leurs 4 chiffres distincts ? c) Combien de codes comportent au moins deux chiffres identiques ? d) On tape un code au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait ses chiffres distincts ?

Résolution. a) Un code est un 4-uplet de l'ensemble $\{0, \dots, 9\}$, qui a 10 éléments ; l'ordre compte et les répétitions sont permises. Il y a donc $10^4 = \mathbf{10\,000}$ codes. b) Un code à chiffres distincts est un arrangement de 4 éléments parmi 10 : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = \mathbf{5\,040}$ codes. c) « Au moins deux chiffres identiques » est le contraire de « chiffres tous distincts ». Par la méthode du complémentaire : $10\,000 - 5\,040 = \mathbf{4\,960}$ codes. d) Les 10 000 codes sont équiprobables : $P = 5\,040/10\,000 = \mathbf{0,504}$.

Exemple 2 : mains de cinq cartes

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (4 couleurs, 8 hauteurs dont l'as ; le jeu contient 4 as). a) Combien de mains différentes peut-on obtenir ? b) Combien de mains contiennent exactement 2 as ? c) Combien de mains contiennent au moins un as ? d) En déduire la probabilité d'obtenir exactement 2 as (arrondie à 10^{-3}).

Résolution. a) Le tirage est simultané : une main est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Le nombre de mains est $C(32, 5) = (32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28)/(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 24\,165\,120/120 = 201\,376$. b) On choisit les 2 as parmi les 4 as : $C(4, 2) = 6$ façons. On choisit ensuite les 3 autres cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as : $C(28, 3) = (28 \times 27 \times 26)/6 = 19\,656/6 = 3\,276$ façons. Par le principe multiplicatif : $6 \times 3\,276 = 19\,656$ mains. c) Les mains sans as sont les parties à 5 éléments des 28 cartes qui ne sont pas des as : $C(28, 5) = (28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24)/120 = 11\,793\,600/120 = 98\,280$. Par complémentaire : $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$ mains. d) Les mains sont équiprobables : $P = 19\,656/201\,376 \approx 0,098$.

Exemple 3 : formule du binôme

a) Développer $(x - 2)^4$. b) Déterminer le coefficient de x^3 dans le développement de $(3x + 1)^7$. c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $C(n, 1) + 2C(n, 2) + 4C(n, 3) + \dots + 2^{n-1}C(n, n) = (3^n - 1)/2$.

Résolution. a) On applique la formule avec $a = x$, $b = -2$, $n = 4$ et la ligne 4 du triangle $(1, 4, 6, 4, 1)$: $(x - 2)^4 = x^4 + 4x^3(-2) + 6x^2(-2)^2 + 4x(-2)^3 + (-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. Contrôle en $x = 1$: $1 - 8 + 24 - 32 + 16 = 1$ et $(1 - 2)^4 = 1$. Le résultat est cohérent. b) Le terme général est $C(7, k)(3x)^k \times 1^{7-k} = C(7, k) 3^k x^k$. Pour $k = 3$: $C(7, 3) \times 3^3 = 35 \times 27 = 945$. c) Par le binôme avec $a = 1$ et $b = 2$: $3^n = (1 + 2)^n =$ somme des $C(n, k)2^k$ pour k de 0 à n : $3^n = 1 + 2C(n, 1) + 4C(n, 2) + \dots + 2^n C(n, n)$. On retire 1 et on divise par 2 : $(3^n - 1)/2 = C(n, 1) + 2C(n, 2) + \dots + 2^{n-1}C(n, n)$, ce qu'il fallait démontrer. Vérification pour $n = 2$: $C(2, 1) + 2C(2, 2) = 2 + 2 = 4$ et $(9 - 1)/2 = 4$.

Méthodes et pièges

- Commence toujours par décrire l'objet compté (« un résultat est un ... de ... ») : cela fixe le modèle et l'ensemble de départ.
- Pose les deux questions dans l'ordre : l'ordre compte-t-il ? la répétition est-elle possible ? Un tirage « simultané » ou la formation d'un « groupe » appelle les combinaisons ; des « rôles différents » ou des « places numérotées » appellent les arrangements.
- Ne confonds pas n^k (avec répétition) et $n!/(n - k)!$ (sans répétition) : le premier est toujours supérieur ou égal au second.
- Pour « au moins un », passe par le complémentaire : c'est plus court et moins risqué que d'additionner tous les cas.
- Quand tu multiplies des choix, vérifie qu'ils sont indépendants dans leur nombre ; quand tu additionnes des cas, vérifie qu'ils sont disjoints, sinon tu comptes deux fois les mêmes objets.
- Piège classique : compter les mains « avec au moins un as » en choisissant d'abord un as (4 façons) puis 4 cartes quelconques parmi 31. Une main à 2 as est alors comptée deux fois : le résultat est faux.
- En probabilités, compte l'événement et l'univers avec le même modèle (tous deux ordonnés ou tous deux non ordonnés).

- Calcule $C(n, k)$ avec la forme « k facteurs décroissants sur $k!$ » et utilise la symétrie : $C(50, 48) = C(50, 2) = 1\,225$, sans factorielle géante.
- Dans $(a - b)^n$, n'oublie pas les signes alternés, et dans $(3x + 1)^n$, la puissance porte aussi sur le coefficient 3.

Vers le PASS

En PASS et en LAS, le dénombrement est la base du calcul des probabilités en biostatistique : nombre de génotypes possibles, nombre de séquences de nucléotides ou de peptides (4^n séquences d'ADN de longueur n , 20^n peptides de n acides aminés), tirages de patients dans une population, nombre de façons de répartir des sujets entre groupes d'un essai. Les coefficients $C(n, k)$ sont exactement ceux de la loi binomiale, qui décrit le nombre de succès dans une suite d'épreuves indépendantes (nombre d'enfants atteints dans une fratrie, nombre de répondants à un traitement). Les QCM exigent de reconnaître vite le bon modèle et de mener le calcul sans calculatrice, d'où l'intérêt des simplifications de factorielles et de la symétrie.

Suite en PASS : Dénombrement, lois discrètes et calcul probabiliste

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Calculer sans calculatrice : a) $6!$; b) $8!/6!$; c) $C(7, 2)$; d) $C(10, 8)$; e) le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 5.
2. Un restaurant propose 4 entrées, 5 plats et 3 desserts.
a) Combien de menus « entrée, plat, dessert » peut-on composer ? b) Un menu léger est soit « entrée et plat », soit « plat et dessert ». Combien de menus légers existe-t-il ?
3. On forme des mots de 5 lettres (ayant un sens ou non) avec les 26 lettres de l'alphabet.
a) Combien de mots peut-on former ? b) Combien de mots ont leurs 5 lettres distinctes ?
4. Huit chevaux participent à une course, sans ex aequo.
a) Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre (les trois premiers avec leur rang) ? b) Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre (l'ensemble des trois premiers) ? c) Combien y a-t-il de classements complets de l'arrivée ?
5. Soit E un ensemble à 6 éléments.
a) Combien E a-t-il de parties ? b) Combien de parties à 2 éléments ? c) Combien de parties ayant au moins 2 éléments ?

Niveau 2 : type bac

6. Une classe compte 18 filles et 12 garçons. On forme une délégation de 4 élèves.
a) Combien de délégations différentes peut-on former ? b) Combien de délégations comportent exactement 2 filles et 2 garçons ? c) Combien de délégations comportent au moins une fille ? d) On élit maintenant dans la classe un président, un secrétaire et un trésorier, trois élèves distincts. Combien de bureaux possibles ?
7. Un code d'accès est formé d'une lettre, A ou B, suivie de 4 chiffres (de 0 à 9).

- a) Combien de codes existe-t-il ? b) Combien de codes ont leurs 4 chiffres distincts ? c) Combien de codes contiennent au moins un 0 ?
8. a) Écrire les lignes 0 à 6 du triangle de Pascal.
- b) En déduire le développement de $(1 + x)^6$. c) En déduire une valeur approchée de $1,01^6$ à 10^{-5} près, en justifiant que les derniers termes sont négligeables.
9. Soit n un entier naturel non nul.
- a) Démontrer par le calcul que $C(n, k) = C(n, n - k)$ pour $0 \leq k \leq n$. b) Démontrer par le calcul la relation $C(n + 1, 2) = C(n, 1) + C(n, 2)$, puis vérifier pour $n = 5$. c) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$.
10. On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32 cartes (8 cœurs, 4 rois).
- a) Combien de tirages sont possibles ? b) Combien de tirages contiennent exactement un cœur ? c) Combien de tirages contiennent une carte de chacune des 4 couleurs ? d) Combien de tirages contiennent au moins un roi ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Anagrammes.
- a) Combien d'anagrammes a le mot LAPIN ? b) Combien d'anagrammes a le mot PASS ? (On pourra choisir d'abord les places des deux S.) c) Combien d'anagrammes a le mot BANANE ?
12. Sur un quadrillage, on se déplace du point $O(0 ; 0)$ au point $B(5 ; 3)$ par des pas d'une unité, uniquement vers la droite (D) ou vers le haut (H).
- a) Combien de pas comporte un chemin ? Combien de chemins différents existe-t-il ? b) Combien de ces chemins passent par le point $C(2 ; 1)$? c) Combien ne passent pas par C ?
13. Un fragment d'ADN est une suite de 10 nucléotides, chacun pris parmi A, C, G, T.
- a) Combien de fragments différents existe-t-il ? b) Combien de fragments contiennent exactement 3 nucléotides G ? c) Un tripeptide est une suite ordonnée de 3 acides aminés pris parmi 20. Combien de tripeptides existe-t-il ? d) Vrai ou faux : environ un quart des fragments de la question a) contiennent exactement 3 G.
14. a) Dans une réunion, chacun serre la main de chacun des autres une seule fois. On compte 66 poignées de main. Combien de personnes sont présentes ?
- b) Montrer qu'un polygone convexe à n côtés ($n \geq 4$) possède $n(n - 3)/2$ diagonales, puis calculer ce nombre pour $n = 10$.

Corrigés

1. a) $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.
- b) $8!/6! = (8 \times 7 \times 6!)/6! = 8 \times 7 = 56$. c) $C(7, 2) = (7 \times 6)/2 = 21$. d) Par symétrie, $C(10, 8) = C(10, 2) = (10 \times 9)/2 = 45$. e) $5 \times 4 \times 3 = 60$ arrangements.
2. a) Un menu est un triplet (entrée ; plat ; dessert). Par le principe multiplicatif : $4 \times 5 \times 3 = 60$ menus.
- b) Les menus « entrée et plat » sont au nombre de $4 \times 5 = 20$, les menus « plat et dessert » de $5 \times 3 = 15$. Ces deux catégories sont disjointes (l'une contient une entrée, l'autre non). Par le principe additif : $20 + 15 = 35$ menus légers.

3. a) Un mot est un 5-uplet de l'alphabet (26 lettres, répétitions permises) : $26^5 = 11\,881\,376$ mots.
- b) Un mot à lettres distinctes est un arrangement de 5 lettres parmi 26 : $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$. On calcule : $26 \times 25 = 650$; $650 \times 24 = 15\,600$; $15\,600 \times 23 = 358\,800$; $358\,800 \times 22 = 7\,893\,600$ mots.
4. a) L'ordre compte et un cheval n'occupe qu'un rang : arrangement de 3 parmi 8, soit $8 \times 7 \times 6 = 336$.
- b) Seul l'ensemble des trois premiers compte : $C(8, 3) = 336/3! = 336/6 = 56$. c) Un classement complet est une permutation des 8 chevaux : $8! = 40\,320$.
5. a) Un ensemble à 6 éléments a $2^6 = 64$ parties.
- b) $C(6, 2) = (6 \times 5)/2 = 15$ parties. c) On retire au total les parties à 0 élément ($C(6, 0) = 1$) et à 1 élément ($C(6, 1) = 6$) : $64 - 1 - 6 = 57$ parties.
6. a) Une délégation est une partie de 4 élèves parmi 30 : $C(30, 4) = (30 \times 29 \times 28 \times 27)/24 = 657\,720/24 = 27\,405$ délégations.
- b) On choisit 2 filles parmi 18 : $C(18, 2) = (18 \times 17)/2 = 153$, puis 2 garçons parmi 12 : $C(12, 2) = 66$. Principe multiplicatif : $153 \times 66 = 10\,098$ délégations. c) Contraire : aucune fille, c'est-à-dire 4 garçons parmi 12 : $C(12, 4) = (12 \times 11 \times 10 \times 9)/24 = 11\,880/24 = 495$. Donc $27\,405 - 495 = 26\,910$ délégations. d) Les postes sont distincts, donc l'ordre compte, sans répétition : $30 \times 29 \times 28 = 24\,360$ bureaux.
7. a) 2 choix pour la lettre, puis un 4-uplet de chiffres (10^4 choix) : $2 \times 10\,000 = 20\,000$ codes.
- b) 2 choix pour la lettre, puis un arrangement de 4 chiffres parmi 10 ($10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$) : $2 \times 5\,040 = 10\,080$ codes. c) Pour une lettre fixée, les codes sans 0 utilisent seulement 9 chiffres : $9^4 = 6\,561$. Les codes avec au moins un 0 sont $10\,000 - 6\,561 = 3\,439$ par lettre. Au total : $2 \times 3\,439 = 6\,878$ codes.
8. a) Lignes 0 à 6 : 1 ; 1 1 ; 1 2 1 ; 1 3 3 1 ; 1 4 6 4 1 ; 1 5 10 10 5 1 ; 1 6 15 20 15 6 1.
- b) Avec la ligne 6 : $(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$. c) Avec $x = 0,01$: $1 + 0,06 + 15 \times 0,0001 + 20 \times 0,000001 + 15 \times 10^{-8} + 6 \times 10^{-10} + 10^{-12} = 1 + 0,06 + 0,0015 + 0,00002 + 0,00000015 + \dots$ Les trois derniers termes ont une somme inférieure à 2×10^{-7} , très inférieure à 10^{-5} . Donc $1,01^6 \approx 1,06152$ à 10^{-5} près.
9. a) $C(n, n - k) = n!/((n - k)! \times (n - (n - k))!) = n!/((n - k)! \times k!) = C(n, k)$, car $n - (n - k) = k$. La symétrie est démontrée.
- b) $C(n, 1) + C(n, 2) = n + n(n - 1)/2 = (2n + n^2 - n)/2 = (n^2 + n)/2 = n(n + 1)/2$. Or $C(n + 1, 2) = (n + 1)n/2$. Les deux expressions sont égales. Pour $n = 5$: $C(5, 1) + C(5, 2) = 5 + 10 = 15$ et $C(6, 2) = 15$. Vérifié. c) La formule du binôme avec $a = b = 1$ donne $(1 + 1)^n =$ somme des $C(n, k) \times 1^{n-k} \times 1^k$, d'où $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$.
10. a) $C(32, 4) = (32 \times 31 \times 30 \times 29)/24 = 863\,040/24 = 35\,960$ tirages.
- b) Un cœur parmi 8 : 8 façons ; 3 cartes parmi les 24 non-cœurs : $C(24, 3) = (24 \times 23 \times 22)/6 = 12\,144/6 = 2\,024$. Total : $8 \times 2\,024 = 16\,192$ tirages. c) On choisit une carte dans chacune des 4 couleurs, chaque couleur comptant 8 cartes : $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4 = 4\,096$ tirages. (Chaque main n'est comptée qu'une fois : elle est entièrement décrite par son cœur, son carreau, son trèfle et son pique, sans ordre de tirage à prendre en compte.) d) Sans roi : 4 cartes parmi 28, $C(28, 4) = (28 \times 27 \times 26 \times 25)/24 = 491\,400/24 = 20\,475$. Au moins un roi : $35\,960 - 20\,475 = 15\,485$ tirages.
11. a) Les 5 lettres de LAPIN sont distinctes : une anagramme est une permutation, soit $5! = 120$ anagrammes.

b) Le mot PASS a 4 lettres dont deux S identiques. On choisit les 2 places des S parmi 4 : $C(4, 2) = 6$; on place ensuite P et A dans les 2 places restantes, dans un ordre : $2! = 2$. Total : $6 \times 2 = 12$ **anagrammes**. (Contrôle : $4!/2! = 24/2 = 12$.) c) BANANE : 6 lettres, dont A deux fois et N deux fois. Places des A : $C(6, 2) = 15$; places des N parmi les 4 restantes : $C(4, 2) = 6$; B et E dans les 2 dernières places : 2. Total : $15 \times 6 \times 2 = 180$ **anagrammes**. (Contrôle : $6!/(2! \times 2!) = 720/4 = 180$.)

12. a) Il faut 5 pas D et 3 pas H, soit **8 pas**. Un chemin est entièrement déterminé par le choix des 3 places des pas H parmi les 8 : $C(8, 3) = (8 \times 7 \times 6)/6 = 56$ **chemins**.

b) De O à C(2 ; 1) : 3 pas dont 1 H, soit $C(3, 1) = 3$ chemins. De C à B : 3 pas D et 2 pas H, soit 5 pas et $C(5, 2) = 10$ chemins. Principe multiplicatif : $3 \times 10 = 30$ **chemins**. c) Par complémentaire : $56 - 30 = 26$ **chemins**.

13. a) Un fragment est un 10-uplet d'un ensemble à 4 éléments : $4^{10} = 1\,048\,576$ **fragments**.

b) On choisit les 3 positions des G parmi 10 : $C(10, 3) = 120$. Les 7 autres positions reçoivent chacune A, C ou T : $3^7 = 2\,187$. Total : $120 \times 2\,187 = 262\,440$ **fragments**. c) $20^3 = 8\,000$ **tripeptides**. d) $262\,440/1\,048\,576 \approx 0,250$. **Vrai** : environ un quart des fragments contiennent exactement 3 G.

14. a) Une poignée de main correspond à une paire de personnes : il y en a $C(n, 2) = n(n - 1)/2$. On résout $n(n - 1)/2 = 66$, soit $n(n - 1) = 132 = 12 \times 11$. Comme $n(n - 1)$ est strictement croissant pour $n \geq 1$, la seule solution est **n = 12 personnes**.

b) Un segment joignant deux sommets est déterminé par une paire de sommets : $C(n, 2) = n(n - 1)/2$ segments. Parmi eux, n sont des côtés, les autres sont des diagonales. Nombre de diagonales : $n(n - 1)/2 - n = (n^2 - n - 2n)/2 = n(n - 3)/2$. Pour $n = 10$: $10 \times 7/2 = 35$ **diagonales**.

Loi binomiale

COURS • M18 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Reconnaître une épreuve de Bernoulli, préciser le succès et son paramètre p .
- Calculer l'espérance et la variance d'une variable de Bernoulli.
- Reconnaître un schéma de Bernoulli (répétition d'épreuves identiques et indépendantes) et le représenter par un arbre pondéré.
- Justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale et donner ses paramètres n et p .
- Interpréter le coefficient $C(n, k)$ comme le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès.
- Calculer $P(X = k)$ par la formule, et $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$, $P(a \leq X \leq b)$ à la calculatrice ou par complémentaire.
- Calculer et interpréter l'espérance np , la variance $np(1 - p)$ et l'écart type d'une loi binomiale.
- Déterminer un seuil : plus petit n tel que $P(X \geq 1)$ dépasse une valeur donnée.
- Déterminer un intervalle de fluctuation d'une variable binomiale ou de la fréquence associée et l'utiliser pour prendre une décision.

Cours

1. Épreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que **deux issues** : l'une appelée **succès** (notée S), l'autre **échec** (notée $\bar{S}$). On note p la probabilité du succès ; celle de l'échec est alors $1 - p$. Le nombre p , compris entre 0 et 1, est le **paramètre** de l'épreuve.

Exemples :

- on lance une pièce équilibrée ; succès « obtenir pile » ; $p = 0,5$;
- on lance un dé équilibré ; succès « obtenir 6 » ; $p = 1/6$ (les autres faces sont toutes regroupées dans l'échec) ;

- on interroge une personne choisie au hasard dans une population où 30 % des personnes portent un caractère ; succès « la personne porte le caractère » ; $p = 0,3$.

Le choix de ce que l'on appelle succès est une convention : il doit être annoncé clairement, sans jugement de valeur.

La variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** :

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

Propriété. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$E(X) = p ; V(X) = p(1 - p) ; \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}.$$

Démonstration. $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$. Comme X ne prend que les valeurs 0 et 1, $X^2 = X$, donc $E(X^2) = p$. Par la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

Remarque : $p(1 - p) = 1/4 - (p - 1/2)^2$, donc la variance est maximale, égale à $1/4$, pour $p = 1/2$. Une épreuve est d'autant plus « incertaine » que son succès et son échec sont équilibrés.

2. Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli :

- **identiques** (même paramètre p à chaque épreuve),
- **indépendantes** (l'issue de l'une ne modifie pas les probabilités des autres).

Le résultat d'un schéma de Bernoulli est une liste de n issues, par exemple (S ; S ; S) pour $n = 3$. On le représente par un **arbre pondéré** à n niveaux, chaque nœud ayant deux branches pondérées par p et $1 - p$.

Grâce à l'indépendance, la probabilité d'une liste d'issues est le **produit** des probabilités le long du chemin correspondant. Par exemple, pour $n = 3$: $P(S ; S ; S) = p \times (1 - p) \times p = p^2(1 - p)$.

Exemples de schémas de Bernoulli :

- lancer 10 fois une pièce ($n = 10$, $p = 0,5$) ;
- tirer **avec remise** 5 boules dans une urne qui contient 3 boules rouges sur 8 et compter les rouges ($n = 5$, $p = 3/8$) ;
- répondre au hasard aux 20 questions d'un QCM dont chacune a 4 propositions, une seule juste ($n = 20$, $p = 1/4$).

Contre-exemple : tirer **sans remise** 5 boules dans la même urne. La composition de l'urne change à chaque tirage, les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes : ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

Cas limite fréquent : tirer sans remise n individus dans une population **très grande** devant n . Le retrait de quelques individus modifie à peine les proportions, et l'on **assimile** ce tirage à un tirage avec remise. L'énoncé le précise en général.

3. Loi binomiale : définition et formule

Définition. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . La variable aléatoire X égale au **nombre de succès** obtenus au cours des n épreuves suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée $B(n, p)$. X prend les valeurs entières $0, 1, \dots, n$.

Théorème. Si X suit la loi $B(n, p)$, alors pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = C(n, k) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

Démonstration. L'événement $\{X = k\}$ est réalisé par toutes les listes de n issues comportant exactement k succès et $n - k$ échecs.

- **Probabilité d'une telle liste** : par indépendance, c'est le produit de k facteurs p et de $n - k$ facteurs $1 - p$, soit $p^k(1 - p)^{n-k}$, quelle que soit la place des succès.
- **Nombre de telles listes** : une liste est déterminée par le choix des k rangs (parmi les n) où se trouvent les succès. Il y a $C(n, k)$ façons de choisir ces rangs.

Ces listes correspondent à des chemins distincts de l'arbre, donc à des événements incompatibles. On additionne $C(n, k)$ fois la même probabilité, d'où la formule.

Le coefficient binomial $C(n, k)$ est le nombre de chemins de l'arbre qui réalisent exactement k succès parmi n épreuves.

Vérification. La somme des probabilités vaut bien 1 : par la formule du binôme, la somme des $C(n, k)p^k(1 - p)^{n-k}$ pour k de 0 à n est égale à $(p + (1 - p))^n = 1^n = 1$. C'est d'ailleurs de là que vient le nom « loi binomiale ».

Cas particuliers à connaître.

- $P(X = 0) = (1 - p)^n$: aucun succès, tous les facteurs valent $1 - p$.
- $P(X = n) = p^n$: que des succès.
- $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$: au moins un succès, par complémentaire.
- La loi $B(1, p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre p .

Reconnaître une loi binomiale

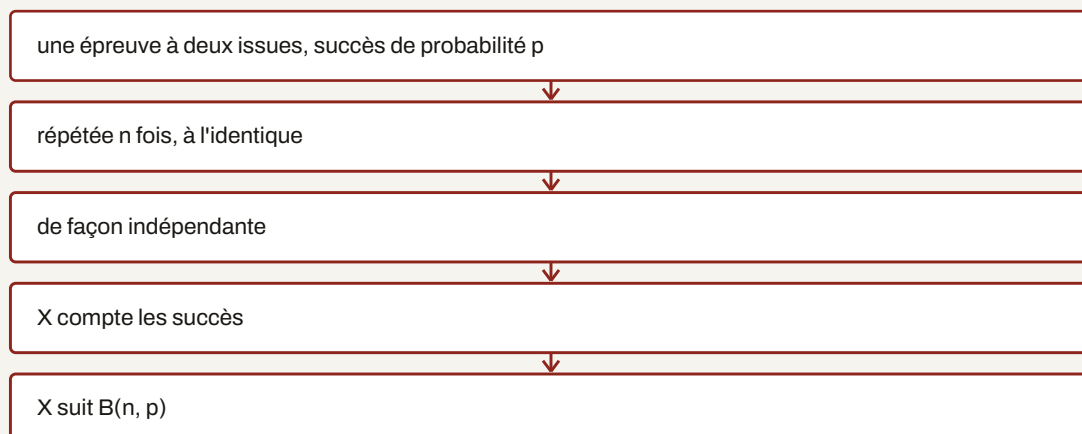


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Rédaction attendue au bac. « On répète n fois, de manière identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli dont le succès "..." a pour probabilité p . La variable aléatoire X , égale au nombre de succès, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$ » Chaque mot compte : épreuve à deux issues, identique, indépendante, X compte les succès.

4. Allure de la loi et symétries

On représente la loi $B(n, p)$ par un **diagramme en bâtons** : en abscisse les valeurs k , en ordonnée les probabilités $P(X = k)$.

- Pour $p = 0,5$, le diagramme est **symétrique** par rapport à $n/2$: $P(X = k) = P(X = n - k)$, car $C(n, k) = C(n, n - k)$ et $p^k(1 - p)^{n-k} = 0,5^n$ dans les deux cas.
- Pour $p < 0,5$, les probabilités sont concentrées sur les petites valeurs ; pour $p > 0,5$, sur les grandes.
- Les probabilités croissent puis décroissent : il existe une valeur (ou deux valeurs voisines) de probabilité maximale, appelée **mode**, proche de np (voir l'exercice 11).

Lien entre succès et échecs. Si X suit $B(n, p)$, le nombre d'échecs $Y = n - X$ suit $B(n, 1 - p)$: on échange simplement les rôles de S et S̄. Cela permet par exemple de calculer $P(X \geq 18)$ pour X de loi $B(20 ; 0,85)$ comme $P(Y \leq 2)$ pour Y de loi $B(20 ; 0,15)$.

Exemple de loi $B(10 ; 0,3)$, valeurs arrondies à 10^{-4} :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	0,0282	0,1211	0,2335	0,2668	0,2001	0,1029	0,0368	0,0090

Les valeurs pour $k = 8, 9, 10$ sont inférieures à 0,002. Le mode est 3, égal ici à $np = 3$.

5. Calculs de probabilités cumulées

En pratique, on a souvent besoin de probabilités du type « au plus k », « au moins k » ou « entre a et b succès ».

- $P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k)$. On l'appelle **probabilité cumulée** ; la calculatrice la donne directement (fonction de répartition binomiale, par exemple « binomFRép » ou « BinomialCD » selon le modèle), tandis que $P(X = k)$ s'obtient par « binomFdp » ou « BinomialPD ».
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$, par complémentaire. Attention au décalage : le contraire de « $X \geq k$ » est « $X \leq k - 1$ », pas « $X \leq k$ ».
- $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$.

Comme X ne prend que des valeurs entières, $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$. Écrire l'événement en toutes lettres avant de le traduire évite la plupart des erreurs.

En Python, la fonction `comb` du module `math` donne $C(n, k)$: $P(X = k)$ s'obtient par l'expression `comb(n, k) * pow(p, k) * pow(1 - p, n - k)`, et $P(X \leq k)$ par une boucle qui additionne ces termes pour i allant de 0 à k .

Problème de seuil. On cherche souvent le plus petit nombre n d'épreuves pour lequel $P(X \geq 1)$ dépasse une valeur donnée $1 - \alpha$. Comme $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$, l'inéquation devient $(1 - p)^n \leq \alpha$. Avec le logarithme népérien, fonction strictement croissante : $n \ln(1 - p) \leq \ln(\alpha)$, puis, en divisant par $\ln(1 - p)$

qui est **strictement négatif** (le sens de l'inégalité change) :

$$n \geq \ln(\alpha)/\ln(1 - p).$$

On peut aussi procéder par balayage à la calculatrice (tableau de valeurs de $1 - (1 - p)^n$) ou par une boucle « tant que » en Python.

6. Espérance, variance et écart type

Théorème. Si X suit la loi $B(n, p)$:

$$E(X) = np ; V(X) = np(1 - p) ; \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

Justification. On note X_i la variable qui vaut 1 si la i -ème épreuve est un succès, 0 sinon. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p , et $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (on compte les succès un par un).

L'espérance d'une somme est la somme des espérances, donc $E(X) = n \times p$. Les X_i étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leurs variances, donc $V(X) = n \times p(1 - p)$. Ces deux propriétés des sommes de variables aléatoires sont établies dans le chapitre suivant.

Interprétation. $E(X) = np$ est le **nombre moyen de succès** que l'on obtiendrait en répétant un très grand nombre de fois le schéma de Bernoulli. Par exemple, sur 600 lancers d'un dé, on attend en moyenne $600 \times 1/6 = 100$ six. L'écart type mesure la dispersion autour de cette moyenne : ici $\sigma = \sqrt{600 \times 1/6 \times 5/6} = \sqrt{250/3} \approx 9,1$.

Fréquence de succès. La variable $F = X/n$ est la **fréquence** des succès. Par les propriétés de $aX + b$ vues en Première :

$$E(F) = p ; V(F) = p(1 - p)/n ; \sigma(F) = \sqrt{p(1 - p)}/\sqrt{n}.$$

La fréquence est centrée sur p , et sa dispersion **diminue quand n augmente**, proportionnellement à $1/\sqrt{n}$: pour diviser l'écart type par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4.

7. Intervalle de fluctuation

Soit X une variable de loi $B(n, p)$ et α un réel de $]0 ; 1[$ (souvent $\alpha = 0,05$). Un **intervalle de fluctuation** de X au seuil $1 - \alpha$ est un intervalle $[a ; b]$ tel que :

$$P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha.$$

Il donne une plage dans laquelle le nombre de succès se trouve « avec une forte probabilité ». La méthode usuelle, pour $\alpha = 0,05$, répartit le risque des deux côtés :

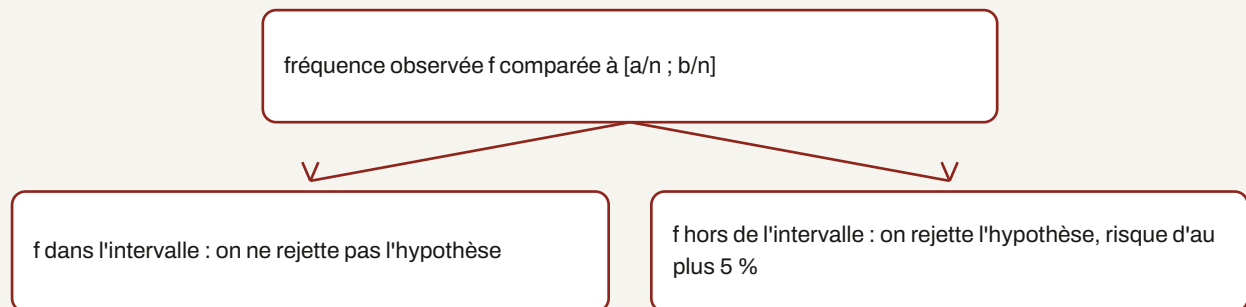
- a est le **plus petit entier** tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le **plus petit entier** tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Alors $P(X < a) = P(X \leq a - 1) \leq 0,025$ et $P(X > b) = 1 - P(X \leq b) \leq 0,025$, donc $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$. On détermine a et b à l'aide d'un tableau des probabilités cumulées. En divisant par n , on obtient l'intervalle de fluctuation de la **fréquence** : $[a/n ; b/n]$.

Prise de décision. On fait une hypothèse sur p (« la proportion vaut p dans la population »). On observe la fréquence f sur un échantillon de taille n .

- Si f n'appartient pas à $[a/n ; b/n]$, on **rejette** l'hypothèse, avec un risque d'erreur d'au plus 5 % (le risque de rejeter à tort une hypothèse vraie).
- Si f appartient à l'intervalle, on **ne rejette pas** l'hypothèse. Attention : cela ne prouve pas qu'elle est vraie, seulement que l'observation est compatible avec elle.

Décision au seuil de 95 %



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Ordre de grandeur. Lorsque n est grand ($n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$), l'intervalle $[p - 1,96 \sigma(F) ; p + 1,96 \sigma(F)]$ donne une approximation de l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %. Il permet de contrôler l'ordre de grandeur du résultat exact.

Exemples résolus

Exemple 1 : nombre de six en cinq lancers

On lance 5 fois un dé équilibré et l'on note X le nombre de 6 obtenus. a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. b) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 0)$, arrondies à 10^{-4} . c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6. d) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Résolution. a) Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir 6 », de probabilité $p = 1/6$. On répète 5 fois cette épreuve de manière identique et indépendante (les lancers n'influencent pas les uns sur les autres). X compte les succès, donc X suit la loi $B(5 ; 1/6)$. b) $P(X = 2) = C(5, 2) \times (1/6)^2 \times (5/6)^3 = 10 \times 1/36 \times 125/216 = 1250/7776 \approx 0,1608$. $P(X = 0) = (5/6)^5 = 3125/7776 \approx 0,4019$. c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 3125/7776 = 4651/7776 \approx 0,5981$. d) $E(X) = 5 \times 1/6 = 5/6 \approx 0,83$; $V(X) = 5 \times 1/6 \times 5/6 = 25/36$, donc $\sigma(X) = 5/6 \approx 0,83$.

Exemple 2 : répondre au hasard à un QCM

Un QCM comporte 10 questions indépendantes, chacune avec 4 propositions dont une seule est juste. Un candidat répond au hasard à chaque question. On note X le nombre de bonnes réponses. a) Donner la loi de X . b) Calculer $P(X = 5)$ puis $P(X \geq 6)$, arrondies à 10^{-4} . c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. d) Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque mauvaise en retire 0,5. Exprimer la note N en fonction de X et calculer $E(N)$.

Résolution. a) Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « répondre juste », de probabilité $1/4$. Les 10 réponses sont identiques et indépendantes, X compte les succès : X suit $B(10 ; 0,25)$. b) $P(X = 5) = C(10, 5) \times 0,25^5 \times 0,75^5 = 252 \times (1/1024) \times (243/1024) = 61236/1048576 \approx 0,0584$. Pour $P(X \geq 6)$, on écrit $P(X = k) = C(10, k) \times 3^{10-k}/4^{10}$, avec $4^{10} = 1048576$. Numérateurs : $k = 6 : 210 \times 81 = 17010$; $k = 7 : 120 \times 27 = 3240$; $k = 8 : 45 \times 9 = 405$; $k = 9 : 10 \times 3 = 30$; $k = 10 : 1$. Somme : 20686. Donc $P(X \geq 6) = 20686/1048576 \approx 0,0197$. (À la calculatrice : $1 - P(X \leq 5)$.) c) $E(X) = 10 \times 0,25 = 2,5$; $V(X) = 10 \times 0,25 \times 0,75 = 1,875$. d) Il y a X bonnes réponses et $10 - X$ mauvaises : $N = X - 0,5(10 - X) = 1,5X - 5$. Par linéarité, $E(N) = 1,5 \times 2,5 - 5 = -1,25$. Répondre au hasard fait perdre des points en moyenne : c'est le

rôle des points négatifs.

Exemple 3 : un problème de seuil

Un fabricant estime que chaque pièce produite est défectueuse avec une probabilité 0,02, indépendamment des autres. Combien de pièces faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de trouver au moins une pièce défectueuse dépasse 0,95 ?

Résolution. Pour n pièces contrôlées, le nombre X de pièces défectueuses suit la loi $B(n ; 0,02)$ (n épreuves identiques et indépendantes, succès « défectueuse »). On veut $P(X \geq 1) \geq 0,95$, c'est-à-dire $1 - 0,98^n \geq 0,95$, soit $0,98^n \leq 0,05$. La fonction $\ln$ est strictement croissante : $n \ln(0,98) \leq \ln(0,05)$. Comme $\ln(0,98) < 0$, on divise en changeant le sens : $n \geq \ln(0,05)/\ln(0,98) \approx (-2,9957)/(-0,0202) \approx 148,3$. Le plus petit entier convenable est $n = 149$. Contrôle : $0,98^{148} \approx 0,0503 > 0,05$ et $0,98^{149} \approx 0,0493 \leq 0,05$.

Exemple 4 : intervalle de fluctuation et décision

Dans une population, on admet que 20 % des individus portent un certain allèle. Dans un échantillon de 50 individus tirés au hasard (population assez grande pour assimiler le tirage à un tirage avec remise), on en compte 17 porteurs. On donne, pour X de loi $B(50 ; 0,2)$: $P(X \leq 4) \approx 0,0185$; $P(X \leq 5) \approx 0,0480$; $P(X \leq 15) \approx 0,9692$; $P(X \leq 16) \approx 0,9856$. a) Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %. b) L'échantillon remet-il en cause l'hypothèse « 20 % de porteurs » ?

Résolution. a) Le nombre X de porteurs suit $B(50 ; 0,2)$. Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est $a = 5$ (car $P(X \leq 4) \approx 0,0185 \leq 0,025$ et $P(X \leq 5) \approx 0,0480 > 0,025$). Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est $b = 16$. L'intervalle de fluctuation de la fréquence est $[5/50 ; 16/50] = [0,10 ; 0,32]$. b) La fréquence observée est $f = 17/50 = 0,34$, qui n'appartient pas à $[0,10 ; 0,32]$. **On rejette l'hypothèse** au seuil de 95 %, avec un risque d'erreur d'au plus 5 % : cet échantillon contient significativement plus de porteurs qu'attendu. Contrôle d'ordre de grandeur : $\sigma(F) = \sqrt{(0,2 \times 0,8)/50} \approx 0,0566$, et $0,2 \pm 1,96 \times 0,0566$ donne environ $[0,089 ; 0,311]$, proche du résultat exact.

Méthodes et pièges

- Pour justifier une loi binomiale, cite les quatre éléments : deux issues, paramètre p , n répétitions identiques et indépendantes, X compte les succès.
- Un tirage sans remise dans une petite urne n'est pas binomial ; un tirage dans une grande population peut être assimilé à un tirage avec remise si l'énoncé le permet.
- Écris toujours l'événement en toutes lettres : « au moins 3 » donne $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, avec le décalage de 1.
- Pour « au moins un succès », utilise directement $1 - (1 - p)^n$.
- Dans un problème de seuil, $\ln(1 - p)$ est négatif : le sens de l'inégalité change quand tu divises. Vérifie ta réponse avec n et $n - 1$.
- Ne confonds pas la variance $np(1 - p)$ et l'écart type $\sqrt{np(1 - p)}$.
- Pour un intervalle de fluctuation, a est le plus petit entier avec $P(X \leq a) > 0,025$ (inégalité stricte), b le plus petit avec $P(X \leq b) \geq 0,975$. Divise par n pour passer aux fréquences.
- Ne conclus jamais « l'hypothèse est vraie » quand la fréquence est dans l'intervalle : tu dis seulement que tu ne la rejettes pas.
- Arrondis seulement à la fin et donne les probabilités avec le nombre de décimales demandé.

Vers le PASS

En PASS et en LAS, la loi binomiale est la première loi discrète de la biostatistique. Elle modélise le nombre de répondants à un traitement dans un groupe de patients, le nombre d'enfants atteints dans une fratrie pour une maladie héréditaire (avec $p = 1/4$ pour un couple d'hétérozygotes et une transmission autosomique récessive), le nombre de bonnes réponses à un QCM répondu au hasard. La logique de l'intervalle de fluctuation devient celle des **tests statistiques** : hypothèse nulle, risque de première espèce α , décision de rejet. Pour n grand, la loi binomiale est approchée par une loi normale, ce qui justifie les intervalles en $1,96 \sigma$ que tu retrouveras en estimation.

Suite en PASS : Variables aléatoires et lois usuelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale ; si oui, donner ses paramètres.
 - Une urne contient 5 boules rouges et 3 noires. On tire 4 boules successivement avec remise ; X est le nombre de boules rouges.
 - Même urne, 4 tirages successifs sans remise ; X est le nombre de boules rouges.
 - On lance 10 fois un dé équilibré ; X est la somme des faces obtenues.
 - Dans une très grande population dont 30 % des personnes sont gauchères, on interroge 200 personnes au hasard ; X est le nombre de gauchers.
- X suit la loi $B(6 ; 0,4)$. Calculer $P(X = 2)$, $P(X = 0)$, $P(X \geq 1)$, puis $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- On lance 8 fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 piles, puis celle d'obtenir au moins 7 piles. Donner les valeurs exactes et arrondies à 10^{-4} .
- X suit la loi $B(200 ; 0,15)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-2}). Interpréter $E(X)$.
- X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .
 - Rappeler $E(X)$ et $V(X)$.
 - Montrer que $V(X) = 1/4 - (p - 1/2)^2$, puis pour quelle valeur de p la variance est maximale.

Niveau 2 : type bac

- Une graine d'une certaine variété germe avec une probabilité 0,85, indépendamment des autres. On sème 20 graines et l'on note X le nombre de graines qui germent.
 - Justifier que X suit une loi binomiale.
 - Calculer $P(X = 20)$ à 10^{-4} près.
 - À la calculatrice, calculer $P(X \geq 18)$ et $P(X \leq 15)$ à 10^{-4} près.
 - Calculer $E(X)$ et interpréter.
- À chaque tir, un joueur atteint la cible avec une probabilité 0,1, indépendamment des autres tirs.
 - Exprimer, en fonction de n , la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible en n tirs.
 - Déterminer le plus petit n pour lequel cette probabilité est supérieure ou égale à 0,999.
- Un semencier affirme que 25 % de ses graines ne germent pas. On sème 80 graines et l'on observe 30 graines qui ne germent pas. On suppose l'affirmation vraie et l'on note X le nombre de graines qui ne germent pas, de loi $B(80 ; 0,25)$. On donne : $P(X \leq 12) \approx 0,0221$; $P(X \leq 13) \approx 0,0421$; $P(X \leq 27) \approx 0,9705$; $P(X \leq 28) \approx 0,9834$.
 - Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des graines qui ne germent pas.
 - Peut-on remettre en cause l'affirmation du semencier ?

9. Un joueur mise 4 € puis lance 4 fois un dé équilibré. Il reçoit 5 € par 6 obtenu. On note X le nombre de 6 et G son gain algébrique (gain reçu moins mise).
- a) Donner la loi de X et exprimer G en fonction de X . b) Calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? c) Calculer $P(G > 0)$ et $P(G \geq 6)$ en valeurs exactes.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Un couple dont les deux membres sont hétérozygotes (Aa) pour un gène à transmission autosomique récessive a 4 enfants. Pour chaque enfant, la probabilité d'être homozygote aa est $1/4$, indépendamment des autres enfants. On note X le nombre d'enfants aa .
- a) Donner la loi de X . b) Calculer la probabilité qu'exactly un enfant soit aa . c) Calculer la probabilité qu'au moins un enfant soit aa , puis qu'au moins deux le soient. d) Calculer $E(X)$.
11. Mode d'une loi binomiale. X suit $B(n, p)$ avec $0 < p < 1$. Pour $0 \leq k \leq n - 1$, on pose $r(k) = P(X = k + 1)/P(X = k)$.
- a) Montrer que $r(k) = [(n - k)/(k + 1)] \times [p/(1 - p)]$. b) Montrer que $r(k) \geq 1$ si et seulement si $k \leq (n + 1)p - 1$. c) En déduire la valeur la plus probable de X lorsque X suit $B(10 ; 0,3)$.
12. Un traitement standard est efficace chez 60 % des patients. Un nouveau traitement est testé sur 50 patients : 38 répondent favorablement. On fait l'hypothèse que le nouveau traitement a la même efficacité que le standard, et l'on note X le nombre de répondants, de loi $B(50 ; 0,6)$. On donne : $P(X \leq 22) \approx 0,0160$; $P(X \leq 23) \approx 0,0314$; $P(X \leq 36) \approx 0,9720$; $P(X \leq 37) \approx 0,9867$.
- a) Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %. b) Que peut-on conclure ? Préciser le risque d'erreur.
13. Une variable X suit une loi binomiale d'espérance 12 et de variance 4,8.
- a) Déterminer les paramètres n et p . b) Calculer $\sigma(X)$ à 10^{-2} près. c) À la calculatrice, calculer $P(X = 12)$ à 10^{-4} près. Est-il vrai que la valeur moyenne est obtenue « une fois sur deux » ?

Corrigés

1. a) Chaque tirage est une épreuve à deux issues (rouge ou non) de succès « rouge », de probabilité $5/8$; les tirages avec remise sont identiques et indépendants ; X compte les succès. **X suit $B(4 ; 5/8)$.**
- b) Sans remise, la composition de l'urne change : la probabilité de tirer rouge dépend des tirages précédents, les épreuves ne sont pas indépendantes. **X ne suit pas une loi binomiale.** c) X ne compte pas des succès et prend des valeurs de 10 à 60. **X ne suit pas une loi binomiale.** d) La population est très grande : on assimile le choix des 200 personnes à des tirages avec remise, identiques et indépendants, de succès « gaucher » de probabilité $0,3$. **X suit (approximativement) $B(200 ; 0,3)$.**
2. $P(X = 2) = C(6, 2) \times 0,4^2 \times 0,6^4 = 15 \times 0,16 \times 0,1296 = 0,31104$.
- $P(X = 0) = 0,6^6 = 0,046656$. $P(X \geq 1) = 1 - 0,046656 = 0,953344$. $E(X) = 6 \times 0,4 = 2,4$; $V(X) = 6 \times 0,4 \times 0,6 = 1,44$; $\sigma(X) = \sqrt{1,44} = 1,2$.
3. X , nombre de piles, suit $B(8 ; 0,5)$, et $P(X = k) = C(8, k)/2^8 = C(8, k)/256$.
- $P(X = 4) = C(8, 4)/256 = 70/256 = 35/128 \approx 0,2734$. $P(X \geq 7) = (C(8, 7) + C(8, 8))/256 = (8 + 1)/256 = 9/256 \approx 0,0352$.
4. $E(X) = 200 \times 0,15 = 30$; $V(X) = 200 \times 0,15 \times 0,85 = 25,5$; $\sigma(X) = \sqrt{25,5} \approx 5,05$. Interprétation : en répétant un grand nombre de fois l'expérience, on obtient en moyenne 30 succès sur 200 épreuves.

5. a) $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

b) $1/4 - (p - 1/2)^2 = 1/4 - (p^2 - p + 1/4) = -p^2 + p = p(1 - p) = V(X)$. Un carré étant positif ou nul, $V(X) \leq 1/4$, avec égalité si et seulement si $p - 1/2 = 0$. La variance est maximale, égale à $1/4$, pour $p = 1/2$.

6. a) Chaque graine est une épreuve de Bernoulli de succès « germer », de probabilité 0,85. Les 20 graines germent indépendamment les unes des autres, avec la même probabilité. X compte les succès : X suit $B(20 ; 0,85)$.

b) $P(X = 20) = 0,85^{20} \approx 0,0388$. c) $P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) \approx 0,4049$; $P(X \leq 15) \approx 0,1702$. d) $E(X) = 20 \times 0,85 = 17$: sur un grand nombre de semis de 20 graines, il germe en moyenne 17 graines par semis.

7. a) Le nombre X de cibles atteintes en n tirs suit $B(n ; 0,1)$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^n$.

b) On résout $1 - 0,9^n \geq 0,999$, soit $0,9^n \leq 0,001$. Par croissance de $\ln$: $n \ln(0,9) \leq \ln(0,001)$. Comme $\ln(0,9) < 0$: $n \geq \ln(0,001)/\ln(0,9) \approx (-6,9078)/(-0,1054) \approx 65,6$. Le plus petit entier est $n = 66$. Contrôle : $0,9^{65} \approx 0,00106 > 0,001$ et $0,9^{66} \approx 0,00096 \leq 0,001$.

8. a) $P(X \leq 12) \approx 0,0221 \leq 0,025$ et $P(X \leq 13) \approx 0,0421 > 0,025$, donc $a = 13$. $P(X \leq 27) \approx 0,9705 < 0,975$ et $P(X \leq 28) \approx 0,9834 \geq 0,975$, donc $b = 28$. L'intervalle de fluctuation de la fréquence est $[13/80 ; 28/80] = [0,1625 ; 0,35]$.

b) La fréquence observée est $30/80 = 0,375$, qui n'appartient pas à l'intervalle. On rejette l'affirmation du semencier au seuil de 95 %, avec un risque d'erreur d'au plus 5 % : la proportion de graines qui ne germent pas semble supérieure à 25 %.

9. a) Quatre lancers identiques et indépendants, succès « obtenir 6 » de probabilité $1/6$: X suit $B(4 ; 1/6)$. Le joueur reçoit $5X$ euros et a misé 4 euros : $G = 5X - 4$.

b) $E(X) = 4/6 = 2/3$. Par linéarité, $E(G) = 5 \times 2/3 - 4 = 10/3 - 12/3 = -2/3 \approx -0,67$ €. L'espérance est négative : le jeu est défavorable au joueur. c) $G > 0$ équivaut à $5X > 4$, soit $X \geq 1$: $P(G > 0) = 1 - (5/6)^4 = 1 - 625/1296 = 671/1296 \approx 0,5177$. $G \geq 6$ équivaut à $5X \geq 10$, soit $X \geq 2$: $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. $P(X = 1) = 4 \times (1/6) \times (5/6)^3 = 500/1296$. Donc $P(G \geq 6) = 1 - 625/1296 - 500/1296 = 171/1296 \approx 0,1319$.

10. a) Quatre enfants, épreuves identiques et indépendantes de succès « enfant aa » de probabilité $1/4$: X suit $B(4 ; 1/4)$.

b) $P(X = 1) = C(4, 1) \times (1/4) \times (3/4)^3 = 4 \times 1/4 \times 27/64 = 27/64 \approx 0,4219$. c) $P(X \geq 1) = 1 - (3/4)^4 = 1 - 81/256 = 175/256 \approx 0,6836$. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 81/256 - 108/256 = 67/256 \approx 0,2617$ (on a écrit $27/64 = 108/256$). d) $E(X) = 4 \times 1/4 = 1$ enfant aa en moyenne par fratrie de 4.

11. a) $r(k) = [C(n, k+1)p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}] / [C(n, k)p^k(1-p)^{n-k}]$. Or $C(n, k+1)/C(n, k) = [n!/((k+1)!(n-k-1)!)] \times [k!(n-k)!/n!] = (n-k)/(k+1)$. Les puissances se simplifient en $p/(1-p)$. Donc $r(k) = [(n-k)/(k+1)] \times [p/(1-p)]$.

b) Tous les termes sont strictement positifs. $r(k) \geq 1$ équivaut à $(n-k)p \geq (k+1)(1-p)$, soit $np - kp \geq k + 1 - kp - p$, soit $np + p - 1 \geq k$. **$r(k) \geq 1$ si et seulement si $k \leq (n+1)p - 1$.** c) Pour $n = 10$ et $p = 0,3$: $(n+1)p - 1 = 3,3 - 1 = 2,3$. Pour $k = 0, 1, 2$, on a $r(k) > 1$: $P(X = 0) < P(X = 1) < P(X = 2) < P(X = 3)$. Pour $k \geq 3$, $r(k) < 1$: $P(X = 3) > P(X = 4) > \dots$ La valeur la plus probable est $k = 3$, avec $P(X = 3) \approx 0,2668$ (contre 0,2335 pour $k = 2$ et 0,2001 pour $k = 4$).

12. a) $a = 23$, car $P(X \leq 22) \approx 0,0160 \leq 0,025$ et $P(X \leq 23) \approx 0,0314 > 0,025$. $b = 37$, car $P(X \leq 36) \approx 0,9720 < 0,975$ et $P(X \leq 37) \approx 0,9867 \geq 0,975$. Intervalle de fluctuation de la fréquence : $[23/50 ; 37/50] = [0,46 ; 0,74]$.

b) La fréquence observée est $38/50 = 0,76$, hors de l'intervalle. **On rejette l'hypothèse** « même efficacité que le traitement standard », au seuil de 95 %, avec un risque d'erreur d'au plus 5 %. L'observation est en faveur d'une efficacité supérieure à 60 %, ce qu'il faudrait confirmer par un essai plus large.

13. a) $E(X) = np = 12$ et $V(X) = np(1-p) = 4,8$. En divisant : $1-p = 4,8/12 = 0,4$, donc **$p = 0,6$** , puis $n = 12/0,6 = 20$.

b) $\sigma(X) = \sqrt{4,8} \approx 2,19$. c) $P(X = 12) = C(20, 12) \times 0,6^{12} \times 0,4^8 \approx 0,1797$. **Non** : la valeur moyenne 12 n'est obtenue que dans moins d'un cas sur cinq. L'espérance est une moyenne sur un grand nombre d'expériences, pas une valeur obtenue avec une forte probabilité.

Sommes de variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

COURS • M19 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	2
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Définir l'indépendance de deux variables aléatoires et déterminer la loi d'une somme $X + Y$ dans des cas simples.
- Utiliser la linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$, sans hypothèse d'indépendance.
- Utiliser $V(aX) = a^2V(X)$ et, pour des variables indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- Retrouver l'espérance et la variance d'une loi binomiale en l'écrivant comme somme de variables de Bernoulli.
- Définir un échantillon de taille n d'une loi de probabilité et calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la somme S_n et de la moyenne M_n .
- Énoncer, démontrer et appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Appliquer l'inégalité de concentration pour majorer la probabilité d'un écart entre moyenne d'échantillon et espérance.
- Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour qu'un écart donné ait une probabilité inférieure à un seuil.
- Énoncer et interpréter la loi faible des grands nombres.

Cours

1. Rappels et notations

Une **variable aléatoire** X sur un univers fini associe un nombre réel à chaque issue. Sa **loi** est la donnée des valeurs $x_1, \dots, x_n$ qu'elle prend et des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, de somme 1.

- **Espérance** : $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$. C'est la moyenne des valeurs pondérée par leurs probabilités, notée souvent μ .
- **Variance** : $V(X) = E((X - \mu)^2)$ = somme des $p_i (x_i - \mu)^2$. Elle mesure la dispersion de X autour de μ et vérifie la formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, exprimé dans la même unité que X .

Rappel de Première : pour tous réels a et b , $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Ajouter une constante décale les valeurs sans changer leur dispersion ; multiplier par a multiplie les écarts par $|a|$, donc la variance par a^2 .

2. Somme de deux variables aléatoires et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers. La variable $X + Y$ associe à chaque issue la somme des valeurs prises par X et par Y .

Pour connaître la loi de $X + Y$, il faut en général connaître la **loi du couple** $(X ; Y)$, c'est-à-dire les probabilités $P(X = x \text{ et } Y = y)$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si, pour toutes valeurs x et y :

$$P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Intuitivement, connaître la valeur de X ne renseigne pas sur celle de Y . C'est le cas pour les résultats de deux épreuves indépendantes (deux lancers de dé, deux tirages avec remise).

Loi de $X + Y$. Pour une valeur s , $P(X + Y = s)$ est la somme des $P(X = x \text{ et } Y = y)$ pour tous les couples tels que $x + y = s$. Avec deux dés équilibrés X et Y indépendants, chacun des 36 couples a la probabilité $1/36$, et :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X + Y = s)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

La somme n'est pas uniforme : 7 est six fois plus probable que 2, car six couples donnent 7 et un seul donne 2.

3. Linéarité de l'espérance

Théorème. Pour toutes variables aléatoires X et Y sur le même univers et tout réel a :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) ; E(aX) = aE(X).$$

Ce résultat est vrai **sans hypothèse d'indépendance**.

Justification. On note $p_{xy} = P(X = x \text{ et } Y = y)$. Alors $E(X + Y)$ est la somme des $(x + y)p_{xy}$ sur tous les couples. On sépare en deux sommes. Dans la première, la somme des $x p_{xy}$, on regroupe les termes de même x : la somme des p_{xy} pour y variable vaut $P(X = x)$ (principe des probabilités totales), donc cette première somme vaut $E(X)$. De même, la seconde vaut $E(Y)$.

Par récurrence, pour n variables : $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$.

Exemple : avec deux dés, $E(X) = (1 + 2 + \dots + 6)/6 = 21/6 = 3,5$, donc $E(X + Y) = 7$, sans avoir à utiliser la loi de la somme.

Cette propriété est très puissante : elle permet de calculer l'espérance d'une variable compliquée en la décomposant en une somme de variables simples.

4. Variance d'une somme de variables indépendantes

Théorème. Si X et Y sont indépendantes :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Pour n variables $X_1, \dots, X_n$ indépendantes (mutuellement) : $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$.

Justification. Par König-Huygens et linéarité : $V(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X) + E(Y))^2 = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$, soit $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$. Lorsque X et Y sont indépendantes, $E(XY)$ est la somme des $xy P(X = x)P(Y = y)$, qui se factorise en $E(X) \times E(Y)$. Le crochet est nul.

Conséquences.

- Pour X et Y indépendantes : $V(X - Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y)$. Les variances s'additionnent même pour une différence : les incertitudes se cumulent.
- Pour X et Y indépendantes et a, b réels : $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$.
- Les écarts types ne s'additionnent pas : $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$, qui est inférieur ou égal à $\sigma(X) + \sigma(Y)$.

Attention à l'hypothèse. Sans indépendance, le théorème est faux. Exemple : $V(X + X) = V(2X) = 4V(X)$, et non $2V(X)$. Deux copies indépendantes X_1 et X_2 de même loi donnent $V(X_1 + X_2) = 2V(X)$: additionner des résultats indépendants « disperse moins » que doubler un seul résultat.

5. Application : la loi binomiale

Soit X de loi $B(n, p)$, nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. On note X_i la variable valant 1 si la i -ème épreuve est un succès, 0 sinon. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($E(X_i) = p$, $V(X_i) = p(1 - p)$), les X_i sont indépendantes, et :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Par linéarité, $E(X) = np$. Par indépendance, $V(X) = np(1 - p)$. On justifie ainsi les formules admises au chapitre sur la loi binomiale, sans aucun calcul de somme de coefficients binomiaux.

Décomposer pour calculer

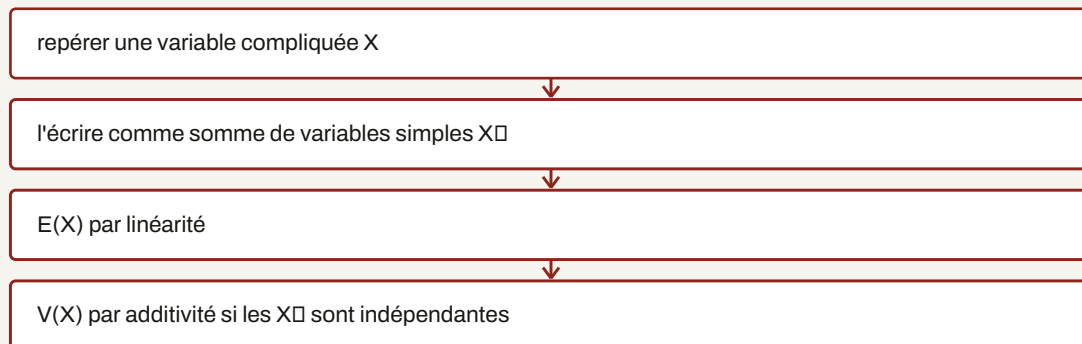


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

6. Échantillon, somme et moyenne

Définition. Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ de n variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes **cette même loi**. Il modélise n répétitions indépendantes d'une même expérience (n lancers, n mesures, n individus tirés avec remise).

On note μ l'espérance et V la variance de cette loi ($\sigma = \sqrt{V}$). On définit :

- la **somme** $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$;
- la **moyenne** $M_n = S_n/n = (X_1 + \dots + X_n)/n$.

Propriétés.

Variable	Espérance	Variance	Écart type
S_n	$n\mu$	nV	$\sigma\sqrt{n}$
M_n	μ	V/n	$\sigma/\sqrt{n}$

Justification : $E(S_n) = \mu + \dots + \mu = n\mu$ par linéarité ; $V(S_n) = V + \dots + V = nV$ par indépendance. Puis $E(M_n) = E(S_n)/n = \mu$ et $V(M_n) = V(S_n)/n^2 = nV/n^2 = V/n$.

Interprétation. La moyenne d'un échantillon a la même espérance que chaque observation : elle est « centrée » sur μ . Mais son écart type $\sigma/\sqrt{n}$ est **divisé par $\sqrt{n}$** : plus l'échantillon est grand, plus la moyenne se resserre autour de μ . C'est la raison pour laquelle on répète une mesure et on en fait la moyenne. Pour diviser l'écart type par 10, il faut 100 fois plus d'observations.

Cas particulier : si les X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p , M_n est la **fréquence** de succès, d'espérance p et de variance $p(1 - p)/n$.

7. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème (inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V . Pour tout réel δ strictement positif :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V/\delta^2.$$

Démonstration (variable prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$). Par définition, V est la somme des $p_i(x_i - \mu)^2$, qui sont tous positifs ou nuls. En ne gardant que les indices i tels que $|x_i - \mu| \geq \delta$, on obtient une somme plus petite : $V \geq \text{somme, pour } |x_i - \mu| \geq \delta, \text{ des } p_i(x_i - \mu)^2$. Pour ces indices, $(x_i - \mu)^2 \geq \delta^2$, donc : $V \geq \delta^2 \times (\text{somme des } p_i \text{ pour } |x_i - \mu| \geq \delta) = \delta^2 \times P(|X - \mu| \geq \delta)$. On divise par $\delta^2 > 0$ et l'on obtient l'inégalité.

Forme équivalente (par passage au contraire) : $P(|X - \mu| < \delta) \geq 1 - V/\delta^2$.

Avec l'écart type. En prenant $\delta = k\sigma$ ($k > 0$) : $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$. Ainsi, pour **toute** variable aléatoire :

- la probabilité de s'écarter de μ d'au moins 2σ est au plus $1/4$;
- celle de s'écarter d'au moins 3σ est au plus $1/9 \approx 0,11$.

Portée et limites. L'inégalité est universelle : elle ne demande que l'espérance et la variance, pas la loi. En contrepartie, elle est souvent **grossière** : la majoration peut être très supérieure à la vraie probabilité (voir l'exemple 2), et elle n'apporte rien si $\delta \leq \sigma$, car alors $V/\delta^2 \geq 1$.

Rappel : $|X - \mu| \geq \delta$ signifie $X \leq \mu - \delta$ ou $X \geq \mu + \delta$, et $|X - \mu| < \delta$ signifie $\mu - \delta < X < \mu + \delta$.

8. Inégalité de concentration

Théorème (inégalité de concentration). Soit M_n la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi d'espérance μ et de variance V . Pour tout réel δ strictement positif :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2).$$

Démonstration : on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n , d'espérance μ et de variance V/n .

Usage type : taille d'échantillon. Pour que $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \alpha$, il suffit que $V/(n\delta^2) \leq \alpha$, c'est-à-dire : $n \geq V/(\alpha\delta^2)$.

Ce n est suffisant, pas forcément nécessaire : comme l'inégalité est grossière, une taille plus petite convient souvent en réalité.

Pour une **fréquence** (loi de Bernoulli de paramètre p inconnu), on utilise la majoration $p(1 - p) \leq 1/4$, valable pour tout p de $[0 ; 1]$: $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq 1/(4n\delta^2)$.

9. Loi faible des grands nombres

Théorème (loi faible des grands nombres). Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi d'espérance μ , et M_n sa moyenne. Pour tout réel δ strictement positif :

la limite de $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ quand n tend vers $+\infty$ est égale à 0.

Démonstration : par l'inégalité de concentration, $0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2)$, et $V/(n\delta^2)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes conclut.

Interprétation. Quelle que soit la précision δ choisie, la probabilité que la moyenne de l'échantillon s'écarte de μ d'au moins δ devient aussi petite que l'on veut quand la taille de l'échantillon augmente. En particulier, la **fréquence** d'un événement dans n répétitions indépendantes se rapproche de sa **probabilité** : c'est ce qui justifie l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée, et la simulation (méthode de Monte-Carlo).



Ce que dit et ne dit pas la loi des grands nombres

elle concerne la moyenne de n observations indépendantes

l'écart à μ devient improbable quand n augmente

elle ne prédit aucun résultat individuel

les tirages passés ne compensent pas les suivants

Repères complémentaires, sans séquence causale

Contresens à éviter. La loi des grands nombres ne dit pas que le hasard « compense » : après 10 piles consécutifs avec une pièce équilibrée, le lancer suivant donne toujours face avec probabilité $1/2$. La fréquence se rapproche de $1/2$ parce que les 10 piles initiaux pèsent de moins en moins dans une moyenne sur un nombre croissant de lancers, non parce que des faces viendraient « rattraper ».

Exemples résolus

Exemple 1 : somme et différence de deux dés

On lance deux dés équilibrés, de résultats X et Y (indépendants). a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. b) En déduire l'espérance et la variance de $S = X + Y$ et de $D = X - Y$. c) Vérifier $E(S)$ à l'aide de la loi de S .

Résolution. a) $E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 3,5$. $E(X^2) = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 = 91/6$. Par König-Huygens : $V(X) = 91/6 - 3,5^2 = 91/6 - 49/4 = 182/12 - 147/12 = 35/12 \approx 2,92$. b) Par linéarité : $E(S) = 3,5 + 3,5 = 7$ et $E(D) = 3,5 - 3,5 = 0$. X et Y sont indépendantes, donc $V(S) = 35/12 + 35/12 = 35/6 \approx 5,83$ et $V(D) = V(X) + V(Y) = 35/6$ également (les variances s'additionnent aussi pour une différence). c) Avec le tableau du cours : $E(S) = (2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1)/36 = (2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12)/36 = 252/36 = 7$. Le résultat est le même, mais la linéarité l'obtient sans calcul de loi.

Exemple 2 : Bienaymé-Tchebychev face au calcul exact

X suit la loi $B(100 ; 0,5)$, nombre de piles en 100 lancers d'une pièce équilibrée. a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(|X - 50| \geq 10)$. c) La calculatrice donne $P(X \leq 40) + P(X \geq 60) \approx 0,0569$. Commenter. d) En déduire un minorant de $P(40 < X < 60)$.

Résolution. a) $E(X) = 100 \times 0,5 = 50$; $V(X) = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25$ ($\sigma = 5$). b) Avec $\delta = 10$: $P(|X - 50| \geq 10) \leq 25/10^2 = 0,25$. c) L'événement $|X - 50| \geq 10$ est $X \leq 40$ ou $X \geq 60$, de probabilité exacte $\approx 0,0569$. La majoration 0,25 est **vraie mais environ quatre fois trop large** : l'inégalité, qui n'utilise que la variance, est grossière. d) Par passage au contraire : $P(|X - 50| < 10) \geq 1 - 0,25 = 0,75$, c'est-à-dire $P(40 < X < 60) \geq 0,75$ (la vraie valeur est environ 0,943).

Exemple 3 : taille d'un sondage

On veut estimer la proportion p inconnue d'électeurs favorables à un projet en interrogeant n personnes au hasard (tirages assimilés à des tirages avec remise). On note F_n la fréquence de réponses favorables. a) Donner $E(F_n)$ et majorer $V(F_n)$ indépendamment de p . b) Déterminer une taille n suffisante pour que $P(|F_n - p| \geq 0,05) \leq 0,05$.

Résolution. a) F_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p : $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = p(1 - p)/n$. Comme $p(1 - p) = 1/4 - (p - 1/2)^2 \leq 1/4$, on a $V(F_n) \leq 1/(4n)$. b) Par l'inégalité de concentration : $P(|F_n - p| \geq 0,05) \leq V(F_n)/0,05^2 \leq 1/(4n \times 0,0025) = 1/(0,01n) = 100/n$. Il suffit que $100/n \leq 0,05$, soit $n \geq 100/0,05 = 2\,000$ personnes. C'est une taille suffisante ; une méthode plus fine (approximation normale) montre qu'environ 400 personnes suffisent déjà, ce qui illustre à nouveau le caractère grossier de l'inégalité.

Méthodes et pièges

- Pour une espérance, décompose la variable en somme de variables simples et applique la linéarité : aucune indépendance n'est nécessaire.
- Pour une variance de somme, vérifie et écris l'indépendance avant d'additionner les variances.
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$ pour des variables indépendantes : jamais de soustraction de variances.
- Ne confonds pas $2X$ (une seule observation doublée, variance $4V$) et $X_1 + X_2$ (deux observations indépendantes, variance $2V$).
- Additionne des variances, jamais des écarts types : $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$ et non $n\sigma$.
- Pour appliquer Bienaymé-Tchebychev, écris l'événement sous la forme $|X - \mu| \geq \delta$, en vérifiant que l'intervalle est centré sur μ .
- Pour une taille d'échantillon, résous $V/(n\delta^2) \leq \alpha$; si p est inconnu, majore $p(1 - p)$ par $1/4$. Le n trouvé est suffisant, pas minimal.
- Une majoration supérieure ou égale à 1 n'apprend rien : c'est le signe que δ est trop petit devant σ .
- La loi des grands nombres porte sur la moyenne d'un grand nombre d'observations, jamais sur le résultat suivant.

Vers le PASS

En PASS et en LAS, ce chapitre fonde l'échantillonnage et l'estimation. La moyenne d'un échantillon de patients estime la moyenne de la population, avec une précision mesurée par l'écart type $\sigma/\sqrt{n}$, que l'on appelle **erreur standard** (ou écart type de la moyenne). L'additivité des variances sert à propager les incertitudes de mesure et à comparer deux moyennes (variance de la différence de deux moyennes indépendantes). Les intervalles de confiance et les calculs du nombre de sujets nécessaires dans un essai reposent sur la même logique que l'inégalité de concentration, avec des approximations plus fines par la loi normale. La loi des grands nombres justifie enfin la lecture d'une probabilité comme fréquence à long terme, notion constante en épidémiologie.

Suite en PASS : Échantillonnage et estimation par intervalle

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes avec $E(X) = 3$, $V(X) = 2$, $E(Y) = -1$ et $V(Y) = 5$. Calculer $E(2X - 3Y + 1)$, $V(2X - 3Y + 1)$ et l'écart type correspondant.
2. On considère un échantillon de taille 25 d'une loi d'espérance 10 et d'écart type 3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la somme S_{25} , puis de la moyenne M_{25} .
3. Une variable X a pour espérance 20 et pour variance 4.
- a) Minorer $P(16 < X < 24)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. b) Majorer $P(|X - 20| \geq 10)$.
4. X suit la loi $B(40 ; 0,3)$. En écrivant X comme une somme de variables de Bernoulli, retrouver $E(X)$ et $V(X)$.
5. Une variable X a pour variance 3. On note X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi que X . Calculer $V(2X)$ et $V(X_1 + X_2)$, puis expliquer la différence.

Niveau 2 : type bac

6. À chaque partie d'un jeu, le gain G d'un joueur vaut 2 € avec la probabilité 0,3 et -1 € avec la probabilité 0,7. Les parties sont indépendantes.
- a) Calculer $E(G)$ et $V(G)$. b) Le joueur joue 100 parties. On note S son gain total. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$. c) Le joueur joue 10 000 parties. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que la probabilité que son gain total soit positif ou nul est inférieure à 0,02.
7. On interroge n personnes au hasard pour estimer la proportion p de personnes qui pratiquent un sport. On note F_n la fréquence observée.
- a) Donner $E(F_n)$ et montrer que $V(F_n) \leq 1/(4n)$. b) Pour $n = 1\,000$, majorer $P(|F_n - p| \geq 0,05)$. c) Déterminer une taille n suffisante pour que $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq 0,05$.
8. X suit la loi uniforme sur $\{0 ; 1 ; 2\}$ et Y la loi de Bernoulli de paramètre 0,5, X et Y étant indépendantes. On pose $S = X + Y$.
- a) Déterminer la loi de S . b) Calculer $E(S)$ de deux façons. c) Calculer $V(X)$, $V(Y)$, puis $V(S)$ de deux façons.
9. Une balance de précision commet sur chaque pesée une erreur aléatoire d'espérance nulle et d'écart type 0,4 mg, les erreurs des pesées successives étant indépendantes. On pèse n fois le même objet de masse m et l'on note M_n la moyenne des résultats.
- a) Exprimer $E(M_n)$ et $\sigma(M_n)$ en fonction de m et n . b) Combien de pesées faut-il au minimum pour que $\sigma(M_n) \leq 0,1$ mg ? c) Déterminer une valeur de n suffisante pour que $P(|M_n - m| \geq 0,2) \leq 0,05$.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Démonstration par l'inégalité de Markov.
- a) Soit Y une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et a un réel strictement positif. Démontrer que $P(Y \geq a) \leq E(Y)/a$ (inégalité de Markov). b) En appliquant ce résultat à $Y = (X - \mu)^2$ et $a = \delta^2$, retrouver l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
11. Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$ et $Y = 1 - X$.

a) Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X + Y)$. b) A-t-on $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$? Expliquer pourquoi, en étudiant l'indépendance de X et Y .

12. La masse de principe actif d'un comprimé est une variable aléatoire d'espérance 500 mg et d'écart type 10 mg. Une boîte contient 30 comprimés, dont les masses sont indépendantes. On note S la masse totale de principe actif d'une boîte et M la masse moyenne par comprimé.

a) Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$ (arrondi au dixième). b) Majorer la probabilité que S s'écarte de son espérance d'au moins 200 mg. c) Calculer $\sigma(M)$ à 10^{-2} près. Comparer à l'écart type d'un comprimé.

13. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

a) Si X et Y sont indépendantes, $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$. b) L'égalité $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ exige que X et Y soient indépendantes. c) Après 10 piles consécutifs avec une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir face au lancer suivant est supérieure à $1/2$. d) Pour un échantillon de taille n d'une loi d'écart type σ , l'écart type de la moyenne vaut $\sigma/\sqrt{n}$. e) Pour toute variable X d'espérance μ et d'écart type $\sigma > 0$, $P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 0,75$.

14. Méthode de Monte-Carlo. On choisit au hasard un point dans le carré $[0 ; 1] \times [0 ; 1]$; la probabilité qu'il tombe dans le quart de disque de centre O et de rayon 1 vaut $p = \pi/4$. On répète n fois l'expérience de façon indépendante et l'on note F_n la fréquence des points tombés dans le quart de disque.

a) Quelle est la loi de nF_n ? Donner $E(F_n)$ et $V(F_n)$. b) Déterminer une valeur de n suffisante pour que $P(|F_n - \pi/4| \geq 0,01) \leq 0,1$, en utilisant la majoration $p(1 - p) \leq 1/4$. c) Pourquoi $4F_n$ fournit-il une estimation de π ? Quelle précision sur π l'écart de 0,01 sur F_n représente-t-il ?

Corrigés

1. Par linéarité : $E(2X - 3Y + 1) = 2E(X) - 3E(Y) + 1 = 6 + 3 + 1 = 10$.

X et Y étant indépendantes, $2X$ et $-3Y$ le sont aussi, et la constante ne modifie pas la variance : $V(2X - 3Y + 1) = 2^2V(X) + (-3)^2V(Y) = 4 \times 2 + 9 \times 5 = 8 + 45 = 53$. Écart type : $\sqrt{53} \approx 7,28$.

2. Avec $\mu = 10$, $V = 3^2 = 9$ et $n = 25$:

$E(S_{25}) = 25 \times 10 = 250$; $V(S_{25}) = 25 \times 9 = 225$; $\sigma(S_{25}) = \sqrt{225} = 15$. $E(M_{25}) = 10$; $V(M_{25}) = 9/25 = 0,36$; $\sigma(M_{25}) = 3/\sqrt{25} = 0,6$.

3. a) $16 < X < 24$ équivaut à $|X - 20| < 4$. Par Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 4$: $P(|X - 20| \geq 4) \leq 4/16 = 0,25$, donc $P(16 < X < 24) \geq 0,75$.

b) Avec $\delta = 10$: $P(|X - 20| \geq 10) \leq 4/100 = 0,04$.

4. $X = X_1 + \dots + X_{40}$, où X_i vaut 1 si la i -ème épreuve est un succès, 0 sinon ; les X_i sont indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre 0,3, avec $E(X_i) = 0,3$ et $V(X_i) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$. Par linéarité : $E(X) = 40 \times 0,3 = 12$. Par indépendance : $V(X) = 40 \times 0,21 = 8,4$.

5. $V(2X) = 2^2V(X) = 12$. X_1 et X_2 étant indépendantes : $V(X_1 + X_2) = 3 + 3 = 6$. Explication : $2X$ double un seul résultat, donc double chaque écart à la moyenne et quadruple la variance ; $X_1 + X_2$ additionne deux résultats indépendants dont les écarts se compensent en partie (l'un peut être au-dessus de la moyenne, l'autre en dessous), d'où une variance seulement doublée.

6. a) $E(G) = 2 \times 0,3 + (-1) \times 0,7 = 0,6 - 0,7 = -0,1$ €. $E(G^2) = 4 \times 0,3 + 1 \times 0,7 = 1,9$, donc $V(G) = 1,9 - (-0,1)^2 = 1,9 - 0,01 = 1,89$.

b) S est la somme de 100 copies indépendantes de G : $E(S) = 100 \times (-0,1) = -10 \text{ €}$; $V(S) = 100 \times 1,89 = 189$; $\sigma(S) = \sqrt{189} \approx 13,75 \text{ €}$. c) Pour 10 000 parties : $E(S) = -1\,000$ et $V(S) = 18\,900$. Si $S \geq 0$, alors $S - (-1\,000) \geq 1\,000$, donc $|S + 1\,000| \geq 1\,000$. Ainsi $P(S \geq 0) \leq P(|S + 1\,000| \geq 1\,000) \leq 18\,900/1\,000^2 = 18\,900/1\,000\,000 = 0,0189$. Donc $P(S \geq 0) \leq 0,0189 < 0,02$. Sur un grand nombre de parties, le joueur est presque sûr de perdre.

7. a) nF_n , nombre de personnes sportives, suit $B(n, p)$; F_n est la moyenne d'un échantillon de la loi de Bernoulli de paramètre p . Donc $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = p(1 - p)/n$. Or $p(1 - p) = 1/4 - (p - 1/2)^2 \leq 1/4$, d'où $V(F_n) \leq 1/(4n)$.

b) $P(|F_{1000} - p| \geq 0,05) \leq V(F_{1000})/0,05^2 \leq (1/4\,000)/0,0025 = 1/10 = 0,1$. c) $P(|F_n - p| \geq 0,02) \leq 1/(4n \times 0,0004) = 1/(0,0016n)$. Il suffit que $1/(0,0016n) \leq 0,05$, soit $n \geq 1/(0,0016 \times 0,05) = 1/0,00008 = 12\,500$ personnes.

8. a) $P(X = x) = 1/3$ pour $x \in \{0 ; 1 ; 2\}$, $P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2$; par indépendance, chacun des 6 couples a la probabilité $1/6$.

$S = 0$: $(0 ; 0)$, probabilité $1/6$. $S = 1$: $(1 ; 0)$ ou $(0 ; 1)$, probabilité $2/6 = 1/3$. $S = 2$: $(2 ; 0)$ ou $(1 ; 1)$, probabilité $1/3$. $S = 3$: $(2 ; 1)$, probabilité $1/6$. **Loi de S** : $P(S = 0) = 1/6$, $P(S = 1) = 1/3$, $P(S = 2) = 1/3$, $P(S = 3) = 1/6$. b) Avec la loi : $E(S) = 0 \times 1/6 + 1 \times 1/3 + 2 \times 1/3 + 3 \times 1/6 = 1/3 + 2/3 + 1/2 = 1,5$. Par linéarité : $E(X) = 1$ et $E(Y) = 0,5$, donc $E(S) = 1,5$. c) $E(X^2) = (0 + 1 + 4)/3 = 5/3$, donc $V(X) = 5/3 - 1 = 2/3$; $V(Y) = 0,5 \times 0,5 = 1/4$. Par indépendance : $V(S) = 2/3 + 1/4 = 8/12 + 3/12 = 11/12$. Avec la loi : $E(S^2) = 1 \times 1/3 + 4 \times 1/3 + 9 \times 1/6 = 5/3 + 3/2 = 19/6$, et $V(S) = 19/6 - 1,5^2 = 38/12 - 27/12 = 11/12$. Les deux méthodes concordent.

9. a) Chaque résultat de pesée s'écrit $m + \varepsilon$, où l'erreur ε a pour espérance 0 et écart type 0,4 mg. Les résultats forment un échantillon d'espérance m et d'écart type 0,4. Donc $E(M_n) = m$ et $\sigma(M_n) = 0,4/\sqrt{n}$.

b) $0,4/\sqrt{n} \leq 0,1$ équivaut à $\sqrt{n} \geq 4$, soit $n \geq 16$: il faut au moins 16 pesées. c) $V(M_n) = 0,16/n$. Par l'inégalité de concentration : $P(|M_n - m| \geq 0,2) \leq (0,16/n)/0,04 = 4/n$. Il suffit que $4/n \leq 0,05$, soit $n \geq 80$ pesées.

10. a) Notons $y_1, \dots, y_p$ les valeurs (positives ou nulles) de Y , de probabilités $q_1, \dots, q_p$. $E(Y)$ est la somme des $q_i y_i$, tous positifs ou nuls ; en ne gardant que les indices tels que $y_i \geq a$, on obtient $E(Y) \geq$ somme des $q_i y_i$ pour $y_i \geq a \geq a \times$ (somme des q_i pour $y_i \geq a$) $= a \times P(Y \geq a)$. En divisant par $a > 0$: $P(Y \geq a) \leq E(Y)/a$.

b) $Y = (X - \mu)^2$ est positive, d'espérance $E((X - \mu)^2) = V(X)$. Avec $a = \delta^2 > 0$: $P((X - \mu)^2 \geq \delta^2) \leq V(X)/\delta^2$. Or, δ étant positif, $(X - \mu)^2 \geq \delta^2$ équivaut à $|X - \mu| \geq \delta$. On obtient $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$.

11. a) $V(X) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. $Y = 1 - X$ donne $V(Y) = (-1)^2 V(X) = 1/4$. Enfin $X + Y = 1$ est constante, donc $V(X + Y) = 0$.

b) **Non** : $V(X) + V(Y) = 1/2 \neq 0$. La formule exige l'indépendance, or X et Y ne sont pas indépendantes : $P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = 0$, alors que $P(X = 1) \times P(Y = 1) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. Connaître X détermine entièrement Y .

12. a) $E(S) = 30 \times 500 = 15\,000 \text{ mg}$; $V(S) = 30 \times 10^2 = 3\,000 \text{ mg}^2$; $\sigma(S) = \sqrt{3\,000} \approx 54,8 \text{ mg}$.

b) Par Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 200$: $P(|S - 15\,000| \geq 200) \leq 3\,000/200^2 = 3\,000/40\,000 = 0,075$. c) $\sigma(M) = 10/\sqrt{30} \approx 1,83 \text{ mg}$, soit environ 5,5 fois moins que l'écart type d'un comprimé (10 mg) : la moyenne sur 30 comprimés est bien plus stable qu'un comprimé isolé.

13. a) **Faux** : pour X et Y indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y)$.

b) **Faux** : la linéarité de l'espérance est vraie pour toutes variables, indépendantes ou non. c) **Faux** : les lancers sont indépendants, la probabilité d'obtenir face reste $1/2$. La loi des grands nombres ne prévoit aucune compensation. d) **Vrai** : $V(M_n) = \sigma^2/n$ par indépendance, donc $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$. e) **Vrai** : par Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma$, $P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \sigma^2/(4\sigma^2) = 1/4$, donc $P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 3/4 = 0,75$.

14. a) Les n expériences sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « le point est dans le quart de disque », de probabilité $p = \pi/4$: nF_n suit $B(n ; \pi/4)$. Donc $E(F_n) = \pi/4$ et $V(F_n) = (\pi/4)(1 - \pi/4)/n$.

b) Comme $p(1 - p) \leq 1/4$, $V(F_n) \leq 1/(4n)$. Par l'inégalité de concentration : $P(|F_n - \pi/4| \geq 0,01) \leq 1/(4n \times 0,0001) = 1/(0,0004n)$. Il suffit que $1/(0,0004n) \leq 0,1$, soit $n \geq 1/0,00004 = 25\,000$ points. c) Par la loi des grands nombres, F_n se rapproche de $\pi/4$ quand n augmente, donc $4F_n$ se rapproche de π . Un écart de 0,01 sur F_n correspond à un écart de $4 \times 0,01 = 0,04$ sur l'estimation de π . Avec 25 000 points, l'estimation de π est donc à moins de 0,04 de π avec une probabilité d'au moins 0,9.

Vecteurs, droites et plans de l'espace

COURS • M20 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	2
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace et les simplifier avec la relation de Chasles.
- Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires et en déduire un alignement de points ou un parallélisme de droites.
- Démontrer que trois vecteurs sont coplanaires, ou que quatre points sont coplanaires, par une décomposition vectorielle.
- Reconnaître une base de l'espace et décomposer un vecteur dans cette base.
- Choisir un repère adapté à une figure (cube, pavé, tétraèdre) et calculer les coordonnées de points, de vecteurs et de milieux.
- Écrire une représentation paramétrique d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur, ou de deux points.
- Tester l'appartenance d'un point à une droite ou à un plan défini par un point et deux vecteurs.
- Déterminer la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans, et calculer leur intersection éventuelle.
- Utiliser les théorèmes d'incidence (théorème du toit, parallélisme d'une droite et d'un plan, de deux plans).

Cours

1. Vecteurs de l'espace

La notion de vecteur vue dans le plan s'étend sans changement à l'espace. À tout couple de points (A, B) on associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, caractérisé par une direction (celle de la droite (AB)), un sens (de A vers B) et une longueur (la distance AB). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la **translation** qui envoie A sur B. Deux couples (A, B) et (C, D) définissent le même vecteur si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur $\overrightarrow{AA}$ pour n'importe quel point A.

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Cette propriété permet de « placer » un vecteur à partir de n'importe quel point.

Les opérations sont les mêmes que dans le plan :

- **Somme** : $\vec{u} + \vec{v}$ se construit en mettant les vecteurs bout à bout. La **relation de Chasles** s'écrit, pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- **Produit par un réel** : pour k réel, $k \cdot \vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$, le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et une longueur multipliée par $|k|$.
- **Opposé** : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Les règles de calcul habituelles s'appliquent : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$, $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$, $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Une **combinaison linéaire** de vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est un vecteur de la forme $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$ avec a, b, c réels.

Un point clé : le **milieu** I de [AB] est caractérisé par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ou encore $\overrightarrow{AI} = (1/2)\overrightarrow{AB}$. Pour tout point M, on a alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Cette égalité, obtenue en écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, est souvent la clé des démonstrations dans les solides.

2. Colinéarité, droites de l'espace

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ ou $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Conséquences directes :

- Trois points A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Une **droite** de l'espace est déterminée par un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$, appelé **vecteur directeur**. On note $d(A ; \vec{u})$ la droite formée des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$, t décrivant $\mathbb{R}$. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la même droite : une droite a une infinité de vecteurs directeurs.

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Attention : dans l'espace, deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles (voir la partie 6).

3. Plans de l'espace et coplanarité

Caractérisation vectorielle d'un plan. Soient A un point et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. L'ensemble des points M tels que

$\vec{AM} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$, avec s et t réels,

est un **plan**, noté $P(A ; \vec{u}, \vec{v})$. On dit que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ **dirige** le plan, ou que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan. Un plan contenant trois points non alignés A, B, C est dirigé par $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$: c'est le plan (ABC) .

Pourquoi faut-il deux vecteurs non colinéaires ? Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étaient colinéaires, les points M obtenus resteraient sur une droite. Deux directions indépendantes « ouvrent » une surface plane.

Vecteurs coplanaires. Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** si, en les plaçant à partir d'un même point O ($\vec{OA} = \vec{u}, \vec{OB} = \vec{v}, \vec{OC} = \vec{w}$), les points O, A, B, C sont dans un même plan.

Propriété : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$.

Justification : si $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, alors $\vec{OC} = a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB}$, donc C appartient au plan $P(O ; \vec{u}, \vec{v})$, qui contient aussi O, A, B . Réciproquement, si les quatre points sont dans ce plan, la caractérisation vectorielle donne l'écriture de $\vec{OC}$.

Une formulation équivalente, symétrique : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a, b, c **non tous nuls** tels que $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = \vec{0}$.

Points coplanaires. Quatre points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ sont coplanaires. Lorsque A, B, C ne sont pas alignés, cela revient à trouver a et b tels que $\vec{AD} = a \cdot \vec{AB} + b \cdot \vec{AC}$.

Direction d'un plan. Deux plans dirigés par des couples de vecteurs qui engendrent les mêmes combinaisons linéaires ont la même direction : ils sont parallèles. Concrètement, deux plans $P(A ; \vec{u}, \vec{v})$ et $P'(A' ; \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont tous deux combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4. Bases et repères de l'espace

Une **base** de l'espace est un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**.

Théorème : si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un **unique** triplet de réels (x, y, z) tel que $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Démonstration de l'unicité : si $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}$, alors $(x - x') \cdot \vec{i} + (y - y') \cdot \vec{j} + (z - z') \cdot \vec{k} = \vec{0}$. Si l'un des coefficients, par exemple $z - z'$, était non nul, on pourrait écrire $\vec{k}$ comme combinaison de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et les trois vecteurs seraient coplanaires, ce qui est exclu. Donc $x = x', y = y', z = z'$.

Existence (idée) : on place $\vec{u} = \vec{OM}$. La droite passant par M et dirigée par $\vec{k}$ coupe le plan $P(O ; \vec{i}, \vec{j})$ en un point M' (elle ne lui est pas parallèle puisque $\vec{k}$ n'est pas dans la direction de ce plan). Alors $\vec{OM'} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ et $\vec{M'M} = z \cdot \vec{k}$.

Les réels (x, y, z) sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base. On écrit $\vec{u}(x ; y ; z)$.

Un **repère** de l'espace est un quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé d'un point O , l'origine, et d'une base. Les **coordonnées d'un point** M sont celles du vecteur $\vec{OM}$. La première est l'**abscisse**, la deuxième l'**ordonnée**, la troisième la **cote**.

Le repère est **orthonormé** lorsque $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. Seul ce cas permet de calculer des longueurs avec la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. Dans un

repère quelconque (par exemple $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ dans un pavé non cubique), cette formule est fausse.

Formules en coordonnées (valables dans tout repère) : pour $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$,

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$;
- le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $((x_A + x_B)/2 ; (y_A + y_B)/2 ; (z_A + z_B)/2)$;
- si $u \rightarrow (x ; y ; z)$ et $v \rightarrow (x' ; y' ; z')$, alors $u \rightarrow + v \rightarrow (x + x' ; y + y' ; z + z')$ et $k \cdot u \rightarrow (kx ; ky ; kz)$.

Colinéarité en coordonnées. $u \rightarrow (x ; y ; z)$ et $v \rightarrow (x' ; y' ; z')$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles. En pratique, on cherche k avec une coordonnée non nulle, puis on vérifie les deux autres. Une autre façon : les trois « produits en croix » $xy' - x'y$, $xz' - x'z$, $yz' - y'z$ sont tous nuls. Contrairement au plan, une seule égalité ne suffit pas.

Choisir un repère dans un cube. Pour le cube ABCDEFGH (face ABCD en bas, E au-dessus de A, F au-dessus de B, etc.), le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ donne : $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$. Pour un cube, ce repère est orthonormé si l'on prend l'arête comme unité.

Repères à choisir selon la figure

Cube : $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, orthonormé

Pavé droit : même repère, non orthonormé si les arêtes diffèrent

Tétraèdre ABCD : $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, toujours une base

Figure sans sommet commode : origine au centre d'une face

Repères complémentaires, sans séquence causale

5. Représentations paramétriques d'une droite

Dans un repère, soit d la droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $u \rightarrow (a ; b ; c)$, non nul. Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à d si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot u \rightarrow$, c'est-à-dire : $x = x_A + t \cdot a$, $y = y_A + t \cdot b$, $z = z_A + t \cdot c$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Ce système est une **représentation paramétrique** de d ; t est le **paramètre**. À chaque valeur de t correspond un point de d , et à chaque point de d une unique valeur de t .

Remarques importantes :

- Une droite possède une **infinité** de représentations paramétriques : on peut changer de point de départ et de vecteur directeur. Deux systèmes d'apparence différente peuvent décrire la même droite.
- On lit directement un point (prendre $t = 0$) et un vecteur directeur (les coefficients de t).
- Le **segment** $[AB]$ correspond à $t \in [0 ; 1]$ dans la représentation de point A et de vecteur $\overrightarrow{AB}$; la **demi-droite** $[AB[$ à $t \geq 0$.

Tester l'appartenance d'un point. Pour savoir si $C(x_C ; y_C ; z_C)$ est sur d , on résout l'une des équations pour trouver t (si son coefficient est non nul), puis on vérifie les deux autres avec cette valeur. Si une seule équation échoue, le point n'est pas sur la droite.

Représentation paramétrique d'un plan. De la même façon, le plan $P(A ; u \rightarrow, v \rightarrow)$ avec $u \rightarrow(a ; b ; c)$ et $v \rightarrow(a' ; b' ; c')$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $x = x_A + s \cdot a + t \cdot a'$, $y = y_A + s \cdot b + t \cdot b'$, $z = z_A + s \cdot c + t \cdot c'$, avec s et t réels. Il y a deux paramètres, car un plan a deux directions indépendantes. Cette écriture sert surtout à tester l'appartenance d'un point ou à calculer une intersection ; l'équation cartésienne d'un plan, plus maniable, sera vue avec le produit scalaire.

6. Positions relatives de droites et de plans

Deux droites. Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires**, soit **non coplanaires**.

- Coplanaires : elles sont **parallèles** (strictement parallèles ou confondues) ou **sécantes** en un point.
- Non coplanaires : elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

Deux droites d et d'

Vecteurs directeurs colinéaires : parallèles (confondues si un point commun, sinon strictement parallèles)

Non colinéaires : on résout le système, une solution donne des droites sécantes, aucune solution des droites non coplanaires

Repères complémentaires, sans séquence causale

En pratique, pour $d : M = A + t \cdot u \rightarrow$ et $d' : M = B + s \cdot v \rightarrow$, on écrit l'égalité des coordonnées avec **deux paramètres distincts** t et s , puis on résout le système de trois équations à deux inconnues : on tire t et s de deux équations, puis on teste la troisième.

Une droite et un plan. Une droite d et un plan P sont :

- **sécants** en un point unique ;
- **parallèles** : soit d est **incluse** dans P , soit d et P n'ont aucun point commun (strictement parallèles).

Propriété : une droite d est parallèle à un plan P si et seulement si un vecteur directeur de d est combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de P . De façon géométrique : si d est parallèle à une droite contenue dans P , alors d est parallèle à P .

Deux plans. Deux plans distincts sont soit **parallèles** (aucun point commun), soit **sécants** selon une droite. Deux plans ne peuvent pas avoir un seul point commun.

Propriété : si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites d'un plan P' , alors P et P' sont parallèles.

Propriété : si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les deux droites d'intersection sont parallèles.

Théorème du toit : si $d_1 \subset P_1$ et $d_2 \subset P_2$ sont deux droites parallèles, et si P_1 et P_2 sont sécants selon une droite Δ , alors Δ est parallèle à d_1 et à d_2 .

Justification du théorème du toit : soit $\vec{u}$ un vecteur directeur commun à d_1 et d_2 . Il est un vecteur de la direction de P_1 et de celle de P_2 . Si Δ n'était pas dirigée par $\vec{u}$, la direction de P_1 serait engendrée par $\vec{u}$ et un vecteur directeur $\vec{w}$ de Δ , et de même pour P_2 : les deux plans auraient la même direction tout en contenant Δ , ils seraient confondus, ce qui contredit le fait qu'ils sont sécants selon une droite.

Le théorème du toit est l'outil principal pour construire la **section d'un solide par un plan** : quand le plan de coupe rencontre deux faces parallèles d'un cube, il les coupe selon deux segments parallèles.

Méthode générale par le calcul. Toutes ces positions se décident avec des systèmes : on égale les coordonnées des points génériques (avec des paramètres distincts) et on étudie le nombre de solutions. Aucune solution : objets disjoints. Une solution unique : un point commun. Une infinité : inclusion ou intersection selon une droite.

Exemples résolus

Exemple 1 : une relation vectorielle dans un tétraèdre

Énoncé. ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB] et J celui de [CD]. Montrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$. En déduire que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont coplanaires.

Résolution.

On décompose $\vec{IJ}$ de deux façons avec la relation de Chasles, en passant par des chemins qui utilisent $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$:

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ} \quad \vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$$

En additionnant membre à membre :

$$2\vec{IJ} = (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{AD} + \vec{BC} + (\vec{DJ} + \vec{CJ}).$$

Comme I est le milieu de [AB], $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. Comme J est le milieu de [CD], $\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$, donc $\vec{DJ} + \vec{CJ} = -(\vec{JD} + \vec{JC}) = \vec{0}$.

Il reste $2\vec{IJ} = \vec{AD} + \vec{BC}$, soit $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{BC}$.

Conclusion : $\vec{IJ}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (sinon (AD) et (BC) seraient parallèles et A, B, C, D seraient coplanaires, ce qui est exclu pour un tétraèdre). D'après la caractérisation, $\vec{IJ}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ sont coplanaires.

Exemple 2 : quatre points sont-ils coplanaires ?

Énoncé. Dans un repère de l'espace, on donne A(1 ; 2 ; -1), B(3 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ; 2), D(2 ; -1 ; 3) et E(0 ; 1 ; 1).

a) Montrer que A, B, C ne sont pas alignés. b) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? c) Même question pour A, B, C, E.

Résolution.

a) $\vec{AB} = (3 - 1 ; 1 - 2 ; 0 - (-1)) = (2 ; -1 ; 1)$ et $\vec{AC} = (0 - 1 ; 0 - 2 ; 2 - (-1)) = (-1 ; -2 ; 3)$. S'ils étaient colinéaires, on aurait $\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$; la première coordonnée impose $k = -1/2$, et la deuxième donnerait $-2 = (-1/2)(-1) = 1/2$, ce qui est faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC).

b) $\vec{AD} = (1 ; -3 ; 4)$. On cherche a et b tels que $\vec{AD} = a \cdot \vec{AB} + b \cdot \vec{AC}$:

$$2a - b = 1 \quad -a - 2b = -3 \quad a + 3b = 4$$

La première équation donne $b = 2a - 1$. En remplaçant dans la deuxième : $-a - 2(2a - 1) = -3$, soit $-5a + 2 = -3$, donc $a = 1$ et $b = 1$. Vérification dans la troisième : $1 + 3 \times 1 = 4$. Elle est satisfaite. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et **A, B, C, D sont coplanaires** (ABDC est même un parallélogramme).

c) $\overrightarrow{AE}(-1; -1; 2)$. On résout $2a - b = -1$, $-a - 2b = -1$. La première donne $b = 2a + 1$, puis $-a - 4a - 2 = -1$, soit $a = -1/5$ et $b = 3/5$. Troisième équation : $a + 3b = -1/5 + 9/5 = 8/5$, alors qu'il faudrait 2. Le système n'a pas de solution : **A, B, C, E ne sont pas coplanaires**.

Exemple 3 : position de deux droites, intersection d'une droite et d'un plan

Énoncé. On considère les droites $d : x = 1 + 2t, y = t, z = 2 - t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $d' : x = s, y = 3 - s, z = 1 + s$ ($s \in \mathbb{R}$). Soit P le plan passant par $O(0; 0; 0)$ et dirigé par $\overrightarrow{w_1}(1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{w_2}(0; 1; 1)$. a) Étudier la position relative de d et d'. b) Déterminer l'intersection de d et de P.

Résolution.

a) Vecteurs directeurs : $\overrightarrow{u}(2; 1; -1)$ pour d et $\overrightarrow{v}(1; -1; 1)$ pour d'. Le rapport des premières coordonnées vaut 2, celui des deuxièmes vaut -1 : ils ne sont pas proportionnels, donc d et d' **ne sont pas parallèles**. On cherche un point commun, avec deux paramètres distincts :

$$1 + 2t = s \quad t = 3 - s \quad 2 - t = 1 + s$$

On remplace $s = 1 + 2t$ dans la deuxième : $t = 3 - 1 - 2t$, donc $3t = 2$, $t = 2/3$ et $s = 1 + 4/3 = 7/3$. Troisième équation : $2 - 2/3 = 4/3$ d'un côté, $1 + 7/3 = 10/3$ de l'autre. Contradiction. Les droites n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles : **d et d' sont non coplanaires**.

b) Un point de P s'écrit $\overrightarrow{OM} = a \cdot \overrightarrow{w_1} + b \cdot \overrightarrow{w_2}$, soit $M(a; b; a + b)$. Un point de d appartient à P si et seulement s'il existe a, b tels que :

$$1 + 2t = a \quad t = b \quad 2 - t = a + b$$

En remplaçant : $2 - t = 1 + 2t + t$, donc $1 = 4t$ et $t = 1/4$. Le point d'intersection a pour coordonnées $x = 1 + 1/2 = 3/2$, $y = 1/4$, $z = 2 - 1/4 = 7/4$. Vérification : $a = 3/2$, $b = 1/4$, $a + b = 7/4$. **d et P sont sécants au point K(3/2; 1/4; 7/4)**.

Méthodes et pièges

- Pour démontrer une égalité vectorielle dans un solide, pars du vecteur cherché et décompose-le avec Chasles en passant par les points qui interviennent dans le résultat ; fais apparaître des sommes du type $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ qui s'annulent.
- Pour prouver une colinéarité en coordonnées, trouve k sur une coordonnée non nulle puis vérifie les deux autres : une seule vérification ne suffit jamais dans l'espace.
- Pour la coplanarité de quatre points, vérifie d'abord que trois d'entre eux ne sont pas alignés, puis cherche a et b sur deux équations et teste la troisième.
- Quand tu cherches l'intersection de deux droites données par des représentations paramétriques, utilise deux paramètres différents (t et s). Garder la même lettre revient à imposer le même « instant » et fait conclure à tort qu'il n'y a pas d'intersection.
- Deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles : dans l'espace elles peuvent être non coplanaires. Vérifie toujours la colinéarité des vecteurs directeurs.
- Deux représentations paramétriques différentes peuvent décrire la même droite : compare les vecteurs directeurs puis teste un point avant de conclure.

- La formule de distance $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ n'est valable que dans un repère orthonormé.
- Trois vecteurs deux à deux non colinéaires ne forment pas forcément une base : $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ sont coplanaires.
- Pour construire une section de solide, utilise le théorème du toit et le fait qu'un plan coupe deux faces parallèles selon des segments parallèles.

Vers le PASS

En PASS, les vecteurs de l'espace sont l'outil de base de la biophysique et de la mécanique : décomposition d'une force sur des axes, description de la position d'un point dans un repère, géométrie des molécules (positions des atomes, axes de symétrie). Les représentations paramétriques réapparaissent dans la description de trajectoires rectilignes, et la recherche d'intersections se ramène presque toujours à la résolution d'un système linéaire de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Savoir reconnaître rapidement qu'un système n'a pas de solution, en a une seule ou une infinité, et interpréter ce résultat géométriquement, fait gagner un temps précieux sur les QCM de calcul.

Suite en PASS : Systèmes linéaires et calcul numérique

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. A, B, C, D sont quatre points de l'espace. Simplifie les vecteurs $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BD}$ et $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA}$.
2. Dans un repère, on donne $\vec{u}(2; -4; 6)$, $\vec{v}(-1; 2; -3)$ et $\vec{w}(3; -6; 8)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Et $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
3. On donne A(1 ; 2 ; 3) et B(3 ; 5 ; 4).
a) Écris une représentation paramétrique de la droite (AB). b) Les points C(7 ; 11 ; 6) et D(5 ; 8 ; 6) appartiennent-ils à (AB) ?
4. On donne A(2 ; -1 ; 4), B(0 ; 3 ; -2) et D(1 ; 0 ; 0).
a) Calcule les coordonnées du milieu I de [AB] et du vecteur $\vec{AB}$. b) Détermine les coordonnées du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
5. ABCDEFGH est un cube (ABCD est la face du bas, E, F, G, H sont respectivement au-dessus de A, B, C, D). Donne, sans calcul et en justifiant, la position relative de :
a) les droites (AB) et (GH) ; b) les droites (AB) et (CG) ; c) la droite (AE) et le plan (BCG) ; d) les plans (ABC) et (EFG) ; e) les plans (ABF) et (BCG).

Niveau 2 : type bac

6. ABCD est un tétraèdre. I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [AC] et [AD].
a) Exprime $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{BC}$. b) Exprime $\vec{IK}$ en fonction de $\vec{BD}$. c) Démontre que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.
7. Dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et D(1 ; 1 ; 1).
a) Démontre que A, B, C ne sont pas alignés. b) Le point D appartient-il au plan (ABC) ? c) Détermine les coordonnées du point d'intersection de la droite (OD) et du plan (ABC).

8. On considère les droites $d : x = 2 + t, y = 1 - t, z = 3 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $d' : x = 2 + s, y = 2 - 2s, z = 4 + s$ ($s \in \mathbb{R}$).
- a) Montre que d et d' ne sont pas parallèles. b) Démontre qu'elles sont sécantes et donne leur point d'intersection. c) Soit d'' la droite passant par $E(5 ; 0 ; 1)$ de vecteur directeur $\vec{w}(-2 ; 2 ; -4)$. Quelle est la position relative de d et d'' ?
9. On note P le plan passant par $A(1 ; 1 ; 0)$ et dirigé par $\vec{u}(1 ; 0 ; 1)$ et $\vec{v}(0 ; 1 ; 2)$. On considère la droite $\Delta : x = t, y = 2t, z = 1 + t$ ($t \in \mathbb{R}$).
- a) Démontre que Δ et P sont sécants et calcule les coordonnées de leur point commun. b) Soit Δ' la droite passant par $O(0 ; 0 ; 0)$ et dirigée par $\vec{w}(1 ; 1 ; 3)$. Montre que Δ' est strictement parallèle à P .

Niveau 3 : vers le PASS

10. Dans un repère, on donne $\vec{v}(0 ; 1 ; 1)$, $\vec{w}(2 ; 1 ; 1)$ et, pour un réel m , $\vec{u}(1 ; 2 ; m)$. Détermine la valeur de m pour laquelle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires. Pour les autres valeurs, que forment-ils ?
11. Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse (démonstration ou contre-exemple).
- a) Deux droites de l'espace sans point commun sont parallèles. b) Trois vecteurs deux à deux non colinéaires forment une base de l'espace. c) Si une droite d est parallèle à deux plans sécants P_1 et P_2 , alors d est parallèle à leur droite d'intersection. d) Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.
12. Pour tout réel m , on note d_m la droite passant par $A(1 ; 0 ; 0)$ et dirigée par $\vec{u}(1 ; m ; 1)$, et d la droite $x = s, y = 1 + s, z = 2s$ ($s \in \mathbb{R}$). Discute, selon m , la position relative de d_m et d .
13. ABCD est un tétraèdre. On note G le point tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ et I le point tel que $\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$ (centre de gravité du triangle BCD).
- a) Démontre que $\vec{AG} = (1/4)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. b) Démontre que $\vec{AI} = (1/3)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. c) En déduire que A, G, I sont alignés et préciser la position de G sur $[AI]$.

Corrigés

1. Pour $\vec{u} : \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$ (Chasles). Donc $\vec{u} = \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CD}$.
Pour $\vec{v} : \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$.
2. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v} : \vec{v} = k \cdot \vec{u}$ si la première coordonnée donne $k = -1/2$ si $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$. Vérification : $(-1/2) \times (-4) = 2$ et $(-1/2) \times 6 = -3$. Les trois coordonnées concordent, donc $\vec{v} = (-1/2)\vec{u} : \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Pour $\vec{u}$ et $\vec{w} : \vec{w} = k \cdot \vec{u}$ si la première coordonnée donne $k = 3/2$, la deuxième $(3/2) \times (-4) = -6$ convient, mais la troisième donne $(3/2) \times 6 = 9 \neq 8$. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
3. a) $\vec{AB}(3 - 1 ; 5 - 2 ; 4 - 3) = (2 ; 3 ; 1)$, non nul. Une représentation paramétrique de (AB) est $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + t, t \in \mathbb{R}$.
- b) Pour $C : 1 + 2t = 7$ donne $t = 3$; alors $y = 2 + 9 = 11$ et $z = 3 + 3 = 6$, ce qui correspond à C . $C \in (AB)$.
Pour $D : 1 + 2t = 5$ donne $t = 2$; $y = 2 + 6 = 8$ convient, mais $z = 3 + 2 = 5 \neq 6$. $D \notin (AB)$.
4. a) $I((2 + 0)/2 ; (-1 + 3)/2 ; (4 - 2)/2)$, donc $I(1 ; 1 ; 1)$. $\vec{AB}(0 - 2 ; 3 - (-1) ; -2 - 4)$, donc $\vec{AB}(-2 ; 4 ; -6)$.
- b) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$. En notant $C(x ; y ; z) : x - 1 = -2, y - 0 = 4, z - 0 = -6$. Donc $C(-1 ; 4 ; -6)$.

5. a) $ABGH$ est un rectangle ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$), donc (AB) et (GH) sont **parallèles** (strictement, car distinctes).
- b) (AB) est dans le plan de la face du bas ; (CG) coupe ce plan uniquement en C , qui n'est pas sur (AB) . Elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles ($\overrightarrow{AB}$ horizontal, $\overrightarrow{CG}$ vertical) : **non coplanaires**. c) (AE) est parallèle à (BF) , qui est contenue dans le plan (BCG) . Donc (AE) est parallèle au plan (BCG) ; comme A n'appartient pas à ce plan, (AE) est **strictement parallèle** à (BCG) . d) Ce sont les plans de deux faces opposées du cube : **parallèles** (strictement). Par exemple $(AB) \parallel (EF)$ et $(AD) \parallel (EH)$, deux droites sécantes de (ABC) parallèles à deux droites de (EFG) . e) Ces plans contiennent tous les deux B et F et sont distincts : **ils sont sécants selon la droite (BF)** .
6. a) I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = (1/2)\overrightarrow{BA} + (1/2)\overrightarrow{AC} = (1/2)(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = (1/2)\overrightarrow{BC}$.
- b) De même, $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = (1/2)\overrightarrow{BA} + (1/2)\overrightarrow{AD} = (1/2)\overrightarrow{BD}$. c) D'après a) et b), la droite (IJ) est parallèle à (BC) et la droite (IK) est parallèle à (BD) . Les droites (IJ) et (IK) sont sécantes en I et contenues dans le plan (IJK) ; (BC) et (BD) sont contenues dans (BCD) . Deux droites sécantes de (IJK) sont parallèles à deux droites de (BCD) : **les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles**.
7. a) $\overrightarrow{AB}(-1 ; 2 ; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1 ; 0 ; 3)$. Si $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, la première coordonnée impose $k = 1$, mais alors la deuxième donnerait $0 = 2$: impossible. **A, B, C ne sont pas alignés**.
- b) $\overrightarrow{AD}(0 ; 1 ; 1)$. On cherche a, b tels que $\overrightarrow{AD} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}$: $-a - b = 0 ; 2a = 1 ; 3b = 1$. Les deux dernières donnent $a = 1/2, b = 1/3$, et alors $-a - b = -5/6 \neq 0$. Pas de solution : **D n'appartient pas au plan (ABC)** . c) La droite (OD) est l'ensemble des points $M(k ; k ; k)$, k réel. Un point du plan (ABC) s'écrit $A + a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC} = (1 - a - b ; 2a ; 3b)$. On veut $1 - a - b = k, 2a = k, 3b = k$. Donc $a = k/2, b = k/3$, puis $1 - k/2 - k/3 = k$, soit $1 = k(1 + 1/2 + 1/3) = 11k/6$, d'où $k = 6/11$. Le point d'intersection est **$M(6/11 ; 6/11 ; 6/11)$** .
8. a) Vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1 ; -1 ; 2)$ et $\overrightarrow{v}(1 ; -2 ; 1)$. La première coordonnée imposerait $k = 1$, mais $-2 \neq -1$. Ils ne sont pas colinéaires : **d et d' ne sont pas parallèles**.
- b) On résout $2 + t = 2 + s, 1 - t = 2 - 2s, 3 + 2t = 4 + s$. La première donne $t = s$; la deuxième devient $1 - s = 2 - 2s$, donc $s = 1$ et $t = 1$. Troisième : $3 + 2 = 5$ et $4 + 1 = 5$, vérifiée. **d et d' sont sécantes au point $(3 ; 0 ; 5)$** . c) $\overrightarrow{w}(-2 ; 2 ; -4) = -2 \cdot \overrightarrow{u}$, donc d'' est parallèle à d . Le point $E(5 ; 0 ; 1)$ est-il sur d ? $2 + t = 5$ donne $t = 3$, puis $y = 1 - 3 = -2 \neq 0$. $E \notin d$, donc **d et d'' sont strictement parallèles**.
9. a) Un point de P s'écrit $(1 + a ; 1 + b ; a + 2b)$. Un point de Δ est dans P s'il existe a, b avec $t = 1 + a, 2t = 1 + b, 1 + t = a + 2b$. On obtient $a = t - 1$ et $b = 2t - 1$, puis $a + 2b = t - 1 + 4t - 2 = 5t - 3$. L'équation $5t - 3 = 1 + t$ donne $t = 1$, valeur unique. **Δ et P sont sécants au point $(1 ; 2 ; 2)$** (avec $a = 0, b = 1$: on retrouve bien $(1 ; 2 ; 2)$).
- b) $\overrightarrow{w}(1 ; 1 ; 3) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (1 + 0 ; 0 + 1 ; 1 + 2)$: $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs directeurs de P , donc Δ' est parallèle à P . Pour savoir si Δ' est incluse, on teste $O : (1 + a ; 1 + b ; a + 2b) = (0 ; 0 ; 0)$ impose $a = -1, b = -1$, puis $a + 2b = -3 \neq 0$. $O \notin P$, donc **Δ' est strictement parallèle à P** .
10. $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires (première coordonnée 0 pour $\overrightarrow{v}$, 2 pour $\overrightarrow{w}$, alors que $\overrightarrow{v}$ est non nul). $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe a, b tels que $\overrightarrow{u} = a \cdot \overrightarrow{v} + b \cdot \overrightarrow{w}$:
 $1 = 2b ; 2 = a + b ; m = a + b$. Donc $b = 1/2, a = 3/2$, et $m = a + b = 2$. **Les vecteurs sont coplanaires si et seulement si $m = 2$** . Pour $m \neq 2$, ils ne sont pas coplanaires : **$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace**.
11. a) **Faux**. Dans un cube, (AB) et (CG) n'ont aucun point commun mais ne sont pas parallèles : elles sont non coplanaires.

b) **Faux.** $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ sont deux à deux non colinéaires mais coplanaires (le troisième est combinaison des deux premiers) : ils ne forment pas une base. c) **Vrai.** Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et Δ la droite d'intersection de P_1 et P_2 . Par un point M de Δ , la droite d_1 dirigée par $\vec{u}$ est contenue dans P_1 (car $d \parallel P_1$) et dans P_2 (car $d \parallel P_2$). Elle est donc contenue dans $P_1 \cap P_2 = \Delta$, d'où $d_1 = \Delta$. Ainsi Δ est dirigée par $\vec{u}$ et est parallèle à d . d) **Faux.** Dans le cube, les plans (ABF) et (BCG) contiennent tous les deux la droite (BF) ; ils sont donc tous les deux parallèles à la droite (DH) , qui est parallèle à (BF) et n'est contenue dans aucun des deux. Pourtant ils sont sécants selon (BF) .

12. Vecteurs directeurs $\vec{u} \rightarrow (1 ; m ; 1)$ et $\vec{v} \rightarrow (1 ; 1 ; 2)$. Pour que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, il faudrait $k = 1$ (première coordonnée) et $k = 1/2$ (troisième) : impossible. **Les droites ne sont jamais parallèles**, quel que soit m .

On cherche un point commun : $1 + t = s, m \cdot t = 1 + s, t = 2s$. Les équations 1 et 3 donnent $1 + 2s = s$, donc $s = -1$ et $t = -2$. La deuxième devient $-2m = 1 + (-1) = 0$, donc $m = 0$. Conclusion : si $m = 0$, d_0 et d sont sécantes au point $(-1 ; 0 ; -2)$ (vérification sur d avec $s = -1 : (-1 ; 0 ; -2)$) ; si $m \neq 0$, d_m et d sont non coplanaires.

13. a) On introduit A dans chaque vecteur : $\vec{GA} + (\vec{GA} + \vec{AB}) + (\vec{GA} + \vec{AC}) + (\vec{GA} + \vec{AD}) = \vec{0}$, soit $4\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$. Donc $4\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$ et $\vec{AG} = (1/4)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.

b) De même : $(\vec{IA} + \vec{AB}) + (\vec{IA} + \vec{AC}) + (\vec{IA} + \vec{AD}) = \vec{0}$, soit $3\vec{IA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$, donc $\vec{AI} = (1/3)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. c) D'après a) et b), $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AI}$, donc $\vec{AG} = (3/4)\vec{AI}$. Les vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{AI}$ sont colinéaires : A, G, I sont alignés, et G est sur le segment $[AI]$, aux trois quarts de A vers I ($AG = (3/4)AI$).

Orthogonalité et distances dans l'espace

COURS • M21 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer un produit scalaire dans l'espace par la définition géométrique, par la projection ou par les coordonnées dans un repère orthonormé.
- Calculer une norme, une distance et un angle géométrique à l'aide du produit scalaire.
- Démontrer que deux vecteurs, deux droites, une droite et un plan sont orthogonaux.
- Déterminer un vecteur normal à un plan à partir de deux vecteurs directeurs.
- Écrire une équation cartésienne d'un plan et lire un vecteur normal sur une équation.
- Étudier la position relative de deux plans ou d'une droite et d'un plan à partir des vecteurs normaux et directeurs.
- Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite et sur un plan.
- Calculer la distance d'un point à un plan ou à une droite.
- Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan, de deux plans.

Cours

1. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, placés à partir d'un même point A ($\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$), sont toujours contenus dans un même plan, par exemple le plan (ABC) si A, B, C ne sont pas alignés. On définit leur produit scalaire comme celui calculé dans ce plan :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\text{BAC})$, l'angle étant l'angle géométrique entre les deux vecteurs.

Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire vaut 0. La **norme** de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$; on note aussi $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Comme le produit scalaire dans l'espace est un produit scalaire calculé dans un plan, **toutes les propriétés de Première restent vraies** :

- **symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- **bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- **identités de polarisation** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2)(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = (1/2)(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$;
- **identités remarquables** : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Produit scalaire et projection. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$. Ce produit vaut $AB \times AH$ si H est sur la demi-droite [AB), et $-AB \times AH$ sinon. Cette formule est très utile dans un solide quand une projection est évidente.

Expression en repère orthonormé. Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), les vecteurs de base vérifient $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. Par bilinéarité, si $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ et } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Cette formule n'est valable que dans un repère **orthonormé**.

Calcul d'un angle. Pour deux vecteurs non nuls, $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$, où $\theta \in [0 ; \pi]$ est l'angle géométrique. On en déduit θ à la calculatrice.

2. Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Droites orthogonales. Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Attention : deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes. Si elles sont orthogonales et sécantes, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**. Dans un cube ABCDEFGH, (AB) et (CG) sont orthogonales mais non coplanaires.

Droite orthogonale à un plan. Une droite d est **orthogonale à un plan P** si elle est orthogonale à toutes les droites de P.

Théorème : une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan.

Démonstration : soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs directeurs de deux droites sécantes de P, donc non colinéaires. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, alors pour tout vecteur $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}$ de la direction de P, $\vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}) = a(\vec{u} \cdot \vec{v}) + b(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 0$. Donc d est orthogonale à toute droite de P. La réciproque est immédiate.

Conséquences :

- Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.



Démontrer que (d) est orthogonale à un plan P

Choisir deux droites sécantes de P



Calculer deux produits scalaires avec un vecteur directeur de (d)



Les deux sont nuls : (d) orthogonale à P

Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

3. Vecteur normal à un plan

Un vecteur **normal** à un plan P est un vecteur **non nul** $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale à P. D'après le théorème précédent, $\vec{n}$ est normal au plan $P(A; \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété : soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Un plan est donc caractérisé par un point et un vecteur normal, ce qui est souvent plus commode que deux vecteurs directeurs.

Trouver un vecteur normal. Si P est dirigé par $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$, on cherche $\vec{n}(x; y; z)$ avec $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$. Ce système a une infinité de solutions (deux équations, trois inconnues) : on fixe une valeur commode pour une inconnue, par exemple z, et on calcule les deux autres. On vérifie à la fin les deux produits scalaires.

Positions relatives avec les vecteurs normaux. Soient P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Situation	Condition
P et P' parallèles	$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires
P et P' perpendiculaires	$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$
d orthogonale à P	$\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$
d parallèle à P (ou incluse)	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
d et P sécants	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

4. Équation cartésienne d'un plan

Théorème : dans un repère orthonormé, un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Réciproquement, si a, b, c ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points M(x; y; z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration du sens direct : soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point du plan. $M(x ; y ; z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, soit $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Réciproque : si, par exemple, $a \neq 0$, le point $A(-d/a ; 0 ; 0)$ vérifie l'équation, et l'équation équivaut à $a(x + d/a) + by + cz = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$: c'est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarques :

- Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes, toutes proportionnelles : $2x - y + z - 3 = 0$ et $-4x + 2y - 2z + 6 = 0$ décrivent le même plan.
- Les coefficients de x, y, z donnent un vecteur normal **directement**.
- Plans particuliers : $z = 0$ est le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; $x = 2$ est le plan parallèle à $(O ; \vec{j}, \vec{k})$ passant par $(2 ; 0 ; 0)$.
- Pour **tester** l'appartenance d'un point, on remplace ses coordonnées dans l'équation.

Méthode pour l'équation du plan (ABC). On calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on cherche un vecteur normal $\vec{n}$ orthogonal aux deux, on écrit $ax + by + cz + d = 0$ avec les coordonnées de $\vec{n}$, puis on détermine d en écrivant que A vérifie l'équation. On contrôle avec B et C.

5. Projeté orthogonal

Sur une droite. Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite d est l'unique point H de d tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de d (si $M \in d$, $H = M$).

Méthode : on écrit $H(t)$ avec la représentation paramétrique de d, puis on résout $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$, équation du premier degré en t.

Sur un plan. Le projeté orthogonal de M sur un plan P est l'unique point H de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à un vecteur normal $\vec{n}$ de P. C'est le point d'intersection de P et de la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$.

Méthode : on écrit la droite $\Delta : x = x_M + ta, y = y_M + tb, z = z_M + tc$, puis on remplace dans l'équation de P pour trouver t.

Propriété : le projeté orthogonal H de M sur un plan P (ou sur une droite) est le point de P le plus proche de M. Pour tout point N de P distinct de H, $MN > MH$.

Démonstration : pour $N \in P$, le vecteur $\overrightarrow{HN}$ est dans la direction de P, donc orthogonal à $\overrightarrow{MH}$. Le triangle MHN est rectangle en H, et par le théorème de Pythagore $MN^2 = MH^2 + HN^2 > MH^2$ dès que $N \neq H$.

6. Distances

La **distance d'un point M à un plan P** est la distance MH, où H est le projeté orthogonal de M sur P. C'est la plus petite distance entre M et un point de P. De même, la **distance d'un point à une droite** est MH, avec H le projeté orthogonal de M sur la droite.

Formule (à savoir redémontrer). Si P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé, et $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$:

$$\text{distance}(M, P) = |a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Démonstration : $H = M + t \cdot \vec{n} \rightarrow$ avec $\vec{n} \rightarrow (a ; b ; c)$. En remplaçant dans l'équation : $a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) + d = 0$, d'où $t = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)/(a^2 + b^2 + c^2)$. Alors $MH = |t| \times \|\vec{n}\| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / (a^2 + b^2 + c^2) \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ce qui donne la formule. Au bac, on attend souvent le passage par le point H : sache faire les deux.

Distance entre deux plans parallèles. C'est la distance d'un point quelconque de l'un à l'autre.

Application aux volumes. Le volume d'une pyramide (ou d'un tétraèdre) est $V = (1/3) \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$. La hauteur est la distance du sommet au plan de la base, obtenue par projeté orthogonal. On peut aussi, connaissant V par un autre découpage, en déduire une aire ou une distance.

7. Intersections

Droite et plan. Pour $d : x = x_A + ta, y = y_A + tb, z = z_A + tc$ et $P : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, on remplace x, y, z dans l'équation de P. On obtient une équation du premier degré en t :

- une solution unique : d et P sont sécants, on calcule le point ;
- aucune solution (du type $0 = 5$) : d est strictement parallèle à P ;
- toujours vraie ($0 = 0$) : d est incluse dans P.

Deux plans. Si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, les plans sont parallèles : confondus si leurs équations sont proportionnelles, strictement parallèles sinon. Sinon, ils sont sécants selon une droite. Pour la déterminer, on résout le système des deux équations en prenant une inconnue comme paramètre (par exemple $x = t$ ou $y = t$), après avoir éliminé une variable par combinaison. Un vecteur directeur de la droite d'intersection est orthogonal aux deux vecteurs normaux : c'est un contrôle simple.

Deux plans P et P'

Normaux colinéaires : parallèles (confondus ou strictement parallèles)

Normaux non colinéaires : sécants selon une droite, obtenue en résolvant le système avec un paramètre

Repères complémentaires, sans séquence causale

Trois plans. L'intersection de trois plans se ramène à un système de trois équations à trois inconnues. Elle peut être un point, une droite, un plan ou l'ensemble vide.

Exemples résolus

Exemple 1 : angle et orthogonalité dans un cube

Énoncé. ABCDEFGH est un cube d'arête 1 (ABCD face du bas, E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C, H au-dessus de D). On se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. a) Calculer une valeur approchée de l'angle entre $\vec{AG}$ et $\vec{AC}$. b) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

Résolution.

a) Coordonnées : $A(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $G(1 ; 1 ; 1)$. Donc $\overrightarrow{AG} = (1 ; 1 ; 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1 ; 1 ; 0)$. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 2$. $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$. $\cos \theta = 2 / (\sqrt{3} \times \sqrt{2}) = 2/\sqrt{6} = \sqrt{6}/3 \approx 0,816$, d'où $\theta \approx 35,3^\circ$.

b) $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, donc $\overrightarrow{BD} = (-1 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{BE} = (-1 ; 0 ; 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée est nulle pour $\overrightarrow{BE}$ seulement), donc (BD) et (BE) sont deux droites sécantes du plan (BDE). $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$. ($\overrightarrow{AG}$) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDE) : ($\overrightarrow{AG}$) est orthogonale au plan (BDE).

Exemple 2 : équation d'un plan, projeté et distance

Énoncé. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1 ; 2 ; 0)$, $B(2 ; 0 ; 1)$, $C(0 ; 1 ; 3)$ et $M(7 ; 4 ; 4)$. a) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) et une équation cartésienne de ce plan. b) Déterminer le projeté orthogonal H de M sur (ABC) et la distance de M au plan.

Résolution.

a) $\overrightarrow{AB} = (1 ; -2 ; 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1 ; -1 ; 3)$, non colinéaires. On cherche $\vec{n} = (a ; b ; c)$ avec : $a - 2b + c = 0$ - $a - b + 3c = 0$ En additionnant : $-3b + 4c = 0$, donc $b = 4c/3$. On choisit $c = 3$, d'où $b = 4$ et $a = 2b - c = 8 - 3 = 5$. Ainsi $\vec{n} = (5 ; 4 ; 3)$. Contrôle : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 - 8 + 3 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -5 - 4 + 9 = 0$. Une équation est $5x + 4y + 3z + d = 0$. A est dans le plan : $5 + 8 + 0 + d = 0$, donc $d = -13$. Contrôle avec B : $10 + 0 + 3 - 13 = 0$; avec C : $0 + 4 + 9 - 13 = 0$. (ABC) : $5x + 4y + 3z - 13 = 0$.

b) La droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$ a pour représentation $x = 7 + 5t$, $y = 4 + 4t$, $z = 4 + 3t$. On remplace dans l'équation : $5(7 + 5t) + 4(4 + 4t) + 3(4 + 3t) - 13 = 35 + 16 + 12 - 13 + (25 + 16 + 9)t = 50 + 50t = 0$, donc $t = -1$. H a pour coordonnées $(7 - 5 ; 4 - 4 ; 4 - 3) = (2 ; 0 ; 1)$, c'est-à-dire le point B. $\overrightarrow{MH} = -\vec{n}$, donc $MH = \|\vec{n}\| = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$. Contrôle par la formule : $|5 \times 7 + 4 \times 4 + 3 \times 4 - 13| / \sqrt{50} = 50/\sqrt{50} = \sqrt{50}$.

Exemple 3 : intersection de deux plans, projeté sur une droite

Énoncé. On considère les plans $P_1 : x + y - z = 1$ et $P_2 : 2x - y + z = 2$, et le point $M(1 ; 0 ; 4)$. a) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d. b) Déterminer le projeté orthogonal de M sur d et la distance de M à d.

Résolution.

a) $\vec{n}_1 = (1 ; 1 ; -1)$ et $\vec{n}_2 = (2 ; -1 ; 1)$ ne sont pas colinéaires (rapports 2 et -1 sur les deux premières coordonnées) : les plans sont sécants selon une droite. En additionnant les deux équations : $3x = 3$, donc $x = 1$. La première devient alors $y - z = 0$, soit $y = z$. En posant $y = t$: $\vec{d} : x = 1, y = t, z = t, t \in \mathbb{R}$. Contrôle dans P_2 : $2 - t + t = 2$. Un vecteur directeur est $\vec{u} = (0 ; 1 ; 1)$; on vérifie $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 + 1 - 1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0 - 1 + 1 = 0$.

b) Un point H de d s'écrit $H(1 ; t ; t)$, donc $\overrightarrow{MH} = (0 ; t ; t - 4)$. On écrit $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$: $t + (t - 4) = 0$, donc $t = 2$. $H(1 ; 2 ; 2)$, $\overrightarrow{MH} = (0 ; 2 ; -2)$ et $MH = \sqrt{0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Méthodes et pièges

- Avant d'utiliser $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, vérifie que le repère est orthonormé ; dans un pavé non cubique, choisis les arêtes de longueur 1 ou passe par la définition géométrique.
- Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, deux produits scalaires nuls avec deux vecteurs non colinéaires du plan suffisent ; un seul ne suffit pas.

- Pour trouver un vecteur normal, fixe une coordonnée, résous les deux autres, puis vérifie les deux produits scalaires : c'est rapide et évite la plupart des erreurs de signe.
- Après avoir trouvé d dans $ax + by + cz + d = 0$, contrôle l'équation avec les autres points connus du plan.
- Ne confonds pas les rôles : dans une équation de plan, $(a ; b ; c)$ est un vecteur **normal** ; dans une représentation paramétrique de droite, les coefficients de t forment un vecteur **directeur**.
- Une droite parallèle à un plan vérifie $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, pas $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$ (c'est la condition d'orthogonalité).
- Orthogonales ne veut pas dire sécantes : deux droites orthogonales peuvent être non coplanaires.
- Une distance est toujours positive : dans la formule, n'oublie ni la valeur absolue ni la racine carrée au dénominateur.
- Pour l'intersection de deux plans, élimine une variable par combinaison, puis prends une inconnue restante comme paramètre ; vérifie le vecteur directeur obtenu avec les deux vecteurs normaux.

Vers le PASS

En PASS, le produit scalaire est partout : travail d'une force ($W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$), puissance, flux d'un champ à travers une surface, composante d'un vecteur sur un axe obtenue par projection. La notion de vecteur normal intervient pour décrire une surface (une membrane, une interface de réfraction en optique), et la projection orthogonale est l'opération qui permet de décomposer une grandeur vectorielle en une composante utile et une composante perpendiculaire. Les calculs d'angles par $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|)$ servent aussi en chimie pour les angles de liaison.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

Dans tous les exercices, le repère est orthonormé.

1. On donne $\vec{u}(1 ; -2 ; 3)$ et $\vec{v}(4 ; 1 ; -1)$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, puis une valeur approchée au dixième de degré de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Détermine le réel m pour lequel les vecteurs $\vec{u}(2 ; m ; -1)$ et $\vec{v}(m ; 3 ; 4)$ sont orthogonaux.
3. a) Détermine une équation cartésienne du plan P passant par $A(2 ; -1 ; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1 ; 4 ; -2)$.
b) Le point $B(0 ; -2 ; 0)$ appartient-il à P ?
4. On considère le plan $P : 2x - y + 2z - 3 = 0$. Donne un vecteur normal à P , puis deux points de P . Calcule la distance de l'origine O à P .
5. On considère les plans $P : x + y + z = 1$, $Q : 2x + 2y + 2z = 5$ et $R : x - y = 0$. Précise la position relative de P et Q , puis de P et R .

Niveau 2 : type bac

6. On donne $O(0 ; 0 ; 0)$, $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; 1)$.

a) Montre que $\vec{n} \rightarrow (1; 1; 1)$ est normal au plan (ABC) et donne une équation de ce plan. b) Détermine le projeté orthogonal H de O sur (ABC) et la distance OH. c) Calcule le volume du tétraèdre OABC en prenant OAB comme base. d) En déduire l'aire du triangle ABC, et vérifie le résultat sachant que ABC est équilatéral.

7. On considère le plan P : $2x - y + z - 4 = 0$ et la droite d : $x = 1 + t, y = -2 + 3t, z = 2t$ ($t \in \mathbb{R}$).

a) Détermine l'intersection de d et P. b) Soit d' la droite passant par O et dirigée par $\vec{w} \rightarrow (1; 1; -1)$. Montre que d' est strictement parallèle à P. c) La droite d est-elle orthogonale à P ?

8. On considère la droite d passant par A(1 ; 2 ; -1) et dirigée par $\vec{u} \rightarrow (2; 1; 2)$, et le point M(6 ; 3 ; -2).

a) Écris une représentation paramétrique de d. b) Détermine le projeté orthogonal H de M sur d. c) Calcule la distance de M à d.

9. On donne A(1 ; 2 ; 3) et B(3 ; 0 ; 1).

a) Détermine une équation du plan médiateur de [AB] (plan passant par le milieu de [AB] et orthogonal à (AB)). b) Vérifie que M(0 ; 0 ; 1) appartient à ce plan, puis que MA = MB.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Les plans P : $2x - 2y + z - 1 = 0$ et P' : $2x - 2y + z + 8 = 0$ sont-ils parallèles ? Calcule la distance entre ces deux plans.

11. On considère P : $x + 2y - z = 3$ et Q : $x - y + z = 0$.

a) Montre que P et Q sont sécants. b) Détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ. c) Vérifie que le vecteur directeur obtenu est orthogonal aux deux vecteurs normaux. d) P et Q sont-ils perpendiculaires ?

12. Vrai ou faux ? Justifie.

a) Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles. b) Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan. c) Si $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = \vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow$ avec $\vec{u} \rightarrow$ non nul, alors $\vec{v} \rightarrow = \vec{w} \rightarrow$. d) Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

13. On considère la droite d : $x = t, y = 1 + t, z = 2 - t$ ($t \in \mathbb{R}$) et le point M(3 ; 0 ; 1). Pour tout réel t, on note N(t) le point de d de paramètre t.

a) Exprime $f(t) = MN(t)^2$ en fonction de t. b) Détermine le minimum de f et la valeur de t où il est atteint. c) Vérifie que le point obtenu est le projeté orthogonal de M sur d et donne la distance de M à d.

Corrigés

1. $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = 1 \times 4 + (-2) \times 1 + 3 \times (-1) = 4 - 2 - 3 = -1$.

$\|\vec{u} \rightarrow\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ et $\|\vec{v} \rightarrow\| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $\cos \theta = -1 / (\sqrt{14} \times \sqrt{18}) = -1/\sqrt{252} \approx -0,0630$, donc $\theta \approx 93,6^\circ$ (angle légèrement obtus, cohérent avec un produit scalaire négatif).

2. $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = 2m + 3m + (-1) \times 4 = 5m - 4$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $5m - 4 = 0$, soit $m = 4/5$.

3. a) Une équation est $x + 4y - 2z + d = 0$. $A \in P$: $2 - 4 - 6 + d = 0$, donc $d = 8$. P : $x + 4y - 2z + 8 = 0$.

b) Pour B : $0 + 4 \times (-2) - 0 + 8 = 0$. B appartient à P.

4. Un vecteur normal est $\vec{n} \rightarrow (2; -1; 2)$. Points de P : avec $x = 0$ et $z = 0$, $-y - 3 = 0$ donne $(0; -3; 0)$; avec $x = 1, y = 1$: $2 - 1 + 2z - 3 = 0$ donne $z = 1$, d'où $(1; 1; 1)$ (contrôle : $2 - 1 + 2 - 3 = 0$).

Distance de O : $|2 \times 0 - 0 + 2 \times 0 - 3| / \sqrt{4 + 1 + 4} = 3/3 = 1$.

5. Vecteurs normaux : $n_{P \rightarrow}(1; 1; 1)$, $n_{Q \rightarrow}(2; 2; 2)$, $n_{R \rightarrow}(1; -1; 0)$.

$n_{Q \rightarrow} = 2n_{P \rightarrow}$: P et Q sont parallèles. L'équation de Q équivaut à $x + y + z = 5/2$, différente de $x + y + z = 1$: **P et Q sont strictement parallèles**. $n_{P \rightarrow} \cdot n_{R \rightarrow} = 1 - 1 + 0 = 0$: **P et R sont perpendiculaires** (donc sécants).

6. a) $AB \rightarrow(-1; 1; 0)$ et $AC \rightarrow(-1; 0; 1)$, non colinéaires. $n \rightarrow \cdot AB \rightarrow = -1 + 1 = 0$ et $n \rightarrow \cdot AC \rightarrow = -1 + 1 = 0$: $n \rightarrow$ est normal à (ABC). Équation $x + y + z + d = 0$ avec A : $1 + d = 0$, $d = -1$. (ABC) : **$x + y + z - 1 = 0$** .

b) La droite passant par O dirigée par $n \rightarrow$ est $x = y = z = t$. Dans l'équation : $3t - 1 = 0$, $t = 1/3$. **H(1/3; 1/3; 1/3)** et $OH = \sqrt{(3 \times 1/9)} = \sqrt{1/3} = \sqrt{3}/3 \approx 0,577$. c) OAB est un triangle rectangle en O de côtés 1 et 1, d'aire 1/2. La hauteur issue de C est OC = 1 (car (OC) est orthogonale au plan (OAB)). $V = (1/3) \times (1/2) \times 1 = 1/6$. d) Avec la base ABC et la hauteur OH : $V = (1/3) \times \text{aire}(ABC) \times OH$, donc $\text{aire}(ABC) = 3V/OH = (1/2) / (\sqrt{3}/3) = 3/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2$. Vérification : $AB = BC = CA = \sqrt{2}$, et l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $(\sqrt{3}/4)a^2 = (\sqrt{3}/4) \times 2 = \sqrt{3}/2$.

7. a) On remplace : $2(1 + t) - (-2 + 3t) + 2t - 4 = 2 + 2t + 2 - 3t + 2t - 4 = t$. L'équation $t = 0$ donne $t = 0$: **d et P sont sécants au point (1; -2; 0)** (contrôle : $2 + 2 + 0 - 4 = 0$).

b) $n \rightarrow(2; -1; 1)$ et $w \rightarrow \cdot n \rightarrow = 2 - 1 - 1 = 0$: d' est parallèle à P. O vérifie-t-il l'équation ? $0 - 0 + 0 - 4 = -4 \neq 0$. **d' est strictement parallèle à P**. c) Le vecteur directeur de d est (1; 3; 2). Pour être colinéaire à $n \rightarrow(2; -1; 1)$, il faudrait un rapport 1/2 sur la première coordonnée et -3 sur la deuxième : impossible. **d n'est pas orthogonale à P**.

8. a) **d : $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$** .

b) $H(1 + 2t; 2 + t; -1 + 2t)$ et $MH \rightarrow(-5 + 2t; -1 + t; 1 + 2t)$. On écrit $MH \rightarrow \cdot u \rightarrow = 0$: $2(-5 + 2t) + (-1 + t) + 2(1 + 2t) = -10 + 4t - 1 + t + 2 + 4t = 9t - 9 = 0$, donc $t = 1$. **H(3; 3; 1)**. c) $MH \rightarrow(-3; 0; 3)$, donc $MH = \sqrt{9 + 0 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$.

9. a) Milieu I(2; 1; 2). $AB \rightarrow(2; -2; -2)$ est normal au plan, ainsi que $n \rightarrow(1; -1; -1) = (1/2)AB \rightarrow$. Équation $x - y - z + d = 0$ avec I : $2 - 1 - 2 + d = 0$, $d = 1$. **Plan médiateur : $x - y - z + 1 = 0$** .

b) Pour M : $0 - 0 - 1 + 1 = 0$, **M appartient au plan**. $MA^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$ et $MB^2 = 3^2 + 0^2 + 0^2 = 9$, donc **MA = MB = 3**, ce qui est cohérent : le plan médiateur est l'ensemble des points équidistants de A et B.

10. Les deux plans ont le même vecteur normal (2; -2; 1) et des équations non proportionnelles ($-1 \neq 8$) : **ils sont strictement parallèles**.

On prend un point de P, par exemple $K(0; 0; 1)$ (contrôle : $0 - 0 + 1 - 1 = 0$). Distance de K à P' : $|0 - 0 + 1 + 8| / \sqrt{4 + 4 + 1} = 9/3 = 3$.

11. a) $\vec{n}_P \rightarrow (1; 2; -1)$ et $\vec{n}_Q \rightarrow (1; -1; 1)$: le rapport serait 1 sur la première coordonnée et $-1/2$ sur la deuxième. Non colinéaires : **P et Q sont sécants selon une droite.**

b) En additionnant les équations : $2x + y = 3$, donc $y = 3 - 2x$. En posant $x = t$: $y = 3 - 2t$, puis Q donne $z = y - x = 3 - 3t$. Δ : $x = t$, $y = 3 - 2t$, $z = 3 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$. Contrôle dans P : $t + 2(3 - 2t) - (3 - 3t) = t + 6 - 4t - 3 + 3t = 3$. c) $\vec{u} \rightarrow (1; -2; -3)$: $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{n}_P \rightarrow = 1 - 4 + 3 = 0$ et $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{n}_Q \rightarrow = 1 + 2 - 3 = 0$. d) $\vec{n}_P \rightarrow \cdot \vec{n}_Q \rightarrow = 1 - 2 - 1 = -2 \neq 0$: **P et Q ne sont pas perpendiculaires.**

12. a) **Faux.** Dans un cube, (AE) et (AB) sont toutes deux orthogonales à (AD), mais elles sont sécantes en A et non parallèles.

b) **Vrai.** C'est le théorème du cours : si $\vec{u} \rightarrow$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\vec{v} \rightarrow, \vec{w} \rightarrow$ du plan, il est orthogonal à toute combinaison $a \cdot \vec{v} \rightarrow + b \cdot \vec{w} \rightarrow$, donc à toute droite du plan. c) **Faux.** $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = \vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow$ équivaut à $\vec{u} \rightarrow \cdot (\vec{v} \rightarrow - \vec{w} \rightarrow) = 0$, c'est-à-dire $\vec{v} \rightarrow - \vec{w} \rightarrow$ orthogonal à $\vec{u} \rightarrow$, sans être nul. Exemple : $\vec{u} \rightarrow (1; 0; 0)$, $\vec{v} \rightarrow (0; 1; 0)$, $\vec{w} \rightarrow (0; 0; 1)$: les deux produits valent 0 mais $\vec{v} \rightarrow \neq \vec{w} \rightarrow$. d) **Faux.** Dans un cube, les plans (ABF) et (ADH) sont perpendiculaires au plan (ABC), mais ils sont sécants selon (AE).

13. a) $MN(t) \rightarrow (t - 3; 1 + t; 1 - t)$, donc $f(t) = (t - 3)^2 + (1 + t)^2 + (1 - t)^2 = (t^2 - 6t + 9) + (t^2 + 2t + 1) + (t^2 - 2t + 1) = 3t^2 - 6t + 11$.

b) f est un polynôme du second degré de coefficient dominant positif ; son minimum est atteint en $t = 6/(2 \times 3) = 1$. $f(1) = 3 - 6 + 11 = 8$. **Minimum 8 atteint en t = 1.** c) Pour $t = 1$, $N(1) = H(1; 2; 1)$ et $MH \rightarrow (-2; 2; 0)$. Avec $\vec{u} \rightarrow (1; 1; -1)$: $MH \rightarrow \cdot \vec{u} \rightarrow = -2 + 2 + 0 = 0$, donc H est bien le projeté orthogonal de M sur d. **Distance de M à d : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.**

Algorithmique et programmation

COURS • M22 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	9
Vers le PASS	9
Exercices	9
Corrigés	11

Ce que tu dois savoir faire

- Utiliser des variables de type entier, flottant, booléen et chaîne de caractères, et prévoir le résultat d'une suite d'affectations.
- Écrire une instruction conditionnelle avec if, elif, else et des conditions combinées par and, or, not.
- Choisir entre une boucle bornée (for) et une boucle non bornée (while), et écrire une accumulation.
- Définir une fonction en Python avec des paramètres et une valeur renvoyée, et l'appeler.
- Créer, parcourir et modifier une liste, et construire une liste en compréhension.
- Programmer un algorithme de seuil pour une suite ou une grandeur qui évolue.
- Programmer la méthode de dichotomie et prévoir le nombre d'étapes nécessaires pour une précision donnée.
- Programmer la méthode d'Euler pour approcher la solution d'une équation différentielle.
- Simuler une expérience aléatoire et estimer une probabilité par une fréquence.
- Lire un algorithme, dresser un tableau d'état des variables, repérer et corriger une erreur.

Cours

Dans ce chapitre, les programmes sont écrits en Python. Chaque ligne de code est présentée en retrait. En Python, l'**indentation fait partie de la syntaxe** : c'est elle, et non des accolades, qui indique quelles instructions appartiennent à une boucle, à une condition ou à une fonction. On utilise quatre espaces par niveau.

1. Variables, types et affectation

Une **variable** est un nom associé à une valeur stockée en mémoire. L'**affectation** se note avec le signe = : l'instruction `a = 5` range la valeur 5 dans la variable a. Ce n'est pas une égalité mathématique : l'instruction `a = a + 1` signifie « calculer `a + 1` avec l'ancienne valeur de a, puis ranger le résultat dans a ».

Les **types** usuels sont :

Type	Exemple	Usage
int (entier)	7, -3, 2026	comptage, indices
float (flottant)	3.5, 0.1, 2e-3	mesures, calculs approchés
bool (booléen)	True, False	résultat d'un test
str (chaîne)	"PASS", 'bonjour'	texte
list (liste)	[4, 7, 1]	collection ordonnée de valeurs

Le séparateur décimal est le **point** : 3.5 et non 3,5.

Opérations sur les nombres : +, -, * (produit), / (quotient décimal, résultat toujours flottant), // (quotient de la division euclidienne), % (reste de la division euclidienne), (puissance). Ainsi 17 // 5 vaut 3, 17 % 5 vaut 2, 7 / 2 vaut 3.5 et 2⁵ vaut 32. Le test « n est pair » s'écrit n % 2 == 0.

Les **flottants** sont des valeurs approchées : 0.1 + 0.2 ne vaut pas exactement 0.3 en machine. C'est pourquoi on évite de tester l'égalité de deux flottants, et pourquoi on compare plutôt à une tolérance.

Entrées et sorties : print(x) affiche la valeur de x ; input() lit une saisie au clavier **sous forme de chaîne**. Pour obtenir un nombre, on convertit : n = int(input("n = ")) ou x = float(input()).

Une affectation multiple est possible : a, b = b, a échange les valeurs de a et b en une seule instruction.

2. Instructions conditionnelles et booléens

Les **opérateurs de comparaison** renvoient un booléen : == (égal), != (différent), <, <=, >, >=. Attention à ne pas confondre = (affectation) et == (test d'égalité).

Les conditions se combinent avec and (les deux vraies), or (au moins une vraie) et not (négation).

La structure conditionnelle s'écrit :

```
if x > 0:
    signe = 1
elif x == 0:
    signe = 0
else:
    signe = -1
```

Les deux-points en fin de ligne sont obligatoires, et les instructions de chaque bloc sont indentées. Seul le premier bloc dont la condition est vraie est exécuté ; le bloc else s'exécute si aucune condition n'est vraie.

3. Boucles bornées et non bornées

Boucle bornée (for). On l'utilise quand le nombre de répétitions est connu à l'avance. La fonction range engendre une suite d'entiers :

- range(n) donne 0, 1, ..., n - 1 (n valeurs) ;

- `range(a, b)` donne `a, a + 1, ..., b - 1` (`b` exclu) ;
- `range(a, b, p)` avance de `p` en `p`.

Exemple : calcul de la somme $1 + 2 + \dots + 100$ par **accumulation**.

```
s = 0
for k in range(1, 101):
    s = s + k
print(s)
```

La variable `s`, initialisée à 0 avant la boucle, accumule les termes ; le programme affiche 5050. Pour un produit, on initialise à 1.

Boucle non bornée (while). On l'utilise quand on répète tant qu'une condition est vraie, sans savoir combien de fois. La condition est testée **avant** chaque passage. Il faut s'assurer qu'elle finira par devenir fausse, sinon le programme ne s'arrête jamais.

```
n = 0
while 2 ** n < 1000:
    n = n + 1
print(n)
```

Ce programme affiche 10, le plus petit entier `n` tel que $2^n \geq 1000$ ($2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$).

Choisir la boucle

1. Nombre de tours connu à l'avance : boucle `for` avec `range` • 2. Arrêt quand une condition change : boucle `while`, avec une condition qui finit par devenir fausse

4. Fonctions

Une **fonction** regroupe des instructions réutilisables. Elle reçoit des **paramètres** et **renvoie** une valeur avec `return`.

```
def f(x):
    return x ** 2 - 3 * x + 1

def est_pair(n):
    return n % 2 == 0
```

L'appel `f(2)` renvoie $4 - 6 + 1 = -1$, et `est_pair(7)` renvoie `False`.

Points essentiels :

- `return` **termine** immédiatement l'exécution de la fonction. Un `return` placé à l'intérieur d'une boucle l'interrompt dès le premier passage.
- **print n'est pas return** : `print` affiche une valeur à l'écran mais la fonction ne la transmet pas ; une fonction sans `return` renvoie la valeur spéciale `None`.
- Les variables créées dans une fonction sont **locales** : elles n'existent pas en dehors.

- Une fonction peut recevoir une autre fonction en paramètre : c'est ce qu'on fait pour la dichotomie ou la méthode d'Euler, qui s'appliquent à une fonction f quelconque.

5. Listes

Une **liste** est une suite ordonnée de valeurs : $L = [4, 7, 1, 9, 3]$.

- Les éléments sont numérotés à partir de **0** : $L[0]$ vaut 4, $L[4]$ vaut 3. $L[-1]$ désigne le dernier élément.
- $\text{len}(L)$ donne le nombre d'éléments (ici 5) ; les indices valides vont de 0 à $\text{len}(L) - 1$.
- $L.\text{append}(x)$ ajoute x à la fin ; $L[i] = x$ remplace l'élément d'indice i .
- $\text{sum}(L)$, $\text{max}(L)$, $\text{min}(L)$ donnent la somme, le maximum, le minimum.

Deux façons de parcourir une liste :

```
for x in L:
    print(x)

for i in range(len(L)):
    print(i, L[i])
```

La première parcourt les valeurs, la seconde les indices (utile quand on a besoin de la position).

Listes en compréhension. On construit une liste en une ligne à partir d'une autre :

```
carres = [k ** 2 for k in range(1, 6)]
grands = [x for x in L if x > 5]
```

carres vaut $[1, 4, 9, 16, 25]$ et grands vaut $[7, 9]$.

On peut aussi construire une liste dans une boucle en partant de la liste vide $[]$ et en utilisant `append` : c'est la méthode pour garder en mémoire les termes successifs d'une suite.

6. Algorithmes de seuil

Une suite (u_n) étant donnée, on cherche le **plus petit rang n** à partir duquel u_n dépasse (ou passe sous) une valeur fixée, appelée seuil. On ne connaît pas ce rang à l'avance : la boucle `while` s'impose.

Structure type, pour une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = g(u_n)$, avec un seuil S quand la suite croît :

```
def seuil(S):
    n = 0
    u = 2
    while u < S:
        u = 3 * u - 1
        n = n + 1
    return n
```

Trois points à soigner : l'initialisation (n et u correspondent au même rang), l'ordre des mises à jour (u et n avancent ensemble dans la boucle), et la condition de la boucle, qui est la **négation** de la condition d'arrêt (on continue tant que $u < S$, on s'arrête dès que $u \geq S$). Il faut aussi être sûr que le seuil sera atteint, par exemple parce que la suite tend vers $+\infty$ ou vers une limite au-delà de S , sinon la boucle ne se termine pas.

Quand on connaît une formule explicite, on peut vérifier le résultat par le calcul, par exemple avec le logarithme népérien.

7. Dichotomie

Principe. Soit f une fonction **continue** sur $[a ; b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$ (une seule si f est strictement monotone). On coupe l'intervalle en deux au milieu $m = (a + b)/2$:

- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires ($f(a) \times f(m) \leq 0$), une solution est dans $[a ; m]$: on remplace b par m ;
- sinon, une solution est dans $[m ; b]$: on remplace a par m .

On recommence tant que la longueur $b - a$ est supérieure à la précision ϵ voulue.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

La fonction renvoie un encadrement $[a ; b]$ de la solution, d'amplitude au plus ϵ .

Nombre d'étapes. À chaque étape la longueur de l'intervalle est divisée par 2. Après n étapes, elle vaut $(b - a)/2^n$. Pour une précision ϵ , il faut le plus petit n tel que $(b - a)/2^n \leq \epsilon$. Sur un intervalle de longueur 1, une précision de 10^{-3} demande 10 étapes ($2^{10} = 1024$), une précision de 10^{-6} en demande 20 ($2^{20} = 1\,048\,576$). La dichotomie est donc **très efficace** : chaque étape apporte un chiffre binaire exact supplémentaire.

Une étape de dichotomie

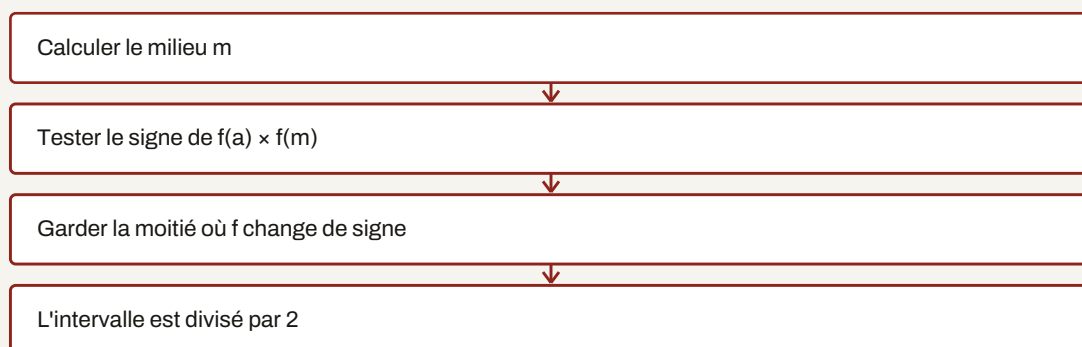


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

8. Méthode d'Euler

On cherche une fonction y telle que $y' = F(x, y)$ et $y(x_0) = y_0$ (par exemple $y' = y$, ou $y' = 2 - y$). Quand on ne sait pas résoudre exactement, ou pour visualiser une solution, on approche la courbe par une **suite de petits segments**.

Idée. Pour h petit, la dérivée donne l'approximation affine $y(x+h) \approx y(x) + h \times y'(x) = y(x) + h \times F(x, y(x))$. On part de $(x_0; y_0)$ et on avance d'un pas h :

$$x_{k+1} = x_k + h \quad y_{k+1} = y_k + h \times F(x_k, y_k)$$

```
def euler(F, x0, y0, h, n):
    x = x0
    y = y0
    X = [x]
    Y = [y]
    for k in range(n):
        y = y + h * F(x, y)
        x = x + h
        X.append(x)
        Y.append(y)
    return X, Y
```

L'ordre compte : on calcule le nouveau y avec l'**ancien** x , puis on avance x . Les listes X et Y permettent ensuite de tracer la courbe approchée.

Précision. Plus le pas h est petit, meilleure est l'approximation, mais plus il faut d'étapes. L'erreur vient de ce qu'on suit la tangente au lieu de la courbe : pour une fonction convexe (courbe au-dessus de ses tangentes), la méthode d'Euler donne des valeurs trop faibles.

Exemple : pour $y' = y$ avec $y(0) = 1$, la solution exacte est $\exp$. Avec un pas h , chaque étape multiplie y par $(1+h)$; après n étapes de pas $h = 1/n$, on obtient $(1 + 1/n)^n$, qui tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

9. Simulation

Le module `random` fournit des nombres pseudo-aléatoires :

- `random()` renvoie un flottant au hasard dans $[0; 1[$;
- `randint(a, b)` renvoie un entier au hasard entre a et b **inclus**.

Pour simuler un événement de probabilité p , on teste `random() < p`, qui est vrai avec probabilité p .

```
from random import random, randint

def experience(p):
    if random() < p:
        return 1
    return 0

def frequence(p, n):
    succes = 0
    for i in range(n):
        succes = succes + experience(p)
    return succes / n
```

Répéter n fois une expérience de Bernoulli et compter les succès simule une **loi binomiale** $B(n, p)$. D'après la loi des grands nombres, la fréquence observée se rapproche de p quand n grandit : c'est ce qui permet d'**estimer une probabilité** par simulation. Pour n assez grand, dans environ 95 % des échantillons, la fréquence est dans l'intervalle $[p - 1/\sqrt{n}; p + 1/\sqrt{n}]$.

10. Lire et corriger un algorithme

Pour comprendre un programme, on dresse un **tableau d'état** : une colonne par variable, une ligne par passage dans la boucle, en notant les valeurs **après** chaque passage. On teste aussi les cas limites (liste vide, $n = 0$, seuil déjà atteint au départ).

Erreurs les plus fréquentes :

- **décalage d'une unité** : `range(1, n)` s'arrête à $n - 1$; un parcours qui commence à l'indice 1 oublie le premier élément ;
- **mauvaise initialisation** : une somme commence à 0, un produit à 1, un maximum au premier élément de la liste (et non à 0, faux si tous les éléments sont négatifs) ;
- **return mal placé** : à l'intérieur de la boucle, il l'arrête au premier tour ;
- **= au lieu de ==** dans un test ;
- **boucle infinie** : la variable de la condition n'est jamais modifiée dans la boucle, ou évolue dans le mauvais sens ;
- **indentation** : une instruction qui devrait être dans la boucle est placée après, ou l'inverse ;
- **mises à jour dans le mauvais ordre** : par exemple avancer x avant de calculer le nouveau y dans Euler.

Exemples résolus

Exemple 1 : un algorithme de seuil

Énoncé. On considère la suite définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 10$. a) Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 51$. b) On admet que $u_n = 50 + 50 \times 0,8^n$. Déterminer ce rang par le calcul.

Résolution.

a) La suite décroît vers 50 ($u_1 = 90$, $u_2 = 82$, $u_3 = 75,6$). On continue tant que $u \geq 51$:

```
def seuil():
    n = 0
    u = 100
    while u >= 51:
        u = 0.8 * u + 10
        n = n + 1
    return n
```

b) $u_n < 51$ équivaut à $50 + 50 \times 0,8^n < 51$, soit $0,8^n < 0,02$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, cela équivaut à $n \times \ln(0,8) < \ln(0,02)$, puis, en divisant par $\ln(0,8) < 0$ (ce qui change le sens), $n > \ln(0,02)/\ln(0,8) \approx (-3,912)/(-0,2231) \approx 17,5$. Contrôle : $u_{17} = 50 + 50 \times 0,8^{17} \approx 50 + 50 \times 0,0225 \approx 51,13$ et $u_{18} \approx 50 + 50 \times 0,0180 \approx 50,90$. La fonction renvoie 18.

Exemple 2 : dichotomie

Énoncé. On considère $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0 ; 1]$. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0 ; 1]$. b) Dérouler les quatre premières étapes de l'algorithme de dichotomie. c) Combien d'étapes faut-il pour un encadrement d'amplitude 10^{-3} ?

Résolution.

a) f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 1]$. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), l'équation a une unique solution α dans $[0 ; 1]$.

b) Tableau d'état :

Étape	a	b	m	f(m)	Nouvel intervalle
1	0	1	0,5	$0,125 + 0,5 - 1 = -0,375$	$[0,5 ; 1]$
2	0,5	1	0,75	$0,421875 + 0,75 - 1 \approx 0,172$	$[0,5 ; 0,75]$
3	0,5	0,75	0,625	$0,244140625 + 0,625 - 1 \approx -0,131$	$[0,625 ; 0,75]$
4	0,625	0,75	0,6875	$0,324951... + 0,6875 - 1 \approx 0,012$	$[0,625 ; 0,6875]$

À chaque étape, $f(a) < 0$: on garde $[a ; m]$ quand $f(m) > 0$, $[m ; b]$ quand $f(m) < 0$. Après quatre étapes, $0,625 \leq \alpha \leq 0,6875$ ($\alpha \approx 0,682$).

c) Après n étapes, l'amplitude vaut $1/2^n$. On veut $1/2^n \leq 10^{-3}$, soit $2^n \geq 1000$. Comme $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$, il faut 10 étapes.

Exemple 3 : méthode d'Euler et approximation de e

Énoncé. On approche la solution de $y' = y$, $y(0) = 1$, par la méthode d'Euler. a) Avec un pas $h = 0,1$, calculer les trois premières valeurs approchées. b) Montrer que la valeur approchée obtenue en $x = 1$ vaut $1,1^{10}$, et la comparer à e. c) Que donne le programme pour $h = 0,01$?

Résolution.

a) Ici $F(x, y) = y$, donc $y_{k+1} = y_k + 0,1 \times y_k = 1,1 \times y_k$. On obtient $y_0 = 1$, $y_1 = 1,1$, $y_2 = 1,21$, $y_3 = 1,331$, valeurs approchées de $y(0,1)$, $y(0,2)$, $y(0,3)$.

b) Par récurrence immédiate, $y_k = 1,1^k$. On atteint $x = 1$ après 10 pas, donc $y_{10} = 1,1^{10} \approx 2,594$. La valeur exacte est $\exp(1) = e \approx 2,718$: l'erreur est d'environ 0,12. L'approximation est trop faible, car $\exp$ est convexe et la méthode suit les tangentes, situées sous la courbe.

c) Avec $h = 0,01$, il faut 100 pas et l'on obtient $1,01^{100} \approx 2,705$, soit une erreur d'environ 0,013 : diviser le pas par 10 a divisé l'erreur par environ 10. L'appel s'écrit :

```
def F(x, y):
    return y
```

```
X, Y = euler(F, 0, 1, 0.01, 100)
print(Y[-1])
```

Méthodes et pièges

- Avant d'écrire une boucle, demande-toi si tu connais le nombre de tours : oui, for ; non, while.
- Dans une boucle while, la condition écrite est celle pour **continuer** : c'est la négation de la condition d'arrêt demandée par l'énoncé.
- Vérifie qu'une boucle while se termine : la variable testée doit être modifiée dans la boucle et se rapprocher de la condition d'arrêt.
- Initialise une somme à 0, un produit à 1, un maximum au premier élément de la liste.
- Retiens que `range(a, b)` s'arrête à `b - 1` et que les indices d'une liste commencent à 0.
- Ne confonds pas `print` et `return` : une fonction qui doit fournir un résultat à un autre calcul doit le renvoyer.
- Pour lire un algorithme, dresse un tableau d'état ligne par ligne au lieu de deviner : c'est la méthode qui évite les erreurs de décalage.
- Dans la dichotomie, compare les signes de $f(a)$ et $f(m)$, pas $f(m)$ à 0 seul, et vérifie que f est continue et change de signe sur l'intervalle de départ.
- Dans la méthode d'Euler, calcule le nouveau y avec l'ancien x , puis avance x .
- N'écris jamais de test d'égalité entre flottants : compare la différence à une tolérance.

Vers le PASS

En PASS, la programmation n'est pas évaluée pour elle-même, mais les algorithmes de ce chapitre structurent le raisonnement numérique. La méthode d'Euler est exactement la façon dont on simule un bilan : une concentration de médicament qui diminue de façon proportionnelle à sa valeur ($C' = -kC$), une population, une charge qui varie. Les algorithmes de seuil répondent à des questions du type « au bout de combien de temps la concentration passe-t-elle sous le seuil d'efficacité ? ». La simulation et la loi des grands nombres préparent les biostatistiques, et la dichotomie illustre comment on résout numériquement une équation qu'on ne sait pas résoudre à la main.

Suite en PASS : Équations différentielles et bilans

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Donne les valeurs de a et b après l'exécution de ces instructions, en détaillant chaque étape. Quel est le rôle de ce programme ?

```
a = 3
b = 5
a = a + b
b = a - b
a = a - b
```
2. Donne la valeur de chacune des expressions Python suivantes : `17 // 5`, `17 % 5`, `2 ** 5`, `7 / 2`, `10 % 2 == 0`.
3. Quelle valeur affiche le programme suivant ? Justifie par un tableau d'état.

```
s = 0
for k in range(1, 6):
    s = s + k * k
print(s)
```

4. Écris une fonction `est_pair(n)` qui renvoie `True` si l'entier `n` est pair et `False` sinon, puis une fonction `compte_paires(L)` qui renvoie le nombre d'entiers pairs d'une liste `L`.
5. On définit $L = [4, 7, 1, 9, 3]$.
 - a) Donne `L[0]`, `L[2]`, `L[-1]` et `len(L)`. b) Donne la liste $M = [2 * x \text{ for } x \text{ in } L]$ et la liste $N = [x \text{ for } x \text{ in } L \text{ if } x > 3]$. c) Après l'instruction `L.append(6)`, que valent `len(L)` et `sum(L)` ?

Niveau 2 : type bac

6. Une ville compte 2000 habitants en 2026, et sa population augmente de 3 % par an.
 - a) Écris une fonction Python qui renvoie le nombre d'années nécessaires pour que la population atteigne ou dépasse 3000 habitants. b) Détermine ce nombre par le calcul.
7. Un élève a écrit la fonction suivante, censée renvoyer la moyenne des valeurs d'une liste non vide `L`.


```
def moyenne(L):
    s = 0
    for i in range(1, len(L)):
        s = s + L[i]
    return s / len(L)
```

- a) Que renvoie `moyenne([10, 12, 14])` ? Est-ce le résultat attendu ? b) Corrige la fonction. c) Un autre élève place `return s / len(L)` à l'intérieur de la boucle (indenté sous le `for`). Que renvoie alors sa fonction pour `[10, 12, 14]` avec un parcours correct commençant à l'indice 0 ?
8. On cherche une valeur approchée de $\sqrt{3}$ comme solution de $x^2 - 3 = 0$ sur $[1 ; 2]$.
 - a) Justifie que la méthode de dichotomie s'applique. b) Déroule à la main la fonction dichotomie du cours avec $f(x) = x^2 - 3$, $a = 1$, $b = 2$ et $\epsilon = 0,1$. Donne l'encadrement final et le nombre d'étapes. c) Combien d'étapes faudrait-il pour une précision de 10^{-4} ?
9. On considère l'équation différentielle $y' = 2 - y$ avec $y(0) = 0$.
 - a) Écris la relation de récurrence de la méthode d'Euler avec un pas h . b) Avec $h = 0,5$, calcule les valeurs approchées en $x = 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2$. c) La solution exacte est $y(x) = 2 - 2\exp(-x)$. Compare en $x = 2$.

Niveau 3 : vers le PASS

10. On lance deux dés équilibrés à six faces et on s'intéresse à l'événement S : « la somme vaut 7 ».
 - a) Écris une fonction `simule(n)` qui simule n lancers de deux dés et renvoie la fréquence de S . b) Calcule la probabilité exacte de S . c) Pour $n = 1000$, dans quel intervalle la fréquence obtenue se trouve-t-elle dans environ 95 % des cas ?
11. Après une injection, la concentration $C(t)$ d'un médicament dans le plasma (en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, t en heures) vérifie $C' = -0,2C$, avec $C(0) = 10$.
 - a) Montre qu'avec la méthode d'Euler de pas $h = 1$, on obtient $C_{k+1} = 0,8C_k$. b) Calcule la valeur approchée de $C(3)$ et compare-la à la valeur exacte $10\exp(-0,6)$. c) Écris un algorithme de seuil donnant

le premier instant entier où la valeur approchée passe sous $1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, et détermine ce rang. d) Compare à l'instant exact, sachant que $C(t) = 10\exp(-0,2t)$. Explique le sens de l'écart.

12. On veut résoudre $f(x) = 0$ sur $[0; 1]$ avec une précision de 10^{-6} , pour une fonction f continue et strictement monotone qui change de signe.

a) Méthode de balayage : on calcule f en $0, 10^{-6}, 2 \times 10^{-6}$, etc. Combien d'évaluations de f faut-il au pire ? b) Combien d'étapes de dichotomie faut-il ? c) Conclut sur l'efficacité comparée des deux méthodes.

13. On considère la fonction suivante, où n est un entier positif ou nul.

```
def mystere(n):
    c = 0
    while n > 0:
        c = c + n % 10
        n = n // 10
    return c
```

a) Dresse le tableau d'état pour l'appel `mystere(2026)`. b) Que calcule cette fonction ? Que renvoie `mystere(0)` ? c) Pourquoi la boucle se termine-t-elle toujours ?

Corrigés

1. Étape par étape : $a = 3, b = 5$; puis $a = 3 + 5 = 8$; puis $b = 8 - 5 = 3$; puis $a = 8 - 3 = 5$. **À la fin, $a = 5$ et $b = 3$: le programme échange les valeurs de a et b sans variable auxiliaire (en Python, $a, b = b, a$ fait la même chose).**

2. $17 // 5 = 3$ (quotient euclidien, $17 = 5 \times 3 + 2$) ; $17 \% 5 = 2$ (reste) ; $2 \cdot 5 = 10$; $7 / 2 = 3.5$ (flottant) ; $10 \% 2 == 0$ vaut `True`** (10 est pair).

3. `range(1, 6)` donne $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

k	s après le passage
1	$0 + 1 = 1$
2	$1 + 4 = 5$
3	$5 + 9 = 14$
4	$14 + 16 = 30$
5	$30 + 25 = 55$

Le programme affiche 55, la somme des carrés des entiers de 1 à 5.

4. Un entier est pair si son reste dans la division par 2 est nul.

```
def est_pair(n):
    return n % 2 == 0

def compte_pairs(L):
    c = 0
    for x in L:
        if est_pair(x):
```



```
        c = c + 1
    return c
```

Par exemple, `compte_pairs([4, 7, 1, 8])` renvoie 2. Une version en une ligne : `return len([x for x in L if x % 2 == 0])`.

5. a) $L[0] = 4$, $L[2] = 1$ (troisième élément, car on compte à partir de 0), $L[-1] = 3$ (dernier élément), $\text{len}(L) = 5$.

b) $M = [8, 14, 2, 18, 6]$ et $N = [4, 7, 9]$ (on garde, dans l'ordre, les éléments strictement supérieurs à 3). c) L devient $[4, 7, 1, 9, 3, 6]$: $\text{len}(L) = 6$ et $\text{sum}(L) = 4 + 7 + 1 + 9 + 3 + 6 = 30$.

6. a) Une hausse de 3 % revient à multiplier par 1,03. On compte les années tant que la population est sous 3000 :

```
def annees():
    n = 0
    p = 2000
    while p < 3000:
        p = p * 1.03
        n = n + 1
    return n
```

b) La population au bout de n années vaut $2000 \times 1,03^n$. On veut $2000 \times 1,03^n \geq 3000$, soit $1,03^n \geq 1,5$, soit $n \times \ln(1,03) \geq \ln(1,5)$ ($\ln$ croissante), donc $n \geq \ln(1,5)/\ln(1,03) \approx 0,4055/0,02956 \approx 13,7$. Contrôle : $2000 \times 1,03^{13} \approx 2937$ et $2000 \times 1,03^{14} \approx 3025$. La fonction renvoie 14 : le seuil est atteint en 2040.

7. a) La boucle parcourt $i = 1$ et $i = 2$ seulement : $s = 12 + 14 = 26$, et la fonction renvoie $26/3 \approx 8,67$, alors que la moyenne vaut $(10 + 12 + 14)/3 = 12$. Le premier élément (indice 0) est oublié : c'est une erreur de décalage d'une unité.

b) Correction : on parcourt tous les indices, ou directement les valeurs.

```
def moyenne(L):
    s = 0
    for x in L:
        s = s + x
    return s / len(L)
```

c) Le return est exécuté dès le premier passage, avec $s = 10$: la fonction renvoie $10 / 3 \approx 3,33$. Le return doit être placé après la boucle, au même niveau d'indentation que le for.

8. a) $f(x) = x^2 - 3$ est continue sur $[1 ; 2]$, strictement croissante sur cet intervalle ($f'(x) = 2x > 0$), avec $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 1 > 0$. L'équation a une unique solution dans $[1 ; 2]$, qui est $\sqrt{3}$, et la dichotomie s'applique.

b) Tableau d'état ($f(a)$ reste négatif) :

Étape	a	b	m	f(m)	b - a après l'étape
1	1	2	1,5	$2,25 - 3 = -0,75$	$a = 1,5 ; 0,5$

Étape	a	b	m	f(m)	b - a après l'étape
2	1,5	2	1,75	$3,0625 - 3 = 0,0625$	$b = 1,75 ; 0,25$
3	1,5	1,75	1,625	$2,640625 - 3 \approx -0,359$	$a = 1,625 ; 0,125$
4	1,625	1,75	1,6875	$2,84765625 - 3 \approx -0,152$	$a = 1,6875 ; 0,0625$

Après l'étape 4, $b - a = 0,0625 \leq 0,1$: la boucle s'arrête. **Encadrement : $1,6875 \leq \sqrt{3} \leq 1,75$, obtenu en 4 étapes** ($\sqrt{3} \approx 1,732$). c) Il faut $1/2^n \leq 10^{-4}$, soit $2^n \geq 10\,000$. Or $2^{13} = 8192$ et $2^{14} = 16\,384$: **14 étapes**.

9. a) Ici $F(x, y) = 2 - y$, donc $y_{k+1} = y_k + h(2 - y_k)$.

b) Avec $h = 0,5$: $y_{k+1} = y_k + 0,5(2 - y_k) = 0,5y_k + 1$. $y(0,5) \approx 0 + 0,5 \times 2 = 1$; $y(1) \approx 1 + 0,5 \times 1 = 1,5$; $y(1,5) \approx 1,5 + 0,5 \times 0,5 = 1,75$; $y(2) \approx 1,75 + 0,5 \times 0,25 = 1,875$. c) Valeur exacte : $y(2) = 2 - 2\exp(-2) \approx 2 - 2 \times 0,1353 \approx 1,729$. L'approximation 1,875 est trop forte d'environ 0,15 : la solution exacte est concave ($y'' = -y' = -2\exp(-x) < 0$), donc sous ses tangentes, et Euler, qui suit les tangentes, la surestime. Un pas plus petit réduirait l'écart.

10. a) On compte les lancers dont la somme vaut 7 :

```
from random import randint

def simule(n):
    c = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 6) + randint(1, 6) == 7:
            c = c + 1
    return c / n
```

b) Il y a 36 couples équiprobables, dont 6 donnent 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1). $P(S) = 6/36 = 1/6 \approx 0,167$. c) $1/\sqrt{1000} \approx 0,0316$. L'intervalle est $[1/6 - 0,0316 ; 1/6 + 0,0316]$, soit **environ $[0,135 ; 0,198]$** .

11. a) Euler avec $h = 1$: $C_{k+1} = C_k + 1 \times (-0,2C_k) = 0,8C_k$.

b) $C_3 = 10 \times 0,8^3 = 5,12 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Valeur exacte : $10\exp(-0,6) \approx 5,49 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Euler sous-estime de 0,37 $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ environ. c) Algorithme :

```
def seuil_concentration():
    t = 0
    C = 10
    while C >= 1:
        C = 0.8 * C
        t = t + 1
    return t
```

$C_k = 10 \times 0,8^k < 1$ équivaut à $0,8^k < 0,1$, soit $k > \ln(0,1)/\ln(0,8) \approx 10,3$. Contrôle : $C_{10} \approx 10 \times 0,107 \approx 1,07$ et $C_{11} \approx 10 \times 0,0859 \approx 0,86$. **La fonction renvoie 11 (heures)**. d) Exactement : $10\exp(-0,2t) < 1$ équivaut à $t > \ln(10)/0,2 = 5\ln(10) \approx 11,5 \text{ h}$. La méthode d'Euler fait décroître la concentration trop vite : la courbe exacte est convexe, au-dessus de ses tangentes, et Euler suit les tangentes, donc sous-estime C et

annonce le passage sous le seuil trop tôt.

12. a) Le balayage teste les points $k \times 10^{-6}$ pour k de 0 à 10^6 : au pire **environ 10^6 évaluations (1 000 001)**.

b) Il faut $1/2^n \leq 10^{-6}$, soit $2^n \geq 10^6$. Comme $2^{19} = 524\,288$ et $2^{20} = 1\,048\,576$, **20 étapes** suffisent (deux évaluations de f par étape dans la version du cours, soit 40 évaluations au plus). c) **La dichotomie est des dizaines de milliers de fois plus rapide** : son nombre d'étapes croît comme le nombre de chiffres de précision voulus (environ 3,3 étapes par chiffre décimal), alors que le balayage est multiplié par 10 à chaque chiffre supplémentaire.

13. a) Tableau d'état (valeurs après chaque passage) :

Passage	$n \% 10$	c	n
départ		0	2026
1	6	6	202
2	2	8	20
3	0	8	2
4	2	10	0

n vaut 0, la boucle s'arrête : **mystere(2026) renvoie 10**. b) $n \% 10$ est le dernier chiffre de n et $n // 10$ supprime ce chiffre : **la fonction calcule la somme des chiffres de n** . Pour $n = 0$, la condition $n > 0$ est fausse dès le départ : **mystere(0) renvoie 0**. c) Tant que $n > 0$, $n // 10 < n$: n est un entier positif qui **décroît strictement** à chaque passage. Une suite d'entiers positifs strictement décroissante ne peut pas être infinie : n atteint 0 et la boucle se termine.