

# Fiche : Loi binomiale

## FICHE • M18 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

### Sommaire du cours

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| L'essentiel                         | 1 |
| Formules et définitions à connaître | 2 |
| Pièges à éviter                     | 2 |
| Je me teste                         | 3 |

## L'essentiel

- Une épreuve de Bernoulli a deux issues, succès de probabilité  $p$  et échec de probabilité  $1 - p$ .
- La variable qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la loi de Bernoulli :  $E = p$  et  $V = p(1 - p)$ .
- La variance d'une loi de Bernoulli est maximale, égale à  $1/4$ , pour  $p = 1/2$ .
- Un schéma de Bernoulli répète  $n$  fois la même épreuve, de façon identique et indépendante.
- Dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.
- Le nombre  $X$  de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  suit la loi binomiale  $B(n, p)$ .
- $C(n, k)$  est le nombre de chemins de l'arbre qui comportent exactement  $k$  succès.
- Un tirage sans remise dans une petite urne n'est pas binomial ; dans une très grande population, on l'assimile à un tirage avec remise.
- Pour  $p = 0,5$  la loi est symétrique par rapport à  $n/2$  ; le nombre d'échecs  $n - X$  suit  $B(n, 1 - p)$ .
- La probabilité d'au moins un succès vaut  $1 - (1 - p)^n$ , et un seuil se trouve avec  $\ln$  en changeant le sens de l'inégalité.
- L'espérance  $np$  est le nombre moyen de succès, et l'écart type  $\sqrt{np(1 - p)}$  mesure la dispersion.
- La fréquence  $F = X/n$  a pour espérance  $p$  et pour écart type  $\sqrt{p(1 - p)}/\sqrt{n}$ , qui diminue quand  $n$  augmente.
- Un intervalle de fluctuation  $[a ; b]$  au seuil de 95 % vérifie  $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$ .
- Si la fréquence observée sort de  $[a/n ; b/n]$ , on rejette l'hypothèse sur  $p$  avec un risque d'au plus 5 % ; sinon on ne la rejette pas, sans la prouver.



## Formules et définitions à connaître

| Grandeur              | Formule                                                                                                       | Condition                                |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $P(X = k)$            | $C(n, k) p^k (1 - p)^{n-k}$                                                                                   | $X$ de loi $B(n, p)$ , $0 \leq k \leq n$ |
| $P(X = 0)$            | $(1 - p)^n$                                                                                                   |                                          |
| $P(X \geq 1)$         | $1 - (1 - p)^n$                                                                                               |                                          |
| $P(X \geq k)$         | $1 - P(X \leq k - 1)$                                                                                         | $k$ entier                               |
| $P(a \leq X \leq b)$  | $P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$                                                                               | $a, b$ entiers                           |
| $E(X)$                | $np$                                                                                                          |                                          |
| $V(X)$                | $np(1 - p)$                                                                                                   |                                          |
| $\sigma(X)$           | $\sqrt{np(1 - p)}$                                                                                            |                                          |
| $E(F), \sigma(F)$     | $p, \sqrt{(p(1 - p))/n}$                                                                                      | $F = X/n$                                |
| seuil                 | $n \geq \ln(\alpha)/\ln(1 - p)$                                                                               | pour $(1 - p)^n \leq \alpha$             |
| bornes de fluctuation | $a$ : plus petit entier avec $P(X \leq a) > 0,025$<br>; $b$ : plus petit entier avec $P(X \leq b) \geq 0,975$ | seuil de 95 %                            |

## Pièges à éviter

- Oublier de citer « identiques et indépendantes » dans la justification d'une loi binomiale.



- Écrire  $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k)$  au lieu de  $1 - P(X \leq k - 1)$ .
- Ne pas changer le sens de l'inégalité en divisant par  $\ln(1 - p)$ , qui est négatif.
- Confondre variance et écart type.
- Conclure qu'une hypothèse est vraie parce que la fréquence est dans l'intervalle de fluctuation.
- Croire que la valeur  $np$  est obtenue avec une forte probabilité.

## Je me teste

1. Loi du nombre de 6 en 5 lancers d'un dé ?  $\rightarrow B(5 ; 1/6)$ .
2. Espérance et variance d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  ?  $\rightarrow p$  et  $p(1 - p)$ .
3.  $P(X = 2)$  pour  $X$  de loi  $B(6 ; 0,4)$  ?  $\rightarrow 15 \times 0,4^2 \times 0,6^4 = 0,31104$ .
4. Espérance de  $B(200 ; 0,15)$  ?  $\rightarrow 30$ .
5.  $P(X \geq 1)$  pour  $X$  de loi  $B(n, p)$  ?  $\rightarrow 1 - (1 - p)^n$ .
6. Plus petit  $n$  tel que  $1 - 0,98^n \geq 0,95$  ?  $\rightarrow 149$ .
7. Tirages sans remise dans une urne de 8 boules : binomial ?  $\rightarrow$  Non, épreuves non indépendantes.
8. Paramètres si  $E = 12$  et  $V = 4,8$  ?  $\rightarrow p = 0,6$  et  $n = 20$ .
9. Fréquence 0,34 et intervalle  $[0,10 ; 0,32]$  ?  $\rightarrow$  On rejette l'hypothèse au risque de 5 %.
10. Écart type de la fréquence pour  $n = 50$  et  $p = 0,2$  ?  $\rightarrow \sqrt{(0,16)/50} \approx 0,057$ .