

Vecteurs, droites et plans de l'espace

COURS • M20 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	2
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace et les simplifier avec la relation de Chasles.
- Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires et en déduire un alignement de points ou un parallélisme de droites.
- Démontrer que trois vecteurs sont coplanaires, ou que quatre points sont coplanaires, par une décomposition vectorielle.
- Reconnaître une base de l'espace et décomposer un vecteur dans cette base.
- Choisir un repère adapté à une figure (cube, pavé, tétraèdre) et calculer les coordonnées de points, de vecteurs et de milieux.
- Écrire une représentation paramétrique d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur, ou de deux points.
- Tester l'appartenance d'un point à une droite ou à un plan défini par un point et deux vecteurs.
- Déterminer la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans, et calculer leur intersection éventuelle.
- Utiliser les théorèmes d'incidence (théorème du toit, parallélisme d'une droite et d'un plan, de deux plans).

Cours

1. Vecteurs de l'espace

La notion de vecteur vue dans le plan s'étend sans changement à l'espace. À tout couple de points (A, B) on associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, caractérisé par une direction (celle de la droite (AB)), un sens (de A vers B) et une longueur (la distance AB). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la **translation** qui envoie A sur B. Deux couples (A, B) et (C, D) définissent le même vecteur si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur $\overrightarrow{AA}$ pour n'importe quel point A.

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Cette propriété permet de « placer » un vecteur à partir de n'importe quel point.

Les opérations sont les mêmes que dans le plan :

- **Somme** : $\vec{u} + \vec{v}$ se construit en mettant les vecteurs bout à bout. La **relation de Chasles** s'écrit, pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- **Produit par un réel** : pour k réel, $k \cdot \vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$, le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et une longueur multipliée par $|k|$.
- **Opposé** : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Les règles de calcul habituelles s'appliquent : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$, $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$, $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Une **combinaison linéaire** de vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est un vecteur de la forme $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$ avec a, b, c réels.

Un point clé : le **milieu** I de [AB] est caractérisé par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ou encore $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Pour tout point M, on a alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Cette égalité, obtenue en écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, est souvent la clé des démonstrations dans les solides.

2. Colinéarité, droites de l'espace

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ ou $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Conséquences directes :

- Trois points A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Une **droite** de l'espace est déterminée par un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$, appelé **vecteur directeur**. On note $d(A ; \vec{u})$ la droite formée des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$, t décrivant $\mathbb{R}$. Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la même droite : une droite a une infinité de vecteurs directeurs.

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Attention : dans l'espace, deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles (voir la partie 6).

3. Plans de l'espace et coplanarité

Caractérisation vectorielle d'un plan. Soient A un point et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. L'ensemble des points M tels que

$\vec{AM} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$, avec s et t réels,

est un **plan**, noté $P(A ; \vec{u}, \vec{v})$. On dit que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ **dirige** le plan, ou que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan. Un plan contenant trois points non alignés A, B, C est dirigé par $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$: c'est le plan (ABC) .

Pourquoi faut-il deux vecteurs non colinéaires ? Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étaient colinéaires, les points M obtenus resteraient sur une droite. Deux directions indépendantes « ouvrent » une surface plane.

Vecteurs coplanaires. Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** si, en les plaçant à partir d'un même point O ($\vec{OA} = \vec{u}, \vec{OB} = \vec{v}, \vec{OC} = \vec{w}$), les points O, A, B, C sont dans un même plan.

Propriété : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$.

Justification : si $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, alors $\vec{OC} = a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB}$, donc C appartient au plan $P(O ; \vec{u}, \vec{v})$, qui contient aussi O, A, B . Réciproquement, si les quatre points sont dans ce plan, la caractérisation vectorielle donne l'écriture de $\vec{OC}$.

Une formulation équivalente, symétrique : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels a, b, c **non tous nuls** tels que $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = \vec{0}$.

Points coplanaires. Quatre points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ sont coplanaires. Lorsque A, B, C ne sont pas alignés, cela revient à trouver a et b tels que $\vec{AD} = a \cdot \vec{AB} + b \cdot \vec{AC}$.

Direction d'un plan. Deux plans dirigés par des couples de vecteurs qui engendrent les mêmes combinaisons linéaires ont la même direction : ils sont parallèles. Concrètement, deux plans $P(A ; \vec{u}, \vec{v})$ et $P'(A' ; \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont tous deux combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4. Bases et repères de l'espace

Une **base** de l'espace est un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**.

Théorème : si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un **unique** triplet de réels (x, y, z) tel que $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Démonstration de l'unicité : si $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}$, alors $(x - x') \cdot \vec{i} + (y - y') \cdot \vec{j} + (z - z') \cdot \vec{k} = \vec{0}$. Si l'un des coefficients, par exemple $z - z'$, était non nul, on pourrait écrire $\vec{k}$ comme combinaison de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et les trois vecteurs seraient coplanaires, ce qui est exclu. Donc $x = x', y = y', z = z'$.

Existence (idée) : on place $\vec{u} = \vec{OM}$. La droite passant par M et dirigée par $\vec{k}$ coupe le plan $P(O ; \vec{i}, \vec{j})$ en un point M' (elle ne lui est pas parallèle puisque $\vec{k}$ n'est pas dans la direction de ce plan). Alors $\vec{OM'} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ et $\vec{M'M} = z \cdot \vec{k}$.

Les réels (x, y, z) sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base. On écrit $\vec{u}(x ; y ; z)$.

Un **repère** de l'espace est un quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé d'un point O , l'origine, et d'une base. Les **coordonnées d'un point** M sont celles du vecteur $\vec{OM}$. La première est l'**abscisse**, la deuxième l'**ordonnée**, la troisième la **cote**.

Le repère est **orthonormé** lorsque $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1. Seul ce cas permet de calculer des longueurs avec la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. Dans un

repère quelconque (par exemple $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ dans un pavé non cubique), cette formule est fausse.

Formules en coordonnées (valables dans tout repère) : pour $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$,

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$;
- le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $((x_A + x_B)/2 ; (y_A + y_B)/2 ; (z_A + z_B)/2)$;
- si $u \rightarrow (x ; y ; z)$ et $v \rightarrow (x' ; y' ; z')$, alors $u \rightarrow + v \rightarrow (x + x' ; y + y' ; z + z')$ et $k \cdot u \rightarrow (kx ; ky ; kz)$.

Colinéarité en coordonnées. $u \rightarrow (x ; y ; z)$ et $v \rightarrow (x' ; y' ; z')$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles. En pratique, on cherche k avec une coordonnée non nulle, puis on vérifie les deux autres. Une autre façon : les trois « produits en croix » $xy' - x'y$, $xz' - x'z$, $yz' - y'z$ sont tous nuls. Contrairement au plan, une seule égalité ne suffit pas.

Choisir un repère dans un cube. Pour le cube ABCDEFGH (face ABCD en bas, E au-dessus de A, F au-dessus de B, etc.), le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ donne : $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$. Pour un cube, ce repère est orthonormé si l'on prend l'arête comme unité.

Repères à choisir selon la figure

Cube : $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, orthonormé

Pavé droit : même repère, non orthonormé si les arêtes diffèrent

Tétraèdre ABCD : $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, toujours une base

Figure sans sommet commode : origine au centre d'une face

Repères complémentaires, sans séquence causale

5. Représentations paramétriques d'une droite

Dans un repère, soit d la droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $u \rightarrow (a ; b ; c)$, non nul. Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à d si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot u \rightarrow$, c'est-à-dire : $x = x_A + t \cdot a$ $y = y_A + t \cdot b$ $z = z_A + t \cdot c$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Ce système est une **représentation paramétrique** de d ; t est le **paramètre**. À chaque valeur de t correspond un point de d , et à chaque point de d une unique valeur de t .

Remarques importantes :

- Une droite possède une **infinité** de représentations paramétriques : on peut changer de point de départ et de vecteur directeur. Deux systèmes d'apparence différente peuvent décrire la même droite.
- On lit directement un point (prendre $t = 0$) et un vecteur directeur (les coefficients de t).
- Le **segment** $[AB]$ correspond à $t \in [0 ; 1]$ dans la représentation de point A et de vecteur $\overrightarrow{AB}$; la **demi-droite** $[AB[$ à $t \geq 0$.

Tester l'appartenance d'un point. Pour savoir si $C(x_C ; y_C ; z_C)$ est sur d , on résout l'une des équations pour trouver t (si son coefficient est non nul), puis on vérifie les deux autres avec cette valeur. Si une seule équation échoue, le point n'est pas sur la droite.

Représentation paramétrique d'un plan. De la même façon, le plan $P(A ; u \rightarrow, v \rightarrow)$ avec $u \rightarrow(a ; b ; c)$ et $v \rightarrow(a' ; b' ; c')$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $x = x_A + s \cdot a + t \cdot a'$, $y = y_A + s \cdot b + t \cdot b'$, $z = z_A + s \cdot c + t \cdot c'$, avec s et t réels. Il y a deux paramètres, car un plan a deux directions indépendantes. Cette écriture sert surtout à tester l'appartenance d'un point ou à calculer une intersection ; l'équation cartésienne d'un plan, plus maniable, sera vue avec le produit scalaire.

6. Positions relatives de droites et de plans

Deux droites. Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires**, soit **non coplanaires**.

- Coplanaires : elles sont **parallèles** (strictement parallèles ou confondues) ou **sécantes** en un point.
- Non coplanaires : elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

Deux droites d et d'

Vecteurs directeurs colinéaires : parallèles (confondues si un point commun, sinon strictement parallèles)

Non colinéaires : on résout le système, une solution donne des droites sécantes, aucune solution des droites non coplanaires

Repères complémentaires, sans séquence causale

En pratique, pour $d : M = A + t \cdot u \rightarrow$ et $d' : M = B + s \cdot v \rightarrow$, on écrit l'égalité des coordonnées avec **deux paramètres distincts** t et s , puis on résout le système de trois équations à deux inconnues : on tire t et s de deux équations, puis on teste la troisième.

Une droite et un plan. Une droite d et un plan P sont :

- **sécants** en un point unique ;
- **parallèles** : soit d est **incluse** dans P , soit d et P n'ont aucun point commun (strictement parallèles).

Propriété : une droite d est parallèle à un plan P si et seulement si un vecteur directeur de d est combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de P . De façon géométrique : si d est parallèle à une droite contenue dans P , alors d est parallèle à P .

Deux plans. Deux plans distincts sont soit **parallèles** (aucun point commun), soit **sécants** selon une droite. Deux plans ne peuvent pas avoir un seul point commun.

Propriété : si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites d'un plan P' , alors P et P' sont parallèles.

Propriété : si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les deux droites d'intersection sont parallèles.

Théorème du toit : si $d_1 \subset P_1$ et $d_2 \subset P_2$ sont deux droites parallèles, et si P_1 et P_2 sont sécants selon une droite Δ , alors Δ est parallèle à d_1 et à d_2 .

Justification du théorème du toit : soit $\vec{u}$ un vecteur directeur commun à d_1 et d_2 . Il est un vecteur de la direction de P_1 et de celle de P_2 . Si Δ n'était pas dirigée par $\vec{u}$, la direction de P_1 serait engendrée par $\vec{u}$ et un vecteur directeur $\vec{w}$ de Δ , et de même pour P_2 : les deux plans auraient la même direction tout en contenant Δ , ils seraient confondus, ce qui contredit le fait qu'ils sont sécants selon une droite.

Le théorème du toit est l'outil principal pour construire la **section d'un solide par un plan** : quand le plan de coupe rencontre deux faces parallèles d'un cube, il les coupe selon deux segments parallèles.

Méthode générale par le calcul. Toutes ces positions se décident avec des systèmes : on égale les coordonnées des points génériques (avec des paramètres distincts) et on étudie le nombre de solutions. Aucune solution : objets disjoints. Une solution unique : un point commun. Une infinité : inclusion ou intersection selon une droite.

Exemples résolus

Exemple 1 : une relation vectorielle dans un tétraèdre

Énoncé. ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB] et J celui de [CD]. Montrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$. En déduire que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont coplanaires.

Résolution.

On décompose $\vec{IJ}$ de deux façons avec la relation de Chasles, en passant par des chemins qui utilisent $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$:

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ} \quad \vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$$

En additionnant membre à membre :

$$2\vec{IJ} = (\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{AD} + \vec{BC} + (\vec{DJ} + \vec{CJ}).$$

Comme I est le milieu de [AB], $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. Comme J est le milieu de [CD], $\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$, donc $\vec{DJ} + \vec{CJ} = -(\vec{JD} + \vec{JC}) = \vec{0}$.

Il reste $2\vec{IJ} = \vec{AD} + \vec{BC}$, soit $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{BC}$.

Conclusion : $\vec{IJ}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (sinon (AD) et (BC) seraient parallèles et A, B, C, D seraient coplanaires, ce qui est exclu pour un tétraèdre). D'après la caractérisation, $\vec{IJ}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ sont coplanaires.

Exemple 2 : quatre points sont-ils coplanaires ?

Énoncé. Dans un repère de l'espace, on donne A(1 ; 2 ; -1), B(3 ; 1 ; 0), C(0 ; 0 ; 2), D(2 ; -1 ; 3) et E(0 ; 1 ; 1).

a) Montrer que A, B, C ne sont pas alignés. b) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? c) Même question pour A, B, C, E.

Résolution.

a) $\vec{AB} = (3 - 1 ; 1 - 2 ; 0 - (-1)) = (2 ; -1 ; 1)$ et $\vec{AC} = (0 - 1 ; 0 - 2 ; 2 - (-1)) = (-1 ; -2 ; 3)$. S'ils étaient colinéaires, on aurait $\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$; la première coordonnée impose $k = -1/2$, et la deuxième donnerait $-2 = (-1/2)(-1) = 1/2$, ce qui est faux. Les vecteurs ne sont pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC).

b) $\vec{AD} = (1 ; -3 ; 4)$. On cherche a et b tels que $\vec{AD} = a \cdot \vec{AB} + b \cdot \vec{AC}$:

$$2a - b = 1 \quad -a - 2b = -3 \quad a + 3b = 4$$

La première équation donne $b = 2a - 1$. En remplaçant dans la deuxième : $-a - 2(2a - 1) = -3$, soit $-5a + 2 = -3$, donc $a = 1$ et $b = 1$. Vérification dans la troisième : $1 + 3 \times 1 = 4$. Elle est satisfaite. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et **A, B, C, D sont coplanaires** (ABDC est même un parallélogramme).

c) $\overrightarrow{AE}(-1; -1; 2)$. On résout $2a - b = -1$, $-a - 2b = -1$. La première donne $b = 2a + 1$, puis $-a - 4a - 2 = -1$, soit $a = -1/5$ et $b = 3/5$. Troisième équation : $a + 3b = -1/5 + 9/5 = 8/5$, alors qu'il faudrait 2. Le système n'a pas de solution : **A, B, C, E ne sont pas coplanaires**.

Exemple 3 : position de deux droites, intersection d'une droite et d'un plan

Énoncé. On considère les droites $d : x = 1 + 2t, y = t, z = 2 - t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $d' : x = s, y = 3 - s, z = 1 + s$ ($s \in \mathbb{R}$). Soit P le plan passant par $O(0; 0; 0)$ et dirigé par $w_1(1; 0; 1)$ et $w_2(0; 1; 1)$. a) Étudier la position relative de d et d'. b) Déterminer l'intersection de d et de P.

Résolution.

a) Vecteurs directeurs : $u(2; 1; -1)$ pour d et $v(1; -1; 1)$ pour d'. Le rapport des premières coordonnées vaut 2, celui des deuxièmes vaut -1 : ils ne sont pas proportionnels, donc d et d' **ne sont pas parallèles**. On cherche un point commun, avec deux paramètres distincts :

$$1 + 2t = s \quad t = 3 - s \quad 2 - t = 1 + s$$

On remplace $s = 1 + 2t$ dans la deuxième : $t = 3 - 1 - 2t$, donc $3t = 2$, $t = 2/3$ et $s = 1 + 4/3 = 7/3$. Troisième équation : $2 - 2/3 = 4/3$ d'un côté, $1 + 7/3 = 10/3$ de l'autre. Contradiction. Les droites n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles : **d et d' sont non coplanaires**.

b) Un point de P s'écrit $\overrightarrow{OM} = a \cdot w_1 + b \cdot w_2$, soit $M(a; b; a + b)$. Un point de d appartient à P si et seulement s'il existe a, b tels que :

$$1 + 2t = a \quad t = b \quad 2 - t = a + b$$

En remplaçant : $2 - t = 1 + 2t + t$, donc $1 = 4t$ et $t = 1/4$. Le point d'intersection a pour coordonnées $x = 1 + 1/2 = 3/2$, $y = 1/4$, $z = 2 - 1/4 = 7/4$. Vérification : $a = 3/2$, $b = 1/4$, $a + b = 7/4$. **d et P sont sécants au point K(3/2; 1/4; 7/4)**.

Méthodes et pièges

- Pour démontrer une égalité vectorielle dans un solide, pars du vecteur cherché et décompose-le avec Chasles en passant par les points qui interviennent dans le résultat ; fais apparaître des sommes du type $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ qui s'annulent.
- Pour prouver une colinéarité en coordonnées, trouve k sur une coordonnée non nulle puis vérifie les deux autres : une seule vérification ne suffit jamais dans l'espace.
- Pour la coplanarité de quatre points, vérifie d'abord que trois d'entre eux ne sont pas alignés, puis cherche a et b sur deux équations et teste la troisième.
- Quand tu cherches l'intersection de deux droites données par des représentations paramétriques, utilise deux paramètres différents (t et s). Garder la même lettre revient à imposer le même « instant » et fait conclure à tort qu'il n'y a pas d'intersection.
- Deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles : dans l'espace elles peuvent être non coplanaires. Vérifie toujours la colinéarité des vecteurs directeurs.
- Deux représentations paramétriques différentes peuvent décrire la même droite : compare les vecteurs directeurs puis teste un point avant de conclure.

- La formule de distance $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}$ n'est valable que dans un repère orthonormé.
- Trois vecteurs deux à deux non colinéaires ne forment pas forcément une base : $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ sont coplanaires.
- Pour construire une section de solide, utilise le théorème du toit et le fait qu'un plan coupe deux faces parallèles selon des segments parallèles.

Vers le PASS

En PASS, les vecteurs de l'espace sont l'outil de base de la biophysique et de la mécanique : décomposition d'une force sur des axes, description de la position d'un point dans un repère, géométrie des molécules (positions des atomes, axes de symétrie). Les représentations paramétriques réapparaissent dans la description de trajectoires rectilignes, et la recherche d'intersections se ramène presque toujours à la résolution d'un système linéaire de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Savoir reconnaître rapidement qu'un système n'a pas de solution, en a une seule ou une infinité, et interpréter ce résultat géométriquement, fait gagner un temps précieux sur les QCM de calcul.

Suite en PASS : Systèmes linéaires et calcul numérique

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. A, B, C, D sont quatre points de l'espace. Simplifie les vecteurs $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BD}$ et $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA}$.
2. Dans un repère, on donne $\vec{u}(2; -4; 6)$, $\vec{v}(-1; 2; -3)$ et $\vec{w}(3; -6; 8)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Et $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
3. On donne A(1 ; 2 ; 3) et B(3 ; 5 ; 4).
a) Écris une représentation paramétrique de la droite (AB). b) Les points C(7 ; 11 ; 6) et D(5 ; 8 ; 6) appartiennent-ils à (AB) ?
4. On donne A(2 ; -1 ; 4), B(0 ; 3 ; -2) et D(1 ; 0 ; 0).
a) Calcule les coordonnées du milieu I de [AB] et du vecteur $\vec{AB}$. b) Détermine les coordonnées du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
5. ABCDEFGH est un cube (ABCD est la face du bas, E, F, G, H sont respectivement au-dessus de A, B, C, D). Donne, sans calcul et en justifiant, la position relative de :
a) les droites (AB) et (GH) ; b) les droites (AB) et (CG) ; c) la droite (AE) et le plan (BCG) ; d) les plans (ABC) et (EFG) ; e) les plans (ABF) et (BCG).

Niveau 2 : type bac

6. ABCD est un tétraèdre. I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [AC] et [AD].
a) Exprime $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{BC}$. b) Exprime $\vec{IK}$ en fonction de $\vec{BD}$. c) Démontre que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.
7. Dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et D(1 ; 1 ; 1).
a) Démontre que A, B, C ne sont pas alignés. b) Le point D appartient-il au plan (ABC) ? c) Détermine les coordonnées du point d'intersection de la droite (OD) et du plan (ABC).

8. On considère les droites $d : x = 2 + t, y = 1 - t, z = 3 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$) et $d' : x = 2 + s, y = 2 - 2s, z = 4 + s$ ($s \in \mathbb{R}$).
- a) Montre que d et d' ne sont pas parallèles. b) Démontre qu'elles sont sécantes et donne leur point d'intersection. c) Soit d'' la droite passant par $E(5 ; 0 ; 1)$ de vecteur directeur $\vec{w}(-2 ; 2 ; -4)$. Quelle est la position relative de d et d'' ?
9. On note P le plan passant par $A(1 ; 1 ; 0)$ et dirigé par $\vec{u}(1 ; 0 ; 1)$ et $\vec{v}(0 ; 1 ; 2)$. On considère la droite $\Delta : x = t, y = 2t, z = 1 + t$ ($t \in \mathbb{R}$).
- a) Démontre que Δ et P sont sécants et calcule les coordonnées de leur point commun. b) Soit Δ' la droite passant par $O(0 ; 0 ; 0)$ et dirigée par $\vec{w}(1 ; 1 ; 3)$. Montre que Δ' est strictement parallèle à P .

Niveau 3 : vers le PASS

10. Dans un repère, on donne $\vec{v}(0 ; 1 ; 1)$, $\vec{w}(2 ; 1 ; 1)$ et, pour un réel m , $\vec{u}(1 ; 2 ; m)$. Détermine la valeur de m pour laquelle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires. Pour les autres valeurs, que forment-ils ?
11. Vrai ou faux ? Justifie chaque réponse (démonstration ou contre-exemple).
- a) Deux droites de l'espace sans point commun sont parallèles. b) Trois vecteurs deux à deux non colinéaires forment une base de l'espace. c) Si une droite d est parallèle à deux plans sécants P_1 et P_2 , alors d est parallèle à leur droite d'intersection. d) Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.
12. Pour tout réel m , on note d_m la droite passant par $A(1 ; 0 ; 0)$ et dirigée par $\vec{u}(1 ; m ; 1)$, et d la droite $x = s, y = 1 + s, z = 2s$ ($s \in \mathbb{R}$). Discute, selon m , la position relative de d_m et d .
13. ABCD est un tétraèdre. On note G le point tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ et I le point tel que $\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$ (centre de gravité du triangle BCD).
- a) Démontre que $\vec{AG} = (1/4)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. b) Démontre que $\vec{AI} = (1/3)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. c) En déduire que A, G, I sont alignés et préciser la position de G sur $[AI]$.

Corrigés

1. Pour $\vec{u} : \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$ (Chasles). Donc $\vec{u} = \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CD}$.
Pour $\vec{v} : \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$.
2. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v} : \vec{v} = k \cdot \vec{u}$ si $k = -1/2$ si $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$. Vérification : $(-1/2) \times (-4) = 2$ et $(-1/2) \times 6 = -3$. Les trois coordonnées concordent, donc $\vec{v} = (-1/2)\vec{u} : \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Pour $\vec{u}$ et $\vec{w} : \vec{w} = k \cdot \vec{u}$ si $k = 3/2$, la deuxième $(3/2) \times (-4) = -6$ convient, mais la troisième donne $(3/2) \times 6 = 9 \neq 8$. $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
3. a) $\vec{AB}(3 - 1 ; 5 - 2 ; 4 - 3) = (2 ; 3 ; 1)$, non nul. Une représentation paramétrique de (AB) est $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + t, t \in \mathbb{R}$.
- b) Pour $C : 1 + 2t = 7$ donne $t = 3$; alors $y = 2 + 9 = 11$ et $z = 3 + 3 = 6$, ce qui correspond à C . $C \in (AB)$.
Pour $D : 1 + 2t = 5$ donne $t = 2$; $y = 2 + 6 = 8$ convient, mais $z = 3 + 2 = 5 \neq 6$. $D \notin (AB)$.
4. a) $I((2 + 0)/2 ; (-1 + 3)/2 ; (4 - 2)/2)$, donc $I(1 ; 1 ; 1)$. $\vec{AB}(0 - 2 ; 3 - (-1) ; -2 - 4)$, donc $\vec{AB}(-2 ; 4 ; -6)$.
- b) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$. En notant $C(x ; y ; z) : x - 1 = -2, y - 0 = 4, z - 0 = -6$. Donc $C(-1 ; 4 ; -6)$.

5. a) $ABGH$ est un rectangle ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$), donc (AB) et (GH) sont **parallèles** (strictement, car distinctes).

b) (AB) est dans le plan de la face du bas ; (CG) coupe ce plan uniquement en C , qui n'est pas sur (AB) . Elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles ($\overrightarrow{AB}$ horizontal, $\overrightarrow{CG}$ vertical) : **non coplanaires**. c) (AE) est parallèle à (BF) , qui est contenue dans le plan (BCG) . Donc (AE) est parallèle au plan (BCG) ; comme A n'appartient pas à ce plan, (AE) est **strictement parallèle** à (BCG) . d) Ce sont les plans de deux faces opposées du cube : **parallèles** (strictement). Par exemple $(AB) \parallel (EF)$ et $(AD) \parallel (EH)$, deux droites sécantes de (ABC) parallèles à deux droites de (EFG) . e) Ces plans contiennent tous les deux B et F et sont distincts : **ils sont sécants selon la droite (BF)** .

6. a) I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = (1/2)\overrightarrow{BA} + (1/2)\overrightarrow{AC} = (1/2)(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = (1/2)\overrightarrow{BC}$.

b) De même, $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = (1/2)\overrightarrow{BA} + (1/2)\overrightarrow{AD} = (1/2)\overrightarrow{BD}$. c) D'après a) et b), la droite (IJ) est parallèle à (BC) et la droite (IK) est parallèle à (BD) . Les droites (IJ) et (IK) sont sécantes en I et contenues dans le plan (IJK) ; (BC) et (BD) sont contenues dans (BCD) . Deux droites sécantes de (IJK) sont parallèles à deux droites de (BCD) : **les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles**.

7. a) $\overrightarrow{AB}(-1 ; 2 ; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1 ; 0 ; 3)$. Si $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, la première coordonnée impose $k = 1$, mais alors la deuxième donnerait $0 = 2$: impossible. **A, B, C ne sont pas alignés.**

b) $\overrightarrow{AD}(0 ; 1 ; 1)$. On cherche a, b tels que $\overrightarrow{AD} = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC}$: $-a - b = 0 ; 2a = 1 ; 3b = 1$. Les deux dernières donnent $a = 1/2, b = 1/3$, et alors $-a - b = -5/6 \neq 0$. Pas de solution : **D n'appartient pas au plan (ABC)** . c) La droite (OD) est l'ensemble des points $M(k ; k ; k)$, k réel. Un point du plan (ABC) s'écrit $A + a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AC} = (1 - a - b ; 2a ; 3b)$. On veut $1 - a - b = k, 2a = k, 3b = k$. Donc $a = k/2, b = k/3$, puis $1 - k/2 - k/3 = k$, soit $1 = k(1 + 1/2 + 1/3) = 11k/6$, d'où $k = 6/11$. Le point d'intersection est **$M(6/11 ; 6/11 ; 6/11)$** .

8. a) Vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1 ; -1 ; 2)$ et $\overrightarrow{v}(1 ; -2 ; 1)$. La première coordonnée imposerait $k = 1$, mais $-2 \neq -1$. Ils ne sont pas colinéaires : **d et d' ne sont pas parallèles.**

b) On résout $2 + t = 2 + s, 1 - t = 2 - 2s, 3 + 2t = 4 + s$. La première donne $t = s$; la deuxième devient $1 - s = 2 - 2s$, donc $s = 1$ et $t = 1$. Troisième : $3 + 2 = 5$ et $4 + 1 = 5$, vérifiée. **d et d' sont sécantes au point $(3 ; 0 ; 5)$** . c) $\overrightarrow{w}(-2 ; 2 ; -4) = -2 \cdot \overrightarrow{u}$, donc d'' est parallèle à d . Le point $E(5 ; 0 ; 1)$ est-il sur d ? $2 + t = 5$ donne $t = 3$, puis $y = 1 - 3 = -2 \neq 0$. $E \notin d$, donc **d et d'' sont strictement parallèles.**

9. a) Un point de P s'écrit $(1 + a ; 1 + b ; a + 2b)$. Un point de Δ est dans P s'il existe a, b avec $t = 1 + a, 2t = 1 + b, 1 + t = a + 2b$. On obtient $a = t - 1$ et $b = 2t - 1$, puis $a + 2b = t - 1 + 4t - 2 = 5t - 3$. L'équation $5t - 3 = 1 + t$ donne $t = 1$, valeur unique. **Δ et P sont sécants au point $(1 ; 2 ; 2)$** (avec $a = 0, b = 1$: on retrouve bien $(1 ; 2 ; 2)$).

b) $\overrightarrow{w}(1 ; 1 ; 3) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (1 + 0 ; 0 + 1 ; 1 + 2)$: $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs directeurs de P , donc Δ' est parallèle à P . Pour savoir si Δ' est incluse, on teste $O : (1 + a ; 1 + b ; a + 2b) = (0 ; 0 ; 0)$ impose $a = -1, b = -1$, puis $a + 2b = -3 \neq 0$. $O \notin P$, donc **Δ' est strictement parallèle à P .**

10. $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires (première coordonnée 0 pour $\overrightarrow{v}$, 2 pour $\overrightarrow{w}$, alors que $\overrightarrow{v}$ est non nul). $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe a, b tels que $\overrightarrow{u} = a \cdot \overrightarrow{v} + b \cdot \overrightarrow{w}$:

$1 = 2b ; 2 = a + b ; m = a + b$. Donc $b = 1/2, a = 3/2$, et $m = a + b = 2$. **Les vecteurs sont coplanaires si et seulement si $m = 2$** . Pour $m \neq 2$, ils ne sont pas coplanaires : **$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace.**

11. a) **Faux**. Dans un cube, (AB) et (CG) n'ont aucun point commun mais ne sont pas parallèles : elles sont non coplanaires.

b) **Faux.** $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ sont deux à deux non colinéaires mais coplanaires (le troisième est combinaison des deux premiers) : ils ne forment pas une base. c) **Vrai.** Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et Δ la droite d'intersection de P_1 et P_2 . Par un point M de Δ , la droite d_1 dirigée par $\vec{u}$ est contenue dans P_1 (car $d \parallel P_1$) et dans P_2 (car $d \parallel P_2$). Elle est donc contenue dans $P_1 \cap P_2 = \Delta$, d'où $d_1 = \Delta$. Ainsi Δ est dirigée par $\vec{u}$ et est parallèle à d . d) **Faux.** Dans le cube, les plans (ABF) et (BCG) contiennent tous les deux la droite (BF) ; ils sont donc tous les deux parallèles à la droite (DH) , qui est parallèle à (BF) et n'est contenue dans aucun des deux. Pourtant ils sont sécants selon (BF) .

12. Vecteurs directeurs $\vec{u} \rightarrow (1 ; m ; 1)$ et $\vec{v} \rightarrow (1 ; 1 ; 2)$. Pour que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, il faudrait $k = 1$ (première coordonnée) et $k = 1/2$ (troisième) : impossible. **Les droites ne sont jamais parallèles**, quel que soit m .

On cherche un point commun : $1 + t = s, m \cdot t = 1 + s, t = 2s$. Les équations 1 et 3 donnent $1 + 2s = s$, donc $s = -1$ et $t = -2$. La deuxième devient $-2m = 1 + (-1) = 0$, donc $m = 0$. Conclusion : si $m = 0$, d_0 et d sont sécantes au point $(-1 ; 0 ; -2)$ (vérification sur d avec $s = -1 : (-1 ; 0 ; -2)$) ; si $m \neq 0$, d_m et d sont non coplanaires.

13. a) On introduit A dans chaque vecteur : $\vec{GA} + (\vec{GA} + \vec{AB}) + (\vec{GA} + \vec{AC}) + (\vec{GA} + \vec{AD}) = \vec{0}$, soit $4\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$. Donc $4\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$ et $\vec{AG} = (1/4)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$.

b) De même : $(\vec{IA} + \vec{AB}) + (\vec{IA} + \vec{AC}) + (\vec{IA} + \vec{AD}) = \vec{0}$, soit $3\vec{IA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$, donc $\vec{AI} = (1/3)(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$. c) D'après a) et b), $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AI}$, donc $\vec{AG} = (3/4)\vec{AI}$. Les vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{AI}$ sont colinéaires : A, G, I sont alignés, et G est sur le segment $[AI]$, aux trois quarts de A vers I ($AG = (3/4)AI$).