

Orthogonalité et distances dans l'espace

COURS • M21 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer un produit scalaire dans l'espace par la définition géométrique, par la projection ou par les coordonnées dans un repère orthonormé.
- Calculer une norme, une distance et un angle géométrique à l'aide du produit scalaire.
- Démontrer que deux vecteurs, deux droites, une droite et un plan sont orthogonaux.
- Déterminer un vecteur normal à un plan à partir de deux vecteurs directeurs.
- Écrire une équation cartésienne d'un plan et lire un vecteur normal sur une équation.
- Étudier la position relative de deux plans ou d'une droite et d'un plan à partir des vecteurs normaux et directeurs.
- Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite et sur un plan.
- Calculer la distance d'un point à un plan ou à une droite.
- Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan, de deux plans.

Cours

1. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, placés à partir d'un même point A ($\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$), sont toujours contenus dans un même plan, par exemple le plan (ABC) si A, B, C ne sont pas alignés. On définit leur produit scalaire comme celui calculé dans ce plan :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\text{BAC})$, l'angle étant l'angle géométrique entre les deux vecteurs.

Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire vaut 0. La **norme** de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$; on note aussi $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Comme le produit scalaire dans l'espace est un produit scalaire calculé dans un plan, **toutes les propriétés de Première restent vraies** :

- **symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- **bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- **identités de polarisation** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2)(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = (1/2)(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$;
- **identités remarquables** : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Produit scalaire et projection. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$. Ce produit vaut $AB \times AH$ si H est sur la demi-droite [AB), et $-AB \times AH$ sinon. Cette formule est très utile dans un solide quand une projection est évidente.

Expression en repère orthonormé. Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), les vecteurs de base vérifient $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. Par bilinéarité, si $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ et } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Cette formule n'est valable que dans un repère **orthonormé**.

Calcul d'un angle. Pour deux vecteurs non nuls, $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$, où $\theta \in [0 ; \pi]$ est l'angle géométrique. On en déduit θ à la calculatrice.

2. Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Droites orthogonales. Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Attention : deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes. Si elles sont orthogonales et sécantes, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**. Dans un cube ABCDEFGH, (AB) et (CG) sont orthogonales mais non coplanaires.

Droite orthogonale à un plan. Une droite d est **orthogonale à un plan P** si elle est orthogonale à toutes les droites de P.

Théorème : une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan.

Démonstration : soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs directeurs de deux droites sécantes de P, donc non colinéaires. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, alors pour tout vecteur $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}$ de la direction de P, $\vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}) = a(\vec{u} \cdot \vec{v}) + b(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 0$. Donc d est orthogonale à toute droite de P. La réciproque est immédiate.

Conséquences :

- Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles entre elles.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux.



Démontrer que (d) est orthogonale à un plan P

Choisir deux droites sécantes de P



Calculer deux produits scalaires avec un vecteur directeur de (d)



Les deux sont nuls : (d) orthogonale à P

Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

3. Vecteur normal à un plan

Un vecteur **normal** à un plan P est un vecteur **non nul** $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale à P. D'après le théorème précédent, $\vec{n}$ est normal au plan $P(A; \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété : soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Un plan est donc caractérisé par un point et un vecteur normal, ce qui est souvent plus commode que deux vecteurs directeurs.

Trouver un vecteur normal. Si P est dirigé par $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$, on cherche $\vec{n}(x; y; z)$ avec $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$. Ce système a une infinité de solutions (deux équations, trois inconnues) : on fixe une valeur commode pour une inconnue, par exemple z, et on calcule les deux autres. On vérifie à la fin les deux produits scalaires.

Positions relatives avec les vecteurs normaux. Soient P et P' de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Situation	Condition
P et P' parallèles	$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires
P et P' perpendiculaires	$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$
d orthogonale à P	$\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$
d parallèle à P (ou incluse)	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
d et P sécants	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

4. Équation cartésienne d'un plan

Théorème : dans un repère orthonormé, un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Réciproquement, si a, b, c ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points M(x; y; z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration du sens direct : soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point du plan. $M(x ; y ; z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est-à-dire $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, soit $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Réciproque : si, par exemple, $a \neq 0$, le point $A(-d/a ; 0 ; 0)$ vérifie l'équation, et l'équation équivaut à $a(x + d/a) + by + cz = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$: c'est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarques :

- Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes, toutes proportionnelles : $2x - y + z - 3 = 0$ et $-4x + 2y - 2z + 6 = 0$ décrivent le même plan.
- Les coefficients de x, y, z donnent un vecteur normal **directement**.
- Plans particuliers : $z = 0$ est le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; $x = 2$ est le plan parallèle à $(O ; \vec{j}, \vec{k})$ passant par $(2 ; 0 ; 0)$.
- Pour **tester** l'appartenance d'un point, on remplace ses coordonnées dans l'équation.

Méthode pour l'équation du plan (ABC). On calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on cherche un vecteur normal $\vec{n}$ orthogonal aux deux, on écrit $ax + by + cz + d = 0$ avec les coordonnées de $\vec{n}$, puis on détermine d en écrivant que A vérifie l'équation. On contrôle avec B et C.

5. Projeté orthogonal

Sur une droite. Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite d est l'unique point H de d tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de d (si $M \in d$, $H = M$).

Méthode : on écrit $H(t)$ avec la représentation paramétrique de d, puis on résout $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$, équation du premier degré en t.

Sur un plan. Le projeté orthogonal de M sur un plan P est l'unique point H de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit colinéaire à un vecteur normal $\vec{n}$ de P. C'est le point d'intersection de P et de la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$.

Méthode : on écrit la droite $\Delta : x = x_M + ta, y = y_M + tb, z = z_M + tc$, puis on remplace dans l'équation de P pour trouver t.

Propriété : le projeté orthogonal H de M sur un plan P (ou sur une droite) est le point de P le plus proche de M. Pour tout point N de P distinct de H, $MN > MH$.

Démonstration : pour $N \in P$, le vecteur $\overrightarrow{HN}$ est dans la direction de P, donc orthogonal à $\overrightarrow{MH}$. Le triangle MHN est rectangle en H, et par le théorème de Pythagore $MN^2 = MH^2 + HN^2 > MH^2$ dès que $N \neq H$.

6. Distances

La **distance d'un point M à un plan P** est la distance MH, où H est le projeté orthogonal de M sur P. C'est la plus petite distance entre M et un point de P. De même, la **distance d'un point à une droite** est MH, avec H le projeté orthogonal de M sur la droite.

Formule (à savoir redémontrer). Si P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé, et $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$:

$$\text{distance}(M, P) = |a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Démonstration : $H = M + t \cdot \vec{n}$ avec $\vec{n} = (a; b; c)$. En remplaçant dans l'équation : $a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) + d = 0$, d'où $t = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)/(a^2 + b^2 + c^2)$. Alors $MH = |t| \times \|\vec{n}\| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / (a^2 + b^2 + c^2) \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ce qui donne la formule. Au bac, on attend souvent le passage par le point H : sache faire les deux.

Distance entre deux plans parallèles. C'est la distance d'un point quelconque de l'un à l'autre.

Application aux volumes. Le volume d'une pyramide (ou d'un tétraèdre) est $V = (1/3) \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$. La hauteur est la distance du sommet au plan de la base, obtenue par projeté orthogonal. On peut aussi, connaissant V par un autre découpage, en déduire une aire ou une distance.

7. Intersections

Droite et plan. Pour $d : x = x_A + ta, y = y_A + tb, z = z_A + tc$ et $P : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, on remplace x, y, z dans l'équation de P. On obtient une équation du premier degré en t :

- une solution unique : d et P sont sécants, on calcule le point ;
- aucune solution (du type $0 = 5$) : d est strictement parallèle à P ;
- toujours vraie ($0 = 0$) : d est incluse dans P.

Deux plans. Si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, les plans sont parallèles : confondus si leurs équations sont proportionnelles, strictement parallèles sinon. Sinon, ils sont sécants selon une droite. Pour la déterminer, on résout le système des deux équations en prenant une inconnue comme paramètre (par exemple $x = t$ ou $y = t$), après avoir éliminé une variable par combinaison. Un vecteur directeur de la droite d'intersection est orthogonal aux deux vecteurs normaux : c'est un contrôle simple.

Deux plans P et P'

Normaux colinéaires : parallèles (confondus ou strictement parallèles)

Normaux non colinéaires : sécants selon une droite, obtenue en résolvant le système avec un paramètre

Repères complémentaires, sans séquence causale

Trois plans. L'intersection de trois plans se ramène à un système de trois équations à trois inconnues. Elle peut être un point, une droite, un plan ou l'ensemble vide.

Exemples résolus

Exemple 1 : angle et orthogonalité dans un cube

Énoncé. ABCDEFGH est un cube d'arête 1 (ABCD face du bas, E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C, H au-dessus de D). On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. a) Calculer une valeur approchée de l'angle entre $\vec{AG}$ et $\vec{AC}$. b) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

Résolution.

a) Coordonnées : $A(0; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $G(1; 1; 1)$. Donc $\overrightarrow{AG} = (1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 0)$. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 2$. $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$. $\cos \theta = 2 / (\sqrt{3} \times \sqrt{2}) = 2/\sqrt{6} = \sqrt{6}/3 \approx 0,816$, d'où $\theta \approx 35,3^\circ$.

b) $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, donc $\overrightarrow{BD} = (-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{BE} = (-1; 0; 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée est nulle pour $\overrightarrow{BE}$ seulement), donc (BD) et (BE) sont deux droites sécantes du plan (BDE). $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$. ($\overrightarrow{AG}$) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDE) : ($\overrightarrow{AG}$) est orthogonale au plan (BDE).

Exemple 2 : équation d'un plan, projeté et distance

Énoncé. Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 1; 3)$ et $M(7; 4; 4)$. a) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC) et une équation cartésienne de ce plan. b) Déterminer le projeté orthogonal H de M sur (ABC) et la distance de M au plan.

Résolution.

a) $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 3)$, non colinéaires. On cherche $\vec{n} = (a; b; c)$ avec : $a - 2b + c = 0$ - $a - b + 3c = 0$ En additionnant : $-3b + 4c = 0$, donc $b = 4c/3$. On choisit $c = 3$, d'où $b = 4$ et $a = 2b - c = 8 - 3 = 5$. Ainsi $\vec{n} = (5; 4; 3)$. Contrôle : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 - 8 + 3 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -5 - 4 + 9 = 0$. Une équation est $5x + 4y + 3z + d = 0$. A est dans le plan : $5 + 8 + 0 + d = 0$, donc $d = -13$. Contrôle avec B : $10 + 0 + 3 - 13 = 0$; avec C : $0 + 4 + 9 - 13 = 0$. (ABC) : $5x + 4y + 3z - 13 = 0$.

b) La droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$ a pour représentation $x = 7 + 5t$, $y = 4 + 4t$, $z = 4 + 3t$. On remplace dans l'équation : $5(7 + 5t) + 4(4 + 4t) + 3(4 + 3t) - 13 = 35 + 16 + 12 - 13 + (25 + 16 + 9)t = 50 + 50t = 0$, donc $t = -1$. H a pour coordonnées $(7 - 5; 4 - 4; 4 - 3) = (2; 0; 1)$, c'est-à-dire le point B. $\overrightarrow{MH} = -\vec{n}$, donc $MH = \|\vec{n}\| = \sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$. Contrôle par la formule : $|5 \times 7 + 4 \times 4 + 3 \times 4 - 13| / \sqrt{50} = 50/\sqrt{50} = \sqrt{50}$.

Exemple 3 : intersection de deux plans, projeté sur une droite

Énoncé. On considère les plans $P_1 : x + y - z = 1$ et $P_2 : 2x - y + z = 2$, et le point $M(1; 0; 4)$. a) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d. b) Déterminer le projeté orthogonal de M sur d et la distance de M à d.

Résolution.

a) $\vec{n}_1 = (1; 1; -1)$ et $\vec{n}_2 = (2; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires (rapports 2 et -1 sur les deux premières coordonnées) : les plans sont sécants selon une droite. En additionnant les deux équations : $3x = 3$, donc $x = 1$. La première devient alors $y - z = 0$, soit $y = z$. En posant $y = t$: $\vec{d} : x = 1, y = t, z = t, t \in \mathbb{R}$. Contrôle dans P_2 : $2 - t + t = 2$. Un vecteur directeur est $\vec{u} = (0; 1; 1)$; on vérifie $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 + 1 - 1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0 - 1 + 1 = 0$.

b) Un point H de d s'écrit $H(1; t; t)$, donc $\overrightarrow{MH} = (0; t; t - 4)$. On écrit $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$: $t + (t - 4) = 0$, donc $t = 2$. $H(1; 2; 2)$, $\overrightarrow{MH} = (0; 2; -2)$ et $MH = \sqrt{0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Méthodes et pièges

- Avant d'utiliser $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, vérifie que le repère est orthonormé ; dans un pavé non cubique, choisis les arêtes de longueur 1 ou passe par la définition géométrique.
- Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, deux produits scalaires nuls avec deux vecteurs non colinéaires du plan suffisent ; un seul ne suffit pas.

- Pour trouver un vecteur normal, fixe une coordonnée, résous les deux autres, puis vérifie les deux produits scalaires : c'est rapide et évite la plupart des erreurs de signe.
- Après avoir trouvé d dans $ax + by + cz + d = 0$, contrôle l'équation avec les autres points connus du plan.
- Ne confonds pas les rôles : dans une équation de plan, $(a ; b ; c)$ est un vecteur **normal** ; dans une représentation paramétrique de droite, les coefficients de t forment un vecteur **directeur**.
- Une droite parallèle à un plan vérifie $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, pas $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$ (c'est la condition d'orthogonalité).
- Orthogonales ne veut pas dire sécantes : deux droites orthogonales peuvent être non coplanaires.
- Une distance est toujours positive : dans la formule, n'oublie ni la valeur absolue ni la racine carrée au dénominateur.
- Pour l'intersection de deux plans, élimine une variable par combinaison, puis prends une inconnue restante comme paramètre ; vérifie le vecteur directeur obtenu avec les deux vecteurs normaux.

Vers le PASS

En PASS, le produit scalaire est partout : travail d'une force ($W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$), puissance, flux d'un champ à travers une surface, composante d'un vecteur sur un axe obtenue par projection. La notion de vecteur normal intervient pour décrire une surface (une membrane, une interface de réfraction en optique), et la projection orthogonale est l'opération qui permet de décomposer une grandeur vectorielle en une composante utile et une composante perpendiculaire. Les calculs d'angles par $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|)$ servent aussi en chimie pour les angles de liaison.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

Dans tous les exercices, le repère est orthonormé.

1. On donne $\vec{u}(1 ; -2 ; 3)$ et $\vec{v}(4 ; 1 ; -1)$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, puis une valeur approchée au dixième de degré de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Détermine le réel m pour lequel les vecteurs $\vec{u}(2 ; m ; -1)$ et $\vec{v}(m ; 3 ; 4)$ sont orthogonaux.
3. a) Détermine une équation cartésienne du plan P passant par $A(2 ; -1 ; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1 ; 4 ; -2)$.
b) Le point $B(0 ; -2 ; 0)$ appartient-il à P ?
4. On considère le plan $P : 2x - y + 2z - 3 = 0$. Donne un vecteur normal à P , puis deux points de P . Calcule la distance de l'origine O à P .
5. On considère les plans $P : x + y + z = 1$, $Q : 2x + 2y + 2z = 5$ et $R : x - y = 0$. Précise la position relative de P et Q , puis de P et R .

Niveau 2 : type bac

6. On donne $O(0 ; 0 ; 0)$, $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; 1)$.

a) Montre que $\vec{n} \rightarrow (1; 1; 1)$ est normal au plan (ABC) et donne une équation de ce plan. b) Détermine le projeté orthogonal H de O sur (ABC) et la distance OH. c) Calcule le volume du tétraèdre OABC en prenant OAB comme base. d) En déduire l'aire du triangle ABC, et vérifie le résultat sachant que ABC est équilatéral.

7. On considère le plan P : $2x - y + z - 4 = 0$ et la droite d : $x = 1 + t, y = -2 + 3t, z = 2t$ ($t \in \mathbb{R}$).

a) Détermine l'intersection de d et P. b) Soit d' la droite passant par O et dirigée par $\vec{w} \rightarrow (1; 1; -1)$. Montre que d' est strictement parallèle à P. c) La droite d est-elle orthogonale à P ?

8. On considère la droite d passant par A(1 ; 2 ; -1) et dirigée par $\vec{u} \rightarrow (2; 1; 2)$, et le point M(6 ; 3 ; -2).

a) Écris une représentation paramétrique de d. b) Détermine le projeté orthogonal H de M sur d. c) Calcule la distance de M à d.

9. On donne A(1 ; 2 ; 3) et B(3 ; 0 ; 1).

a) Détermine une équation du plan médiateur de [AB] (plan passant par le milieu de [AB] et orthogonal à (AB)). b) Vérifie que M(0 ; 0 ; 1) appartient à ce plan, puis que MA = MB.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Les plans P : $2x - 2y + z - 1 = 0$ et P' : $2x - 2y + z + 8 = 0$ sont-ils parallèles ? Calcule la distance entre ces deux plans.

11. On considère P : $x + 2y - z = 3$ et Q : $x - y + z = 0$.

a) Montre que P et Q sont sécants. b) Détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ. c) Vérifie que le vecteur directeur obtenu est orthogonal aux deux vecteurs normaux. d) P et Q sont-ils perpendiculaires ?

12. Vrai ou faux ? Justifie.

a) Deux droites orthogonales à une même droite sont parallèles. b) Une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est orthogonale à ce plan. c) Si $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = \vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow$ avec $\vec{u} \rightarrow$ non nul, alors $\vec{v} \rightarrow = \vec{w} \rightarrow$. d) Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

13. On considère la droite d : $x = t, y = 1 + t, z = 2 - t$ ($t \in \mathbb{R}$) et le point M(3 ; 0 ; 1). Pour tout réel t, on note N(t) le point de d de paramètre t.

a) Exprime $f(t) = MN(t)^2$ en fonction de t. b) Détermine le minimum de f et la valeur de t où il est atteint. c) Vérifie que le point obtenu est le projeté orthogonal de M sur d et donne la distance de M à d.

Corrigés

1. $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = 1 \times 4 + (-2) \times 1 + 3 \times (-1) = 4 - 2 - 3 = -1$.

$\|\vec{u} \rightarrow\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ et $\|\vec{v} \rightarrow\| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $\cos \theta = -1 / (\sqrt{14} \times \sqrt{18}) = -1/\sqrt{252} \approx -0,0630$, donc $\theta \approx 93,6^\circ$ (angle légèrement obtus, cohérent avec un produit scalaire négatif).

2. $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = 2m + 3m + (-1) \times 4 = 5m - 4$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $5m - 4 = 0$, soit $m = 4/5$.

3. a) Une équation est $x + 4y - 2z + d = 0$. $A \in P : 2 - 4 - 6 + d = 0$, donc $d = 8$. $P : x + 4y - 2z + 8 = 0$.

b) Pour B : $0 + 4 \times (-2) - 0 + 8 = 0$. B appartient à P.

4. Un vecteur normal est $\vec{n} \rightarrow (2; -1; 2)$. Points de P : avec $x = 0$ et $z = 0$, $-y - 3 = 0$ donne $(0; -3; 0)$; avec $x = 1, y = 1 : 2 - 1 + 2z - 3 = 0$ donne $z = 1$, d'où $(1; 1; 1)$ (contrôle : $2 - 1 + 2 - 3 = 0$).

Distance de O : $|2 \times 0 - 0 + 2 \times 0 - 3| / \sqrt{4 + 1 + 4} = 3/3 = 1$.

5. Vecteurs normaux : $n_{P \rightarrow}(1; 1; 1)$, $n_{Q \rightarrow}(2; 2; 2)$, $n_{R \rightarrow}(1; -1; 0)$.

$n_{Q \rightarrow} = 2n_{P \rightarrow}$: P et Q sont parallèles. L'équation de Q équivaut à $x + y + z = 5/2$, différente de $x + y + z = 1$: P et Q sont strictement parallèles. $n_{P \rightarrow} \cdot n_{R \rightarrow} = 1 - 1 + 0 = 0$: P et R sont perpendiculaires (donc sécants).

6. a) $AB \rightarrow(-1; 1; 0)$ et $AC \rightarrow(-1; 0; 1)$, non colinéaires. $n \rightarrow \cdot AB \rightarrow = -1 + 1 = 0$ et $n \rightarrow \cdot AC \rightarrow = -1 + 1 = 0$: $n \rightarrow$ est normal à (ABC). Équation $x + y + z + d = 0$ avec A : $1 + d = 0$, $d = -1$. (ABC) : $x + y + z - 1 = 0$.

b) La droite passant par O dirigée par $n \rightarrow$ est $x = y = z = t$. Dans l'équation : $3t - 1 = 0$, $t = 1/3$. $H(1/3; 1/3; 1/3)$ et $OH = \sqrt{(3 \times 1/9)} = \sqrt{1/3} = \sqrt{3}/3 \approx 0,577$. c) OAB est un triangle rectangle en O de côtés 1 et 1, d'aire $1/2$. La hauteur issue de C est $OC = 1$ (car (OC) est orthogonale au plan (OAB)). $V = (1/3) \times (1/2) \times 1 = 1/6$. d) Avec la base ABC et la hauteur OH : $V = (1/3) \times \text{aire}(ABC) \times OH$, donc $\text{aire}(ABC) = 3V/OH = (1/2) / (\sqrt{3}/3) = 3/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2$. Vérification : $AB = BC = CA = \sqrt{2}$, et l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $(\sqrt{3}/4)a^2 = (\sqrt{3}/4) \times 2 = \sqrt{3}/2$.

7. a) On remplace : $2(1 + t) - (-2 + 3t) + 2t - 4 = 2 + 2t + 2 - 3t + 2t - 4 = t$. L'équation $t = 0$ donne $t = 0$: d et P sont sécants au point $(1; -2; 0)$ (contrôle : $2 + 2 + 0 - 4 = 0$).

b) $n \rightarrow(2; -1; 1)$ et $w \rightarrow \cdot n \rightarrow = 2 - 1 - 1 = 0$: d' est parallèle à P. O vérifie-t-il l'équation ? $0 - 0 + 0 - 4 = -4 \neq 0$. d' est strictement parallèle à P. c) Le vecteur directeur de d est $(1; 3; 2)$. Pour être colinéaire à $n \rightarrow(2; -1; 1)$, il faudrait un rapport $1/2$ sur la première coordonnée et -3 sur la deuxième : impossible. d n'est pas orthogonale à P.

8. a) d : $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $H(1 + 2t; 2 + t; -1 + 2t)$ et $MH \rightarrow(-5 + 2t; -1 + t; 1 + 2t)$. On écrit $MH \rightarrow \cdot u \rightarrow = 0$: $2(-5 + 2t) + (-1 + t) + 2(1 + 2t) = -10 + 4t - 1 + t + 2 + 4t = 9t - 9 = 0$, donc $t = 1$. $H(3; 3; 1)$. c) $MH \rightarrow(-3; 0; 3)$, donc $MH = \sqrt{9 + 0 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$.

9. a) Milieu I $(2; 1; 2)$. $AB \rightarrow(2; -2; -2)$ est normal au plan, ainsi que $n \rightarrow(1; -1; -1) = (1/2)AB \rightarrow$. Équation $x - y - z + d = 0$ avec I : $2 - 1 - 2 + d = 0$, $d = 1$. Plan médiateur : $x - y - z + 1 = 0$.

b) Pour M : $0 - 0 - 1 + 1 = 0$, M appartient au plan. $MA^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$ et $MB^2 = 3^2 + 0^2 + 0^2 = 9$, donc $MA = MB = 3$, ce qui est cohérent : le plan médiateur est l'ensemble des points équidistants de A et B.

10. Les deux plans ont le même vecteur normal $(2; -2; 1)$ et des équations non proportionnelles ($-1 \neq 8$) : ils sont strictement parallèles.

On prend un point de P, par exemple $K(0; 0; 1)$ (contrôle : $0 - 0 + 1 - 1 = 0$). Distance de K à P' : $|0 - 0 + 1 + 8| / \sqrt{4 + 4 + 1} = 9/3 = 3$.

11. a) $\vec{n}_P \rightarrow (1; 2; -1)$ et $\vec{n}_Q \rightarrow (1; -1; 1)$: le rapport serait 1 sur la première coordonnée et $-1/2$ sur la deuxième. Non colinéaires : **P et Q sont sécants selon une droite.**

b) En additionnant les équations : $2x + y = 3$, donc $y = 3 - 2x$. En posant $x = t$: $y = 3 - 2t$, puis Q donne $z = y - x = 3 - 3t$. Δ : $x = t$, $y = 3 - 2t$, $z = 3 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$. Contrôle dans P : $t + 2(3 - 2t) - (3 - 3t) = t + 6 - 4t - 3 + 3t = 3$. c) $\vec{u} \rightarrow (1; -2; -3)$: $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{n}_P \rightarrow = 1 - 4 + 3 = 0$ et $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{n}_Q \rightarrow = 1 + 2 - 3 = 0$. d) $\vec{n}_P \rightarrow \cdot \vec{n}_Q \rightarrow = 1 - 2 - 1 = -2 \neq 0$: **P et Q ne sont pas perpendiculaires.**

12. a) **Faux.** Dans un cube, (AE) et (AB) sont toutes deux orthogonales à (AD), mais elles sont sécantes en A et non parallèles.

b) **Vrai.** C'est le théorème du cours : si $\vec{u} \rightarrow$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\vec{v} \rightarrow$, $\vec{w} \rightarrow$ du plan, il est orthogonal à toute combinaison $a \cdot \vec{v} \rightarrow + b \cdot \vec{w} \rightarrow$, donc à toute droite du plan. c) **Faux.** $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = \vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow$ équivaut à $\vec{u} \rightarrow \cdot (\vec{v} \rightarrow - \vec{w} \rightarrow) = 0$, c'est-à-dire $\vec{v} \rightarrow - \vec{w} \rightarrow$ orthogonal à $\vec{u} \rightarrow$, sans être nul. Exemple : $\vec{u} \rightarrow (1; 0; 0)$, $\vec{v} \rightarrow (0; 1; 0)$, $\vec{w} \rightarrow (0; 0; 1)$: les deux produits valent 0 mais $\vec{v} \rightarrow \neq \vec{w} \rightarrow$. d) **Faux.** Dans un cube, les plans (ABF) et (ADH) sont perpendiculaires au plan (ABC), mais ils sont sécants selon (AE).

13. a) $MN(t) \rightarrow (t - 3; 1 + t; 1 - t)$, donc $f(t) = (t - 3)^2 + (1 + t)^2 + (1 - t)^2 = (t^2 - 6t + 9) + (t^2 + 2t + 1) + (t^2 - 2t + 1) = 3t^2 - 6t + 11$.

b) f est un polynôme du second degré de coefficient dominant positif ; son minimum est atteint en $t = 6/(2 \times 3) = 1$. $f(1) = 3 - 6 + 11 = 8$. **Minimum 8 atteint en t = 1.** c) Pour $t = 1$, $N(1) = H(1; 2; 1)$ et $MH \rightarrow (-2; 2; 0)$. Avec $\vec{u} \rightarrow (1; 1; -1)$: $MH \rightarrow \cdot \vec{u} \rightarrow = -2 + 2 + 0 = 0$, donc H est bien le projeté orthogonal de M sur d. **Distance de M à d : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.**