



Fiche : Orthogonalité et distances dans l'espace

FICHE • M21 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se calcule dans un plan qui les contient : toutes les propriétés de Première restent vraies.
- Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- L'angle géométrique θ entre deux vecteurs non nuls vérifie $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$.
- Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes ; orthogonales et sécantes, elles sont perpendiculaires.
- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Un vecteur normal à un plan est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan.
- Dans un repère orthonormé, un plan de vecteur normal $\vec{n} \rightarrow (a ; b ; c)$ a une équation $ax + by + cz + d = 0$, et réciproquement.
- Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Une droite de vecteur directeur $\vec{u} \rightarrow$ est parallèle à un plan de vecteur normal $\vec{n} \rightarrow$ si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, orthogonale à ce plan si $\vec{u} \rightarrow$ est colinéaire à $\vec{n} \rightarrow$.
- Le projeté orthogonal de M sur une droite d est le point H de d tel que $\vec{MH} \rightarrow$ soit orthogonal à un vecteur directeur de d.
- Le projeté orthogonal de M sur un plan est l'intersection du plan avec la droite passant par M dirigée par un vecteur normal.
- Le projeté orthogonal est le point le plus proche de M : la distance de M au plan (ou à la droite) est MH.
- L'intersection d'une droite et d'un plan s'obtient en remplaçant la représentation paramétrique dans l'équation du plan.



- Deux plans sécants se coupent selon une droite dont le vecteur directeur est orthogonal aux deux vecteurs normaux.

Formules et définitions à connaître

Grandeur	Formule	Condition
Produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$	toujours
Produit scalaire en coordonnées	$xx' + yy' + zz'$	repère orthonormé
Polarisation	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2)(\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$	toujours
Projection	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$, H projeté de C sur (AB)	toujours
Plan (A ; $\vec{n}$)	$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $ax + by + cz + d = 0$	$\vec{n}$ non nul, repère orthonormé
Distance point-plan	valeur absolue de $(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$, divisée par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	repère orthonormé
Volume d'un tétraèdre	$V = (1/3) \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$	hauteur = distance sommet-plan

Pièges à éviter

- La formule $xx' + yy' + zz'$ n'est valable que dans un repère orthonormé.
- Un seul produit scalaire nul ne suffit pas pour prouver qu'une droite est orthogonale à un plan.
- Dans une équation de plan, (a ; b ; c) est un vecteur normal, pas un vecteur directeur.
- Droite parallèle à un plan : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; droite orthogonale à un plan : $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$. Ne les inverse pas.



- Dans la formule de distance, n'oublie ni la valeur absolue au numérateur ni la racine carrée au dénominateur.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$.

Je me teste

1. Produit scalaire de $(1 ; 2 ; 3)$ et $(3 ; 0 ; -1)$? $\rightarrow 3 + 0 - 3 = 0$, ils sont orthogonaux.
2. Un vecteur normal au plan $3x - y + 5 = 0$? $\rightarrow \vec{n}(3 ; -1 ; 0)$.
3. Deux droites orthogonales sont-elles sécantes ? $\rightarrow$ Pas forcément, elles peuvent être non coplanaires.
4. Combien de droites du plan faut-il tester pour l'orthogonalité droite-plan ? $\rightarrow$ Deux droites sécantes.
5. Plans $x + y = 1$ et $x + y = 3$? $\rightarrow$ Strictement parallèles.
6. Plans $x + y + z = 0$ et $x - y = 2$? $\rightarrow$ Perpendiculaires, car $1 - 1 + 0 = 0$.
7. Comment trouver le projeté de M sur un plan ? $\rightarrow$ Intersection du plan et de la droite passant par M dirigée par $\vec{n}$.
8. Distance de O au plan $x + 2y + 2z - 6 = 0$? $\rightarrow 6/3 = 2$.
9. Pourquoi le projeté est-il le point le plus proche ? $\rightarrow$ Par Pythagore, $MN^2 = MH^2 + HN^2 \geq MH^2$.
10. Comment contrôler la droite d'intersection de deux plans ? $\rightarrow$ Son vecteur directeur est orthogonal aux deux vecteurs normaux.