



Fiche : Dénombrement et combinatoire

FICHE • M17 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments ; l'ensemble vide a pour cardinal 0.
- Principe additif : le cardinal d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints est la somme de leurs cardinaux.
- Si A et B ne sont pas disjoints, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- Le complémentaire vérifie $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$: c'est l'outil des énoncés « au moins un ».
- Principe multiplicatif : $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$, et un arbre de choix successifs compte le produit des nombres d'options.
- Un k-uplet est une liste ordonnée de k éléments, avec répétition possible ; il y en a n^k dans un ensemble à n éléments.
- Un ensemble à n éléments possède 2^n parties, grâce à la bijection avec les n-uplets de 0 et de 1.
- Un arrangement est un k-uplet d'éléments distincts ; il y en a $n!/(n-k)!$, produit de k facteurs décroissants à partir de n.
- Une permutation range tous les n éléments ; il y en a $n!$, avec la convention $0! = 1$.
- Une combinaison est une partie à k éléments, sans ordre ni répétition ; il y en a $C(n, k) = n!/(k!(n-k)!)$.
- Chaque combinaison correspond à k! arrangements, d'où $C(n, k) \times k! = n!/(n-k)!$.
- Les coefficients vérifient la symétrie $C(n, k) = C(n, n-k)$ et la relation de Pascal $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$.
- La somme de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n .
- Formule du binôme : $(a+b)^n$ est la somme des $C(n, k)a^{n-k}b^k$ pour k de 0 à n.
- Tirages successifs avec remise : k-uplets ; successifs sans remise : arrangements ; simultanés : combinaisons.
- En équiprobabilité, $P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega)$, avec A et Ω comptés dans le même modèle.



Formules et définitions à connaître

Objet	Ordre	Répétition	Nombre	Condition
k-uplet	oui	oui	n^k	$k \geq 1$
arrangement	oui	non	$n!/(n-k)!$	$1 \leq k \leq n$
permutation	oui	non	$n!$	$k = n$
combinaison	non	non	$C(n, k) = n!/(k!(n-k)!)$	$0 \leq k \leq n$
parties de E			2^n	$\text{card}(E) = n$

- $C(n, 0) = C(n, n) = 1$; $C(n, 1) = n$; $C(n, 2) = n(n-1)/2$.
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Ligne 5 du triangle : 1, 5, 10, 10, 5, 1 ; ligne 6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Pièges à éviter

- Confondre n^k (avec répétition) et $n!/(n-k)!$ (sans répétition).
- Utiliser des arrangements pour un tirage simultané, où l'ordre ne compte pas.
- Compter « au moins un as » en fixant un as puis en complétant librement : les mains à plusieurs as sont comptées plusieurs fois.
- Additionner des cas qui ne sont pas disjoints.
- Oublier les signes alternés dans $(a-b)^n$ ou la puissance du coefficient dans $(3x+1)^n$.
- Compter l'événement en ordonné et l'univers en non ordonné.

Je me teste

1. Nombre de codes de 4 chiffres ? $\rightarrow 10^4 = 10\,000$.
2. Nombre de codes de 4 chiffres distincts ? $\rightarrow 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.
3. Valeur de $0!$? $\rightarrow 1$.
4. $C(10, 3)$? $\rightarrow 120$.
5. $C(20, 18)$? $\rightarrow C(20, 2) = 190$.
6. Nombre de parties d'un ensemble à 5 éléments ? $\rightarrow 2^5 = 32$.
7. Relation de Pascal ? $\rightarrow C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$.
8. Coefficient de x^3 dans $(3x+1)^7$? $\rightarrow C(7, 3) \times 3^3 = 945$.
9. Nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 ? $\rightarrow C(32, 5) = 201\,376$.
10. Nombre d'anagrammes de PASS ? $\rightarrow 4!/2! = 12$.