



Fiche : Sommes de variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

FICHE • M19 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Deux variables X et Y sont indépendantes si $P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$ pour toutes valeurs x et y .
- La loi de $X + Y$ s'obtient en additionnant les probabilités des couples $(x ; y)$ tels que $x + y = s$.
- L'espérance est linéaire : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$, même sans indépendance.
- Pour des variables indépendantes, les variances s'additionnent : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- Pour des variables indépendantes, $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$: les incertitudes se cumulent.
- On additionne des variances, jamais des écarts types.
- Doubler une observation donne $V(2X) = 4V(X)$; additionner deux observations indépendantes donne $2V(X)$.
- Une loi binomiale $B(n, p)$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes, d'où $E = np$ et $V = np(1 - p)$.
- Un échantillon de taille n est une liste de n variables indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance V .
- La somme S_n a pour espérance $n\mu$ et variance nV ; la moyenne M_n a pour espérance μ et variance V/n .
- L'écart type de la moyenne vaut $\sigma/\sqrt{n}$: il faut 100 fois plus d'observations pour le diviser par 10.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev majore la probabilité d'un écart à l'espérance en n'utilisant que la variance.
- Cette inégalité est universelle mais grossière, et inutile quand $\delta \leq \sigma$.
- L'inégalité de concentration applique Bienaymé-Tchebychev à la moyenne d'un échantillon.
- La loi faible des grands nombres dit que la probabilité d'un écart d'au moins δ entre M_n et μ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- La loi des grands nombres ne prévoit aucune compensation des résultats passés.

Formules et définitions à connaître

Résultat	Formule	Condition
Linéarité	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$	toujours
Variance affine	$V(aX + b) = a^2V(X)$	toujours
Variance d'une somme	$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$	X, Y indépendantes
Somme d'un échantillon	$E(S_n) = n\mu$; $V(S_n) = nV$; $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$	échantillon
Moyenne d'un échantillon	$E(M_n) = \mu$; $V(M_n) = V/n$; $\sigma(M_n) = \sigma/\sqrt{n}$	échantillon
Taille suffisante	$n \geq V/(\alpha\delta^2)$	pour une probabilité d'écart $\leq \alpha$

- Bienaymé-Tchebychev, pour $\delta > 0$: $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X)/\delta^2$.
- Forme en écart type, pour $k > 0$: $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$.
- Concentration, pour $\delta > 0$: $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V/(n\delta^2)$.
- Fréquence, car $p(1 - p) \leq 1/4$: $P(|F_n - p| \geq \delta) \leq 1/(4n\delta^2)$.
- Loi faible des grands nombres, pour $\delta > 0$: $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Pièges à éviter

- Additionner des variances sans avoir vérifié l'indépendance.
- Écrire $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$.



- Confondre $2X$ et $X_1 + X_2$.
- Écrire $\sigma(S_n) = n\sigma$ au lieu de $\sigma\sqrt{n}$.
- Appliquer Bienaymé-Tchebychev à un intervalle qui n'est pas centré sur l'espérance.
- Présenter le n donné par l'inégalité de concentration comme la taille minimale.
- Croire qu'après une série de piles, face devient plus probable.

Je me teste

1. $E(X + Y)$ exige-t-il l'indépendance ? $\rightarrow$ Non, la linéarité est toujours vraie.
2. $V(X - Y)$ pour X et Y indépendantes ? $\rightarrow V(X) + V(Y)$.
3. $V(2X)$ si $V(X) = 3$? $\rightarrow 12$.
4. Écart type de la moyenne de 25 observations d'écart type 3 ? $\rightarrow 3/\sqrt{25} = 0,6$.
5. Énoncé de Bienaymé-Tchebychev ? $\rightarrow P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V/\delta^2$ pour $\delta > 0$.
6. Minorant de $P(|X - \mu| < 2\sigma)$ pour toute variable ? $\rightarrow 0,75$.
7. Majorant de $P(|X - 50| \geq 10)$ pour X de loi $B(100 ; 0,5)$? $\rightarrow 25/100 = 0,25$.
8. Taille suffisante pour $P(|F_n - p| \geq 0,05) \leq 0,05$? $\rightarrow n \geq 2\,000$.
9. $E(X)$ et $V(X)$ pour $B(40 ; 0,3)$ par les Bernoulli ? $\rightarrow 12$ et $8,4$.
10. Que dit la loi faible des grands nombres ? $\rightarrow P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.