

Loi binomiale

COURS • M18 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Reconnaître une épreuve de Bernoulli, préciser le succès et son paramètre p .
- Calculer l'espérance et la variance d'une variable de Bernoulli.
- Reconnaître un schéma de Bernoulli (répétition d'épreuves identiques et indépendantes) et le représenter par un arbre pondéré.
- Justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale et donner ses paramètres n et p .
- Interpréter le coefficient $C(n, k)$ comme le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès.
- Calculer $P(X = k)$ par la formule, et $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$, $P(a \leq X \leq b)$ à la calculatrice ou par complémentaire.
- Calculer et interpréter l'espérance np , la variance $np(1 - p)$ et l'écart type d'une loi binomiale.
- Déterminer un seuil : plus petit n tel que $P(X \geq 1)$ dépasse une valeur donnée.
- Déterminer un intervalle de fluctuation d'une variable binomiale ou de la fréquence associée et l'utiliser pour prendre une décision.

Cours

1. Épreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que **deux issues** : l'une appelée **succès** (notée S), l'autre **échec** (notée $\bar{S}$). On note p la probabilité du succès ; celle de l'échec est alors $1 - p$. Le nombre p , compris entre 0 et 1, est le **paramètre** de l'épreuve.

Exemples :

- on lance une pièce équilibrée ; succès « obtenir pile » ; $p = 0,5$;
- on lance un dé équilibré ; succès « obtenir 6 » ; $p = 1/6$ (les autres faces sont toutes regroupées dans l'échec) ;

- on interroge une personne choisie au hasard dans une population où 30 % des personnes portent un caractère ; succès « la personne porte le caractère » ; $p = 0,3$.

Le choix de ce que l'on appelle succès est une convention : il doit être annoncé clairement, sans jugement de valeur.

La variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** :

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

Propriété. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$E(X) = p ; V(X) = p(1 - p) ; \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}.$$

Démonstration. $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$. Comme X ne prend que les valeurs 0 et 1, $X^2 = X$, donc $E(X^2) = p$. Par la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

Remarque : $p(1 - p) = 1/4 - (p - 1/2)^2$, donc la variance est maximale, égale à $1/4$, pour $p = 1/2$. Une épreuve est d'autant plus « incertaine » que son succès et son échec sont équilibrés.

2. Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli :

- **identiques** (même paramètre p à chaque épreuve),
- **indépendantes** (l'issue de l'une ne modifie pas les probabilités des autres).

Le résultat d'un schéma de Bernoulli est une liste de n issues, par exemple (S ; S ; S) pour $n = 3$. On le représente par un **arbre pondéré** à n niveaux, chaque nœud ayant deux branches pondérées par p et $1 - p$.

Grâce à l'indépendance, la probabilité d'une liste d'issues est le **produit** des probabilités le long du chemin correspondant. Par exemple, pour $n = 3$: $P(S ; S ; S) = p \times (1 - p) \times p = p^2(1 - p)$.

Exemples de schémas de Bernoulli :

- lancer 10 fois une pièce ($n = 10$, $p = 0,5$) ;
- tirer **avec remise** 5 boules dans une urne qui contient 3 boules rouges sur 8 et compter les rouges ($n = 5$, $p = 3/8$) ;
- répondre au hasard aux 20 questions d'un QCM dont chacune a 4 propositions, une seule juste ($n = 20$, $p = 1/4$).

Contre-exemple : tirer **sans remise** 5 boules dans la même urne. La composition de l'urne change à chaque tirage, les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes : ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

Cas limite fréquent : tirer sans remise n individus dans une population **très grande** devant n . Le retrait de quelques individus modifie à peine les proportions, et l'on **assimile** ce tirage à un tirage avec remise. L'énoncé le précise en général.

3. Loi binomiale : définition et formule

Définition. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . La variable aléatoire X égale au **nombre de succès** obtenus au cours des n épreuves suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée $B(n, p)$. X prend les valeurs entières $0, 1, \dots, n$.

Théorème. Si X suit la loi $B(n, p)$, alors pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = C(n, k) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

Démonstration. L'événement $\{X = k\}$ est réalisé par toutes les listes de n issues comportant exactement k succès et $n - k$ échecs.

- **Probabilité d'une telle liste** : par indépendance, c'est le produit de k facteurs p et de $n - k$ facteurs $1 - p$, soit $p^k(1 - p)^{n-k}$, quelle que soit la place des succès.
- **Nombre de telles listes** : une liste est déterminée par le choix des k rangs (parmi les n) où se trouvent les succès. Il y a $C(n, k)$ façons de choisir ces rangs.

Ces listes correspondent à des chemins distincts de l'arbre, donc à des événements incompatibles. On additionne $C(n, k)$ fois la même probabilité, d'où la formule.

Le coefficient binomial $C(n, k)$ est le nombre de chemins de l'arbre qui réalisent exactement k succès parmi n épreuves.

Vérification. La somme des probabilités vaut bien 1 : par la formule du binôme, la somme des $C(n, k)p^k(1 - p)^{n-k}$ pour k de 0 à n est égale à $(p + (1 - p))^n = 1^n = 1$. C'est d'ailleurs de là que vient le nom « loi binomiale ».

Cas particuliers à connaître.

- $P(X = 0) = (1 - p)^n$: aucun succès, tous les facteurs valent $1 - p$.
- $P(X = n) = p^n$: que des succès.
- $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$: au moins un succès, par complémentaire.
- La loi $B(1, p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre p .

Reconnaître une loi binomiale

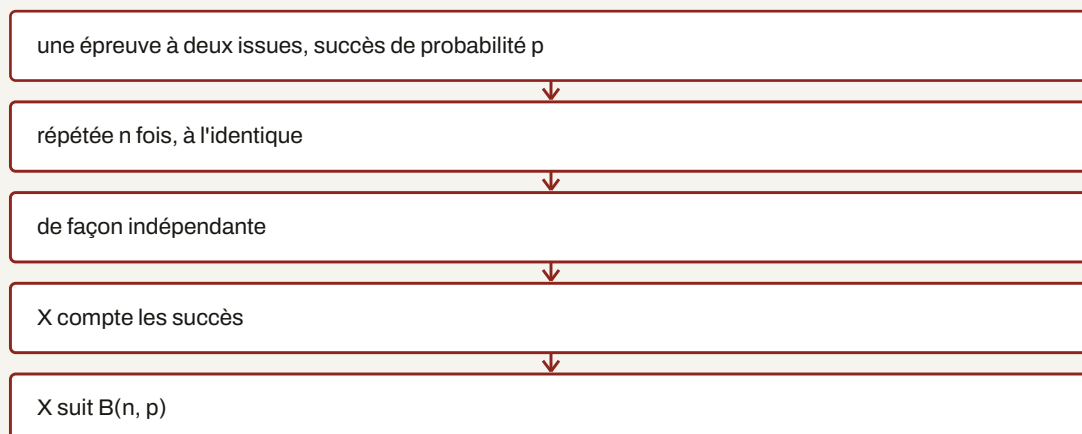


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Rédaction attendue au bac. « On répète n fois, de manière identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli dont le succès "..." a pour probabilité p . La variable aléatoire X , égale au nombre de succès, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$ » Chaque mot compte : épreuve à deux issues, identique, indépendante, X compte les succès.

4. Allure de la loi et symétries

On représente la loi $B(n, p)$ par un **diagramme en bâtons** : en abscisse les valeurs k , en ordonnée les probabilités $P(X = k)$.

- Pour $p = 0,5$, le diagramme est **symétrique** par rapport à $n/2$: $P(X = k) = P(X = n - k)$, car $C(n, k) = C(n, n - k)$ et $p^k(1 - p)^{n-k} = 0,5^n$ dans les deux cas.
- Pour $p < 0,5$, les probabilités sont concentrées sur les petites valeurs ; pour $p > 0,5$, sur les grandes.
- Les probabilités croissent puis décroissent : il existe une valeur (ou deux valeurs voisines) de probabilité maximale, appelée **mode**, proche de np (voir l'exercice 11).

Lien entre succès et échecs. Si X suit $B(n, p)$, le nombre d'échecs $Y = n - X$ suit $B(n, 1 - p)$: on échange simplement les rôles de S et S̄. Cela permet par exemple de calculer $P(X \geq 18)$ pour X de loi $B(20 ; 0,85)$ comme $P(Y \leq 2)$ pour Y de loi $B(20 ; 0,15)$.

Exemple de loi $B(10 ; 0,3)$, valeurs arrondies à 10^{-4} :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	0,0282	0,1211	0,2335	0,2668	0,2001	0,1029	0,0368	0,0090

Les valeurs pour $k = 8, 9, 10$ sont inférieures à 0,002. Le mode est 3, égal ici à $np = 3$.

5. Calculs de probabilités cumulées

En pratique, on a souvent besoin de probabilités du type « au plus k », « au moins k » ou « entre a et b succès ».

- $P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = k)$. On l'appelle **probabilité cumulée** ; la calculatrice la donne directement (fonction de répartition binomiale, par exemple « binomFRép » ou « BinomialCD » selon le modèle), tandis que $P(X = k)$ s'obtient par « binomFdp » ou « BinomialPD ».
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$, par complémentaire. Attention au décalage : le contraire de « $X \geq k$ » est « $X \leq k - 1$ », pas « $X \leq k$ ».
- $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$.

Comme X ne prend que des valeurs entières, $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$. Écrire l'événement en toutes lettres avant de le traduire évite la plupart des erreurs.

En Python, la fonction `comb` du module `math` donne $C(n, k)$: $P(X = k)$ s'obtient par l'expression `comb(n, k) * pow(p, k) * pow(1 - p, n - k)`, et $P(X \leq k)$ par une boucle qui additionne ces termes pour i allant de 0 à k .

Problème de seuil. On cherche souvent le plus petit nombre n d'épreuves pour lequel $P(X \geq 1)$ dépasse une valeur donnée $1 - \alpha$. Comme $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$, l'inéquation devient $(1 - p)^n \leq \alpha$. Avec le logarithme népérien, fonction strictement croissante : $n \ln(1 - p) \leq \ln(\alpha)$, puis, en divisant par $\ln(1 - p)$

qui est **strictement négatif** (le sens de l'inégalité change) :

$$n \geq \ln(\alpha)/\ln(1 - p).$$

On peut aussi procéder par balayage à la calculatrice (tableau de valeurs de $1 - (1 - p)^n$) ou par une boucle « tant que » en Python.

6. Espérance, variance et écart type

Théorème. Si X suit la loi $B(n, p)$:

$$E(X) = np ; V(X) = np(1 - p) ; \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

Justification. On note X_i la variable qui vaut 1 si la i -ème épreuve est un succès, 0 sinon. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p , et $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (on compte les succès un par un).

L'espérance d'une somme est la somme des espérances, donc $E(X) = n \times p$. Les X_i étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leurs variances, donc $V(X) = n \times p(1 - p)$. Ces deux propriétés des sommes de variables aléatoires sont établies dans le chapitre suivant.

Interprétation. $E(X) = np$ est le **nombre moyen de succès** que l'on obtiendrait en répétant un très grand nombre de fois le schéma de Bernoulli. Par exemple, sur 600 lancers d'un dé, on attend en moyenne $600 \times 1/6 = 100$ six. L'écart type mesure la dispersion autour de cette moyenne : ici $\sigma = \sqrt{600 \times 1/6 \times 5/6} = \sqrt{250/3} \approx 9,1$.

Fréquence de succès. La variable $F = X/n$ est la **fréquence** des succès. Par les propriétés de $aX + b$ vues en Première :

$$E(F) = p ; V(F) = p(1 - p)/n ; \sigma(F) = \sqrt{p(1 - p)}/\sqrt{n}.$$

La fréquence est centrée sur p , et sa dispersion **diminue quand n augmente**, proportionnellement à $1/\sqrt{n}$: pour diviser l'écart type par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4.

7. Intervalle de fluctuation

Soit X une variable de loi $B(n, p)$ et α un réel de $]0 ; 1[$ (souvent $\alpha = 0,05$). Un **intervalle de fluctuation** de X au seuil $1 - \alpha$ est un intervalle $[a ; b]$ tel que :

$$P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha.$$

Il donne une plage dans laquelle le nombre de succès se trouve « avec une forte probabilité ». La méthode usuelle, pour $\alpha = 0,05$, répartit le risque des deux côtés :

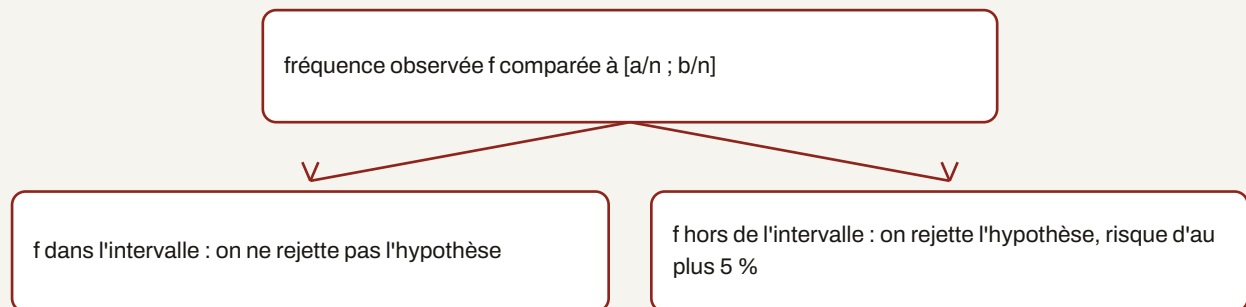
- a est le **plus petit entier** tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le **plus petit entier** tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Alors $P(X < a) = P(X \leq a - 1) \leq 0,025$ et $P(X > b) = 1 - P(X \leq b) \leq 0,025$, donc $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$. On détermine a et b à l'aide d'un tableau des probabilités cumulées. En divisant par n , on obtient l'intervalle de fluctuation de la **fréquence** : $[a/n ; b/n]$.

Prise de décision. On fait une hypothèse sur p (« la proportion vaut p dans la population »). On observe la fréquence f sur un échantillon de taille n .

- Si f n'appartient pas à $[a/n ; b/n]$, on **rejette** l'hypothèse, avec un risque d'erreur d'au plus 5 % (le risque de rejeter à tort une hypothèse vraie).
- Si f appartient à l'intervalle, on **ne rejette pas** l'hypothèse. Attention : cela ne prouve pas qu'elle est vraie, seulement que l'observation est compatible avec elle.

Décision au seuil de 95 %



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Ordre de grandeur. Lorsque n est grand ($n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$), l'intervalle $[p - 1,96 \sigma(F) ; p + 1,96 \sigma(F)]$ donne une approximation de l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %. Il permet de contrôler l'ordre de grandeur du résultat exact.

Exemples résolus

Exemple 1 : nombre de six en cinq lancers

On lance 5 fois un dé équilibré et l'on note X le nombre de 6 obtenus. a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. b) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 0)$, arrondies à 10^{-4} . c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6. d) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Résolution. a) Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « obtenir 6 », de probabilité $p = 1/6$. On répète 5 fois cette épreuve de manière identique et indépendante (les lancers n'influencent pas les uns sur les autres). X compte les succès, donc X suit la loi $B(5 ; 1/6)$. b) $P(X = 2) = C(5, 2) \times (1/6)^2 \times (5/6)^3 = 10 \times 1/36 \times 125/216 = 1250/7776 \approx 0,1608$. $P(X = 0) = (5/6)^5 = 3125/7776 \approx 0,4019$. c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 3125/7776 = 4651/7776 \approx 0,5981$. d) $E(X) = 5 \times 1/6 = 5/6 \approx 0,83$; $V(X) = 5 \times 1/6 \times 5/6 = 25/36$, donc $\sigma(X) = 5/6 \approx 0,83$.

Exemple 2 : répondre au hasard à un QCM

Un QCM comporte 10 questions indépendantes, chacune avec 4 propositions dont une seule est juste. Un candidat répond au hasard à chaque question. On note X le nombre de bonnes réponses. a) Donner la loi de X . b) Calculer $P(X = 5)$ puis $P(X \geq 6)$, arrondies à 10^{-4} . c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. d) Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque mauvaise en retire 0,5. Exprimer la note N en fonction de X et calculer $E(N)$.

Résolution. a) Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « répondre juste », de probabilité $1/4$. Les 10 réponses sont identiques et indépendantes, X compte les succès : X suit $B(10 ; 0,25)$. b) $P(X = 5) = C(10, 5) \times 0,25^5 \times 0,75^5 = 252 \times (1/1024) \times (243/1024) = 61236/1048576 \approx 0,0584$. Pour $P(X \geq 6)$, on écrit $P(X = k) = C(10, k) \times 3^{10-k}/4^{10}$, avec $4^{10} = 1048576$. Numérateurs : $k = 6 : 210 \times 81 = 17010$; $k = 7 : 120 \times 27 = 3240$; $k = 8 : 45 \times 9 = 405$; $k = 9 : 10 \times 3 = 30$; $k = 10 : 1$. Somme : 20686. Donc $P(X \geq 6) = 20686/1048576 \approx 0,0197$. (À la calculatrice : $1 - P(X \leq 5)$.) c) $E(X) = 10 \times 0,25 = 2,5$; $V(X) = 10 \times 0,25 \times 0,75 = 1,875$. d) Il y a X bonnes réponses et $10 - X$ mauvaises : $N = X - 0,5(10 - X) = 1,5X - 5$. Par linéarité, $E(N) = 1,5 \times 2,5 - 5 = -1,25$. Répondre au hasard fait perdre des points en moyenne : c'est le

rôle des points négatifs.

Exemple 3 : un problème de seuil

Un fabricant estime que chaque pièce produite est défectueuse avec une probabilité 0,02, indépendamment des autres. Combien de pièces faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de trouver au moins une pièce défectueuse dépasse 0,95 ?

Résolution. Pour n pièces contrôlées, le nombre X de pièces défectueuses suit la loi $B(n ; 0,02)$ (n épreuves identiques et indépendantes, succès « défectueuse »). On veut $P(X \geq 1) \geq 0,95$, c'est-à-dire $1 - 0,98^n \geq 0,95$, soit $0,98^n \leq 0,05$. La fonction $\ln$ est strictement croissante : $n \ln(0,98) \leq \ln(0,05)$. Comme $\ln(0,98) < 0$, on divise en changeant le sens : $n \geq \ln(0,05)/\ln(0,98) \approx (-2,9957)/(-0,0202) \approx 148,3$. Le plus petit entier convenable est $n = 149$. Contrôle : $0,98^{148} \approx 0,0503 > 0,05$ et $0,98^{149} \approx 0,0493 \leq 0,05$.

Exemple 4 : intervalle de fluctuation et décision

Dans une population, on admet que 20 % des individus portent un certain allèle. Dans un échantillon de 50 individus tirés au hasard (population assez grande pour assimiler le tirage à un tirage avec remise), on en compte 17 porteurs. On donne, pour X de loi $B(50 ; 0,2)$: $P(X \leq 4) \approx 0,0185$; $P(X \leq 5) \approx 0,0480$; $P(X \leq 15) \approx 0,9692$; $P(X \leq 16) \approx 0,9856$. a) Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %. b) L'échantillon remet-il en cause l'hypothèse « 20 % de porteurs » ?

Résolution. a) Le nombre X de porteurs suit $B(50 ; 0,2)$. Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est $a = 5$ (car $P(X \leq 4) \approx 0,0185 \leq 0,025$ et $P(X \leq 5) \approx 0,0480 > 0,025$). Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est $b = 16$. L'intervalle de fluctuation de la fréquence est $[5/50 ; 16/50] = [0,10 ; 0,32]$. b) La fréquence observée est $f = 17/50 = 0,34$, qui n'appartient pas à $[0,10 ; 0,32]$. **On rejette l'hypothèse** au seuil de 95 %, avec un risque d'erreur d'au plus 5 % : cet échantillon contient significativement plus de porteurs qu'attendu. Contrôle d'ordre de grandeur : $\sigma(F) = \sqrt{(0,2 \times 0,8)/50} \approx 0,0566$, et $0,2 \pm 1,96 \times 0,0566$ donne environ $[0,089 ; 0,311]$, proche du résultat exact.

Méthodes et pièges

- Pour justifier une loi binomiale, cite les quatre éléments : deux issues, paramètre p , n répétitions identiques et indépendantes, X compte les succès.
- Un tirage sans remise dans une petite urne n'est pas binomial ; un tirage dans une grande population peut être assimilé à un tirage avec remise si l'énoncé le permet.
- Écris toujours l'événement en toutes lettres : « au moins 3 » donne $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, avec le décalage de 1.
- Pour « au moins un succès », utilise directement $1 - (1 - p)^n$.
- Dans un problème de seuil, $\ln(1 - p)$ est négatif : le sens de l'inégalité change quand tu divises. Vérifie ta réponse avec n et $n - 1$.
- Ne confonds pas la variance $np(1 - p)$ et l'écart type $\sqrt{np(1 - p)}$.
- Pour un intervalle de fluctuation, a est le plus petit entier avec $P(X \leq a) > 0,025$ (inégalité stricte), b le plus petit avec $P(X \leq b) \geq 0,975$. Divise par n pour passer aux fréquences.
- Ne conclus jamais « l'hypothèse est vraie » quand la fréquence est dans l'intervalle : tu dis seulement que tu ne la rejettes pas.
- Arrondis seulement à la fin et donne les probabilités avec le nombre de décimales demandé.

Vers le PASS

En PASS et en LAS, la loi binomiale est la première loi discrète de la biostatistique. Elle modélise le nombre de répondants à un traitement dans un groupe de patients, le nombre d'enfants atteints dans une fratrie pour une maladie héréditaire (avec $p = 1/4$ pour un couple d'hétérozygotes et une transmission autosomique récessive), le nombre de bonnes réponses à un QCM répondu au hasard. La logique de l'intervalle de fluctuation devient celle des **tests statistiques** : hypothèse nulle, risque de première espèce α , décision de rejet. Pour n grand, la loi binomiale est approchée par une loi normale, ce qui justifie les intervalles en $1,96 \sigma$ que tu retrouveras en estimation.

Suite en PASS : Variables aléatoires et lois usuelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale ; si oui, donner ses paramètres.
 - Une urne contient 5 boules rouges et 3 noires. On tire 4 boules successivement avec remise ; X est le nombre de boules rouges.
 - Même urne, 4 tirages successifs sans remise ; X est le nombre de boules rouges.
 - On lance 10 fois un dé équilibré ; X est la somme des faces obtenues.
 - Dans une très grande population dont 30 % des personnes sont gauchères, on interroge 200 personnes au hasard ; X est le nombre de gauchers.
- X suit la loi $B(6 ; 0,4)$. Calculer $P(X = 2)$, $P(X = 0)$, $P(X \geq 1)$, puis $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- On lance 8 fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 piles, puis celle d'obtenir au moins 7 piles. Donner les valeurs exactes et arrondies à 10^{-4} .
- X suit la loi $B(200 ; 0,15)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 10^{-2}). Interpréter $E(X)$.
- X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .
 - Rappeler $E(X)$ et $V(X)$.
 - Montrer que $V(X) = 1/4 - (p - 1/2)^2$, puis pour quelle valeur de p la variance est maximale.

Niveau 2 : type bac

- Une graine d'une certaine variété germe avec une probabilité 0,85, indépendamment des autres. On sème 20 graines et l'on note X le nombre de graines qui germent.
 - Justifier que X suit une loi binomiale.
 - Calculer $P(X = 20)$ à 10^{-4} près.
 - À la calculatrice, calculer $P(X \geq 18)$ et $P(X \leq 15)$ à 10^{-4} près.
 - Calculer $E(X)$ et interpréter.
- À chaque tir, un joueur atteint la cible avec une probabilité 0,1, indépendamment des autres tirs.
 - Exprimer, en fonction de n , la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible en n tirs.
 - Déterminer le plus petit n pour lequel cette probabilité est supérieure ou égale à 0,999.
- Un semencier affirme que 25 % de ses graines ne germent pas. On sème 80 graines et l'on observe 30 graines qui ne germent pas. On suppose l'affirmation vraie et l'on note X le nombre de graines qui ne germent pas, de loi $B(80 ; 0,25)$. On donne : $P(X \leq 12) \approx 0,0221$; $P(X \leq 13) \approx 0,0421$; $P(X \leq 27) \approx 0,9705$; $P(X \leq 28) \approx 0,9834$.
 - Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des graines qui ne germent pas.
 - Peut-on remettre en cause l'affirmation du semencier ?

9. Un joueur mise 4 € puis lance 4 fois un dé équilibré. Il reçoit 5 € par 6 obtenu. On note X le nombre de 6 et G son gain algébrique (gain reçu moins mise).

- a) Donner la loi de X et exprimer G en fonction de X . b) Calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? c) Calculer $P(G > 0)$ et $P(G \geq 6)$ en valeurs exactes.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Un couple dont les deux membres sont hétérozygotes (Aa) pour un gène à transmission autosomique récessive a 4 enfants. Pour chaque enfant, la probabilité d'être homozygote aa est $1/4$, indépendamment des autres enfants. On note X le nombre d'enfants aa .

- a) Donner la loi de X . b) Calculer la probabilité qu'exactly un enfant soit aa . c) Calculer la probabilité qu'au moins un enfant soit aa , puis qu'au moins deux le soient. d) Calculer $E(X)$.

11. Mode d'une loi binomiale. X suit $B(n, p)$ avec $0 < p < 1$. Pour $0 \leq k \leq n - 1$, on pose $r(k) = P(X = k + 1)/P(X = k)$.

- a) Montrer que $r(k) = [(n - k)/(k + 1)] \times [p/(1 - p)]$. b) Montrer que $r(k) \geq 1$ si et seulement si $k \leq (n + 1)p - 1$. c) En déduire la valeur la plus probable de X lorsque X suit $B(10 ; 0,3)$.

12. Un traitement standard est efficace chez 60 % des patients. Un nouveau traitement est testé sur 50 patients : 38 répondent favorablement. On fait l'hypothèse que le nouveau traitement a la même efficacité que le standard, et l'on note X le nombre de répondants, de loi $B(50 ; 0,6)$. On donne : $P(X \leq 22) \approx 0,0160$; $P(X \leq 23) \approx 0,0314$; $P(X \leq 36) \approx 0,9720$; $P(X \leq 37) \approx 0,9867$.

- a) Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %. b) Que peut-on conclure ? Préciser le risque d'erreur.

13. Une variable X suit une loi binomiale d'espérance 12 et de variance 4,8.

- a) Déterminer les paramètres n et p . b) Calculer $\sigma(X)$ à 10^{-2} près. c) À la calculatrice, calculer $P(X = 12)$ à 10^{-4} près. Est-il vrai que la valeur moyenne est obtenue « une fois sur deux » ?

Corrigés

1. a) Chaque tirage est une épreuve à deux issues (rouge ou non) de succès « rouge », de probabilité $5/8$; les tirages avec remise sont identiques et indépendants ; X compte les succès. **X suit $B(4 ; 5/8)$.**

b) Sans remise, la composition de l'urne change : la probabilité de tirer rouge dépend des tirages précédents, les épreuves ne sont pas indépendantes. **X ne suit pas une loi binomiale.** c) X ne compte pas des succès et prend des valeurs de 10 à 60. **X ne suit pas une loi binomiale.** d) La population est très grande : on assimile le choix des 200 personnes à des tirages avec remise, identiques et indépendants, de succès « gaucher » de probabilité $0,3$. **X suit (approximativement) $B(200 ; 0,3)$.**

$$2. P(X = 2) = C(6, 2) \times 0,4^2 \times 0,6^4 = 15 \times 0,16 \times 0,1296 = \mathbf{0,31104}.$$

$$P(X = 0) = 0,6^6 = \mathbf{0,046656}. P(X \geq 1) = 1 - 0,046656 = \mathbf{0,953344}. E(X) = 6 \times 0,4 = \mathbf{2,4} ; V(X) = 6 \times 0,4 \times 0,6 = \mathbf{1,44} ; \sigma(X) = \sqrt{1,44} = \mathbf{1,2}.$$

$$3. X, \text{ nombre de piles, suit } B(8 ; 0,5), \text{ et } P(X = k) = C(8, k)/2^8 = C(8, k)/256.$$

$$P(X = 4) = C(8, 4)/256 = 70/256 = 35/128 \approx \mathbf{0,2734}. P(X \geq 7) = (C(8, 7) + C(8, 8))/256 = (8 + 1)/256 = 9/256 \approx \mathbf{0,0352}.$$

4. $E(X) = 200 \times 0,15 = \mathbf{30}$; $V(X) = 200 \times 0,15 \times 0,85 = \mathbf{25,5}$; $\sigma(X) = \sqrt{25,5} \approx \mathbf{5,05}$. Interprétation : en répétant un grand nombre de fois l'expérience, on obtient en moyenne 30 succès sur 200 épreuves.

5. a) $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

b) $1/4 - (p - 1/2)^2 = 1/4 - (p^2 - p + 1/4) = -p^2 + p = p(1 - p) = V(X)$. Un carré étant positif ou nul, $V(X) \leq 1/4$, avec égalité si et seulement si $p - 1/2 = 0$. La variance est maximale, égale à $1/4$, pour $p = 1/2$.

6. a) Chaque graine est une épreuve de Bernoulli de succès « germer », de probabilité 0,85. Les 20 graines germent indépendamment les unes des autres, avec la même probabilité. X compte les succès : X suit $B(20 ; 0,85)$.

b) $P(X = 20) = 0,85^{20} \approx 0,0388$. c) $P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) \approx 0,4049$; $P(X \leq 15) \approx 0,1702$. d) $E(X) = 20 \times 0,85 = 17$: sur un grand nombre de semis de 20 graines, il germe en moyenne 17 graines par semis.

7. a) Le nombre X de cibles atteintes en n tirs suit $B(n ; 0,1)$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^n$.

b) On résout $1 - 0,9^n \geq 0,999$, soit $0,9^n \leq 0,001$. Par croissance de $\ln$: $n \ln(0,9) \leq \ln(0,001)$. Comme $\ln(0,9) < 0$: $n \geq \ln(0,001)/\ln(0,9) \approx (-6,9078)/(-0,1054) \approx 65,6$. Le plus petit entier est $n = 66$. Contrôle : $0,9^{65} \approx 0,00106 > 0,001$ et $0,9^{66} \approx 0,00096 \leq 0,001$.

8. a) $P(X \leq 12) \approx 0,0221 \leq 0,025$ et $P(X \leq 13) \approx 0,0421 > 0,025$, donc $a = 13$. $P(X \leq 27) \approx 0,9705 < 0,975$ et $P(X \leq 28) \approx 0,9834 \geq 0,975$, donc $b = 28$. L'intervalle de fluctuation de la fréquence est $[13/80 ; 28/80] = [0,1625 ; 0,35]$.

b) La fréquence observée est $30/80 = 0,375$, qui n'appartient pas à l'intervalle. On rejette l'affirmation du semencier au seuil de 95 %, avec un risque d'erreur d'au plus 5 % : la proportion de graines qui ne germent pas semble supérieure à 25 %.

9. a) Quatre lancers identiques et indépendants, succès « obtenir 6 » de probabilité $1/6$: X suit $B(4 ; 1/6)$. Le joueur reçoit $5X$ euros et a misé 4 euros : $G = 5X - 4$.

b) $E(X) = 4/6 = 2/3$. Par linéarité, $E(G) = 5 \times 2/3 - 4 = 10/3 - 12/3 = -2/3 \approx -0,67$ €. L'espérance est négative : le jeu est défavorable au joueur. c) $G > 0$ équivaut à $5X > 4$, soit $X \geq 1$: $P(G > 0) = 1 - (5/6)^4 = 1 - 625/1296 = 671/1296 \approx 0,5177$. $G \geq 6$ équivaut à $5X \geq 10$, soit $X \geq 2$: $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. $P(X = 1) = 4 \times (1/6) \times (5/6)^3 = 500/1296$. Donc $P(G \geq 6) = 1 - 625/1296 - 500/1296 = 171/1296 \approx 0,1319$.

10. a) Quatre enfants, épreuves identiques et indépendantes de succès « enfant aa » de probabilité $1/4$: X suit $B(4 ; 1/4)$.

b) $P(X = 1) = C(4, 1) \times (1/4) \times (3/4)^3 = 4 \times 1/4 \times 27/64 = 27/64 \approx 0,4219$. c) $P(X \geq 1) = 1 - (3/4)^4 = 1 - 81/256 = 175/256 \approx 0,6836$. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 81/256 - 108/256 = 67/256 \approx 0,2617$ (on a écrit $27/64 = 108/256$). d) $E(X) = 4 \times 1/4 = 1$ enfant aa en moyenne par fratrie de 4.

11. a) $r(k) = [C(n, k+1)p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}] / [C(n, k)p^k(1-p)^{n-k}]$. Or $C(n, k+1)/C(n, k) = [n!/((k+1)!(n-k-1)!)] \times [k!(n-k)!/n!] = (n-k)/(k+1)$. Les puissances se simplifient en $p/(1-p)$. Donc $r(k) = [(n-k)/(k+1)] \times [p/(1-p)]$.

b) Tous les termes sont strictement positifs. $r(k) \geq 1$ équivaut à $(n-k)p \geq (k+1)(1-p)$, soit $np - kp \geq k + 1 - kp - p$, soit $np + p - 1 \geq k$. **$r(k) \geq 1$ si et seulement si $k \leq (n+1)p - 1$.** c) Pour $n = 10$ et $p = 0,3$: $(n+1)p - 1 = 3,3 - 1 = 2,3$. Pour $k = 0, 1, 2$, on a $r(k) > 1$: $P(X = 0) < P(X = 1) < P(X = 2) < P(X = 3)$. Pour $k \geq 3$, $r(k) < 1$: $P(X = 3) > P(X = 4) > \dots$ La valeur la plus probable est $k = 3$, avec $P(X = 3) \approx 0,2668$ (contre 0,2335 pour $k = 2$ et 0,2001 pour $k = 4$).

12. a) $a = 23$, car $P(X \leq 22) \approx 0,0160 \leq 0,025$ et $P(X \leq 23) \approx 0,0314 > 0,025$. $b = 37$, car $P(X \leq 36) \approx 0,9720 < 0,975$ et $P(X \leq 37) \approx 0,9867 \geq 0,975$. Intervalle de fluctuation de la fréquence : $[23/50 ; 37/50] = [0,46 ; 0,74]$.

b) La fréquence observée est $38/50 = 0,76$, hors de l'intervalle. **On rejette l'hypothèse** « même efficacité que le traitement standard », au seuil de 95 %, avec un risque d'erreur d'au plus 5 %. L'observation est en faveur d'une efficacité supérieure à 60 %, ce qu'il faudrait confirmer par un essai plus large.

13. a) $E(X) = np = 12$ et $V(X) = np(1-p) = 4,8$. En divisant : $1-p = 4,8/12 = 0,4$, donc **$p = 0,6$** , puis $n = 12/0,6 = 20$.

b) $\sigma(X) = \sqrt{4,8} \approx 2,19$. c) $P(X = 12) = C(20, 12) \times 0,6^{12} \times 0,4^8 \approx 0,1797$. **Non** : la valeur moyenne 12 n'est obtenue que dans moins d'un cas sur cinq. L'espérance est une moyenne sur un grand nombre d'expériences, pas une valeur obtenue avec une forte probabilité.