

Calcul intégral

COURS • M16 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Interpréter l'intégrale d'une fonction continue et positive comme une aire, exprimée en unités d'aire, et la calculer géométriquement dans les cas simples.
- Énoncer et utiliser le lien entre intégrale et primitive : si F est une primitive de f , $\int$ de a à b de $f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Justifier que la fonction $x \mapsto \int$ de a à x de $f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- Utiliser la linéarité, la relation de Chasles, la positivité et la croissance de l'intégrale pour calculer ou encadrer une intégrale.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle et l'interpréter.
- Calculer l'aire du domaine compris entre deux courbes, après avoir étudié leur position relative.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties, en choisissant judicieusement les deux fonctions.
- Étudier une suite d'intégrales (relation de récurrence, encadrement, limite).
- Utiliser l'intégrale pour calculer une quantité cumulée (distance à partir d'une vitesse, aire sous la courbe d'une concentration).

Cours

1. Intégrale d'une fonction continue et positive

Dans un repère orthogonal $(O ; I, J)$, l'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ . Si l'unité vaut 2 cm sur chaque axe, $1 \text{ u.a.} = 4 \text{ cm}^2$.

Définition. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$. L'**intégrale de f de a à b** , notée $\int$ de a à b de $f(x) dx$, est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Vocabulaire : a et b sont les **bornes** de l'intégrale ; la variable x est **muette** : $\int$ de a à b de $f(x) dx = \int$ de a à b de $f(t) dt$. Le symbole $\int$ est un S allongé (somme) et dx rappelle une petite largeur : l'intégrale est la limite de sommes d'aires de rectangles fins $f(x) \times dx$.

Exemples géométriques :

- pour une constante $k \geq 0$, $\int$ de a à b de $k dx = k(b - a)$ (rectangle) ;
- $\int$ de 0 à 2 de $x dx = 2$ (triangle de base 2 et de hauteur 2, d'aire $2 \times 2 / 2$) ;
- $\int$ de -1 à 1 de $\sqrt{1 - x^2} dx = \pi/2$ (demi-disque de rayon 1) ;
- $\int$ de a à a de $f(x) dx = 0$.

Méthode des rectangles. Pour approcher l'intégrale d'une fonction monotone, on découpe $[a ; b]$ en n intervalles de même largeur $h = (b - a)/n$ et on additionne les aires des rectangles de hauteur $f(x_k)$. Pour une fonction croissante, les rectangles construits à gauche donnent une valeur par défaut et ceux construits à droite une valeur par excès ; l'écart entre les deux vaut $h \times |f(b) - f(a)|$ et tend vers 0 quand n augmente. Cette idée se programme facilement avec une boucle.

2. Fonction intégrale et théorème fondamental

Théorème fondamental. Si f est continue et positive sur $[a ; b]$, la fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int$ de a à x de $f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$, et $F' = f$. C'est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration dans le cas où f est de plus **croissante**. Soit x dans $[a ; b]$ et $h > 0$ tel que $x + h \leq b$. La différence $F(x + h) - F(x)$ est l'aire sous la courbe entre x et $x + h$. Comme f est croissante, cette bande est comprise entre le rectangle de hauteur $f(x)$ et celui de hauteur $f(x + h)$: $h f(x) \leq F(x + h) - F(x) \leq h f(x + h)$, d'où $f(x) \leq (F(x + h) - F(x))/h \leq f(x + h)$. Quand h tend vers 0, $f(x + h)$ tend vers $f(x)$ par continuité, et le théorème des gendarmes donne que le taux d'accroissement tend vers $f(x)$. On raisonne de même pour $h < 0$. Donc F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Ce théorème justifie l'existence de primitives admise au chapitre précédent : **toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.**

Du calcul d'aire au calcul de primitive

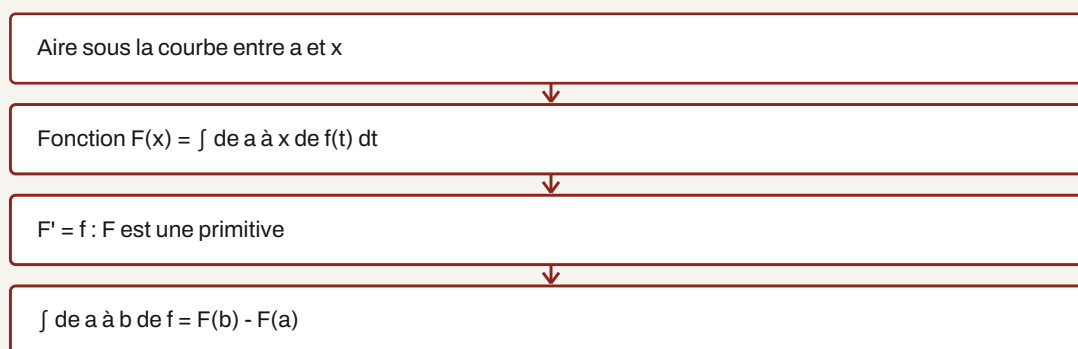


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

3. Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f continue et positive sur $[a ; b]$ et G une primitive quelconque de f . Les deux primitives G et F (la fonction intégrale) diffèrent d'une constante C , donc $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) - 0 = \int_a^b f$.

Propriété. Si f est continue sur un intervalle I contenant a et b , et si F est une primitive de f sur I , alors

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, que l'on note $[F(x)]$ de a à b .

Pour une fonction continue **de signe quelconque**, on prend cette égalité comme **définition** de l'intégrale. Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie, puisque la constante C disparaît dans la différence. Cette définition permet aussi $a > b$, et l'on a $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Exemples :

- $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6$;
- $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$;
- $\int_1^e (1/x) dx = [\ln x]_1^e = 1 - 0 = 1$;
- $\int_0^1 e^{2x} dx = [e^{2x}/2]_0^1 = (e^2 - 1)/2$.

Interprétation du signe. Si f est négative sur $[a ; b]$ (avec $a < b$), son intégrale est l'**opposé de l'aire** du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses. Si f change de signe, l'intégrale est une **aire algébrique** : les parties au-dessus de l'axe comptent positivement, celles en dessous négativement. Par exemple $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$, alors que l'aire du domaine entre la courbe et l'axe vaut $2 + 2 = 4$ u.a.

4. Propriétés de l'intégrale

Soient f et g continues sur un intervalle I , a, b, c dans I et λ un réel.

Linéarité. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Justification : si F et G sont des primitives de f et g , $F + G$ et λF sont des primitives de $f + g$ et λf .

Relation de Chasles. $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Justification : $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$. Pour une fonction positive et $a < b < c$, c'est l'additivité des aires. Elle sert à découper un intervalle là où la fonction change d'expression ou de signe.

Positivité. Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

Croissance (comparaison). Si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Justification : $g - f \geq 0$, donc par positivité et linéarité $\int (g - f) = \int g - \int f \geq 0$.

Inégalité de la moyenne. Si $a \leq b$ et $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a ; b]$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$.

Attention à l'ordre des bornes : ces trois propriétés exigent $a \leq b$. Si $a > b$, les inégalités s'inversent.

Exemple d'encadrement. Pour x dans $[0 ; 1]$, $0 \leq x^2 \leq x$, donc $0 \leq x^2 e^{-x} \leq x e^{-x}$. On peut ainsi comparer deux intégrales sans les calculer.

Propriété	Écriture	Condition
Linéarité	$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$	f, g continues
Chasles	$\int \text{de } a \text{ à } c = \int \text{de } a \text{ à } b + \int \text{de } b \text{ à } c$	
Inversion des bornes	$\int \text{de } b \text{ à } a \text{ de } f = - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f$	
Positivité	$f \geq 0$ donne $\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f \geq 0$	$a \leq b$
Croissance	$f \leq g$ donne $\int f \leq \int g$	$a \leq b$
Moyenne	$m(b-a) \leq \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f \leq M(b-a)$	$a \leq b$

5. Valeur moyenne d'une fonction

Définition. Soit f continue sur $[a ; b]$, avec $a < b$. La **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ est le réel

$$\mu = (1/(b-a)) \times \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f(x) \, dx.$$

Interprétation : pour f positive, μ est la hauteur du rectangle de base $[a ; b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe. On « aplatit » la courbe en conservant l'aire. D'après l'inégalité de la moyenne, μ est compris entre le minimum et le maximum de f sur $[a ; b]$.

Exemples :

- valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0 ; 3]$: $(1/3) \times [x^3/3] \text{ de } 0 \text{ à } 3 = (1/3) \times 9 = 3$;
- valeur moyenne de $\sin$ sur $[0 ; \pi]$: $(1/\pi) \times 2 = 2/\pi \approx 0,64$;
- pour une fonction affine, la valeur moyenne sur $[a ; b]$ est égale à la valeur au milieu, $f((a+b)/2)$.

En sciences, la valeur moyenne d'une grandeur sur une durée est une moyenne temporelle : température moyenne d'une journée, concentration moyenne d'un médicament entre deux prises, puissance moyenne. Pour une vitesse $v(t)$, la distance parcourue entre t_1 et t_2 vaut $\int \text{de } t_1 \text{ à } t_2 \text{ de } v(t) \, dt$ (si $v \geq 0$), et la vitesse moyenne est la valeur moyenne de v .

6. Aire entre deux courbes

Propriété. Si f et g sont continues sur $[a ; b]$ ($a < b$) et $f \geq g$ sur $[a ; b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut

$$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } (f(x) - g(x)) \, dx \text{ unités d'aire.}$$

Justification : si f et g sont positives, c'est la différence des aires sous chaque courbe. Sinon, on ajoute une même constante k aux deux fonctions pour les rendre positives, ce qui translate le domaine sans changer son aire ni la différence $f - g$.

Calculer l'aire entre deux courbes

1. Résoudre $f(x) = g(x)$ pour trouver les points d'intersection • 2. Étudier le signe de $f - g$ sur chaque intervalle • 3. Intégrer (courbe du dessus) - (courbe du dessous) • 4. Additionner les morceaux, convertir les u.a. si demandé

Si les courbes se croisent dans $[a ; b]$, on découpe avec la relation de Chasles et on intègre, sur chaque morceau, la fonction du dessus moins celle du dessous : l'aire vaut $\int$ de a à b de $|f - g|$.

Exemple. Entre les courbes de $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0 ; 1]$, on a $x \geq x^2$, donc l'aire vaut $\int$ de 0 à 1 de $(x - x^2)$ $dx = [x^2/2 - x^3/3]$ de 0 à 1 = $1/2 - 1/3 = 1/6$ u.a.

7. Intégration par parties

Toutes les fonctions n'ont pas de primitive évidente : $x e^x$, $\ln x$ ou $x \sin x$ ne sont pas dans le tableau. L'intégration par parties ramène leur calcul à celui d'une intégrale plus simple.

Théorème. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$, de dérivées u' et v' continues. Alors

$$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)] \text{ de } a \text{ à } b - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } u'(x) v(x) dx.$$

Démonstration. La fonction uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions $u'v$ et uv' sont continues, donc intégrables, et uv est une primitive de $u'v + uv'$. Ainsi $\int$ de a à b de $(u'v + uv') = [uv]$ de a à b . Par linéarité, $\int$ de a à b de $uv' = [uv]$ de a à b - $\int$ de a à b de $u'v$.

Choix de u et v' : on dérive la fonction qui se **simplifie** en la dérivant et on primitive celle qu'on sait **primitiver**.

- Un polynôme multiplié par e^x , $\sin x$ ou $\cos x$: u = le polynôme (son degré baisse), $v' =$ l'autre facteur.
- Un polynôme multiplié par $\ln x$: $u = \ln x$ (sa dérivée $1/x$ est simple), $v' =$ le polynôme.

Exemple 1. $I = \int$ de 0 à 1 de $x e^x dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$: $I = [x e^x]$ de 0 à 1 - $\int$ de 0 à 1 de $e^x dx = e - [e^x]$ de 0 à 1 = $e - (e - 1) = 1$.

Exemple 2. $J = \int$ de 1 à e de $\ln x dx$. On écrit $\ln x = \ln x \times 1$, avec $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$, $u'(x) = 1/x$, $v(x) = x$: $J = [x \ln x]$ de 1 à e - $\int$ de 1 à e de $(1/x) \times x dx = (e \times 1 - 0) - (e - 1) = 1$. On en déduit au passage que $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$.

8. Quantités cumulées et suites d'intégrales

L'intégrale sert à **cumuler** une grandeur qui varie : si $r(t)$ est un débit (en $L \cdot s^{-1}$, en $mg \cdot h^{-1}$...), la quantité accumulée entre t_1 et t_2 vaut $\int$ de t_1 à t_2 de $r(t) dt$. Si $C(t)$ est la concentration d'un médicament dans le plasma, l'**aire sous la courbe** (souvent notée ASC, en $mg \cdot h \cdot L^{-1}$) $\int$ de 0 à T de $C(t) dt$ mesure l'exposition de l'organisme au médicament sur la durée T .

Une **suite d'intégrales** est définie par $I_n = \int$ de a à b de $f_n(x) dx$. On l'étudie typiquement :

- par une **intégration par parties** qui donne une relation entre I_{n+1} et I_n ;
- par la **croissance de l'intégrale** pour obtenir son sens de variation (si $f_{n+1} \leq f_n$, alors $I_{n+1} \leq I_n$) ;
- par un **encadrement** qui donne sa limite (théorème des gendarmes).

Outils pour une intégrale qu'on ne sait pas calculer directement

Reconnaître une forme composée

Intégration par parties

Relation de Chasles pour découper

Encadrement par comparaison

Méthode des rectangles pour approcher

Repères complémentaires, sans séquence causale

Exemples résolus

Exemple 1 : calculs d'intégrales

Énoncé. Calculer : $A = \int \text{de } 0 \text{ à } 2 \text{ de } (3x^2 - 2x + 1) dx$; $B = \int \text{de } 0 \text{ à } \ln 2 \text{ de } e^{2x} dx$; $C = \int \text{de } 0 \text{ à } 1 \text{ de } x/(x^2 + 1) dx$; $D = \int \text{de } 0 \text{ à } \pi/2 \text{ de } \cos x dx$.

Résolution. $A = [x^3 - x^2 + x] \text{ de } 0 \text{ à } 2 = (8 - 4 + 2) - 0$, $A = 6$. B : une primitive de e^{2x} est $e^{2x}/2$. $B = (e^{2 \ln 2} - e^0)/2 = (4 - 1)/2$, car $e^{2 \ln 2} = e^{\ln 4} = 4$. $B = 3/2$. C : avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $x/(x^2 + 1) = (1/2) u'/u$, de primitive $(1/2) \ln(x^2 + 1)$. $C = (1/2)(\ln 2 - \ln 1)$, $C = (\ln 2)/2 \approx 0,347$. $D = [\sin x] \text{ de } 0 \text{ à } \pi/2 = 1 - 0$, $D = 1$.

Exemple 2 : aire entre une parabole et une droite

Énoncé. Soient $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x + 2$. Le repère a pour unités 1 cm sur chaque axe. a) Déterminer les abscisses des points d'intersection des deux courbes. b) Étudier la position relative des courbes entre ces points. c) Calculer l'aire du domaine qu'elles délimitent, en cm^2 .

Résolution. a) $f(x) = g(x)$ équivaut à $-x^2 + 4 = x + 2$, soit $x^2 + x - 2 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 8 = 9$, les racines sont $(-1 + 3)/2 = 1$ et $(-1 - 3)/2 = -2$. **Les courbes se coupent en $x = -2$ et $x = 1$.** b) $f(x) - g(x) = -x^2 - x + 2 = -(x - 1)(x + 2)$. Ce trinôme, de coefficient dominant négatif, est positif entre ses racines : **sur $[-2 ; 1]$, la parabole est au-dessus de la droite.** c) Aire = $\int \text{de } -2 \text{ à } 1 \text{ de } (-x^2 - x + 2) dx = [-x^3/3 - x^2/2 + 2x] \text{ de } -2 \text{ à } 1$. En 1 : $-1/3 - 1/2 + 2 = 7/6$. En -2 : $8/3 - 2 - 4 = -10/3$. Aire = $7/6 - (-10/3) = 7/6 + 20/6 = 27/6 = 9/2$. Avec 1 u.a. = 1 cm^2 : **aire = 4,5 cm^2 .**

Exemple 3 : exposition à un médicament

Énoncé. Après une prise orale, la concentration plasmatique d'un médicament est modélisée par $C(t) = 20 t e^{-t}$, t en heures, C en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, pour t dans $[0 ; 6]$. a) Montrer que $G(t) = -(t + 1) e^{-t}$ est une primitive de $t \mapsto t e^{-t}$, puis retrouver ce résultat par intégration par parties. b) Calculer l'aire sous la courbe ASC = $\int \text{de } 0 \text{ à } 6 \text{ de } C(t) dt$. c) En déduire la concentration moyenne sur les six premières heures et la comparer au maximum de C .

Résolution. a) $G'(t) = -e^{-t} - (t + 1) \times (-e^{-t}) = -e^{-t} + (t + 1) e^{-t} = t e^{-t}$. Par parties, avec $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t}$, $u'(t) = 1$, $v(t) = -e^{-t}$: $\int \text{de } 0 \text{ à } x \text{ de } t e^{-t} dt = [-t e^{-t}] \text{ de } 0 \text{ à } x + \int \text{de } 0 \text{ à } x \text{ de } e^{-t} dt = -x e^{-x} + 1 - e^{-x} = 1 - (x + 1) e^{-x} =$

$G(x) - G(0)$. Les deux méthodes concordent. b) $ASC = 20 [G(t)]$ de 0 à 6 = $20(-7e^{-6} + 1) = 20(1 - 7e^{-6})$. Avec $e^{-6} \approx 0,002\,479$: $ASC \approx 19,7 \text{ mg}\cdot\text{h}\cdot\text{L}^{-1}$. c) Valeur moyenne : $\mu = ASC/6 \approx 3,3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. Le maximum : $C'(t) = 20 e^{-t}(1 - t)$, positif avant 1 et négatif après, donc le maximum vaut $C(1) = 20/e \approx 7,4 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$, atteint à $t = 1 \text{ h}$. La moyenne vaut moins de la moitié du pic, car la concentration décroît ensuite pendant cinq heures.

Méthodes et pièges

- Pour calculer $\int$ de a à b de f, cherche une primitive F, vérifie-la en dérivant, puis calcule $F(b) - F(a)$ dans cet ordre, sans oublier les parenthèses autour de $F(a)$ quand elle est négative.
- Une intégrale n'est une aire que si la fonction est positive et $a \leq b$: pour une aire, étudie d'abord le signe et découpe avec la relation de Chasles.
- Pour une aire entre deux courbes, intègre toujours (courbe du dessus) - (courbe du dessous) : le résultat doit être positif. Un résultat négatif signale une erreur de position relative.
- Exprime le résultat d'une aire en unités d'aire, puis convertis en cm^2 si les unités graphiques sont données (1 u.a. = produit des unités des deux axes).
- Positivité, croissance et inégalité de la moyenne ne valent que si la borne inférieure est la plus petite.
- En intégration par parties, n'oublie pas le crochet $[uv]$ et le signe moins devant la seconde intégrale ; choisis u de façon que u' soit plus simple que u.
- La valeur moyenne se divise par la longueur $b - a$ de l'intervalle, pas par b.
- Ne confonds pas $\int$ de 0 à 2π de $\sin x \, dx = 0$ (aire algébrique) et l'aire géométrique, égale à 4 u.a.

Vers le PASS

En PASS, l'intégrale est l'outil de toutes les grandeurs cumulées. En pharmacocinétique, l'aire sous la courbe des concentrations sert à calculer la biodisponibilité d'une forme orale (rapport des aires sous la courbe orale et intraveineuse) et la clairance (dose divisée par l'aire sous la courbe totale). En physiologie, on intègre un débit pour obtenir un volume (volume courant de la respiration, débit cardiaque mesuré par dilution d'un indicateur). En physique, le travail d'une force variable, la charge électrique transportée par un courant ou l'énergie absorbée en dosimétrie s'écrivent comme des intégrales. En biostatistique enfin, une probabilité associée à une loi continue (comme la loi normale) est l'aire sous une courbe de densité.

Suite en PASS : Intégrales, aires et quantités cumulées

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Calculer : a) $\int$ de 1 à 3 de $(2x + 1) \, dx$; b) $\int$ de 0 à 1 de $e^x \, dx$; c) $\int$ de 1 à e de $(1/x) \, dx$; d) $\int$ de 0 à π de $\sin x \, dx$; e) $\int$ de -1 à 1 de $x^3 \, dx$.
2. a) Calculer géométriquement $\int$ de 0 à 4 de $(x/2 + 1) \, dx$, puis vérifier à l'aide d'une primitive.
b) Calculer géométriquement $\int$ de -2 à 2 de $\sqrt{4 - x^2} \, dx$.
3. Calculer à l'aide d'une primitive de fonction composée : a) $\int$ de 0 à 1 de $2x e^{x^2} \, dx$; b) $\int$ de 0 à 1 de $1/(x + 1) \, dx$; c) $\int$ de 0 à $\pi/4$ de $\cos(2x) \, dx$; d) $\int$ de 0 à 1 de $(2x + 1)^2 \, dx$.

4. On sait que $\int_0^2 f = 3$, $\int_2^5 f = -1$ et $\int_0^5 g = 4$. Calculer : a) $\int_0^5 f$; b) $\int_0^5 (2f - 3g)$; c) $\int_5^0 f$; d) $\int_2^0 f$.
5. Calculer la valeur moyenne : a) de $x \mapsto x^2$ sur $[0 ; 3]$; b) de $\sin$ sur $[0 ; \pi]$; c) de $x \mapsto 1/x$ sur $[1 ; e]$.

Niveau 2 : type bac

6. Soient $f(x) = e^x$ et $g(x) = x + 1$.

a) Montrer que $f(x) \geq g(x)$ pour tout réel x . b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre les deux courbes et les droites $x = 0$ et $x = 1$. c) Le repère a pour unités 2 cm sur chaque axe. Donner cette aire en cm^2 .

7. Calculer par intégration par parties :

a) $\int_0^\pi x \sin x \, dx$; b) $\int_1^e x \ln x \, dx$; c) $\int_0^1 (2x + 1) e^x \, dx$.

8. Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$.

a) Donner $F(1)$ et $F'(x)$. b) Étudier les variations de F . c) Calculer $F(x)$ explicitement et vérifier que $F(e) = 1$.

9. Un véhicule démarre et sa vitesse vaut $v(t) = 20(1 - e^{-0,5t})$, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, t en secondes.

a) Calculer la distance parcourue pendant les 10 premières secondes. b) En déduire la vitesse moyenne sur cet intervalle.

10. On pose $I = \int_0^1 e^{-x^2} \, dx$, que l'on ne sait pas calculer à l'aide d'une primitive usuelle.

a) Justifier que, pour tout réel u , $e^u \geq 1 + u$. En déduire que $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ pour x dans $[0 ; 1]$. b) En déduire un encadrement de I . c) Avec quatre rectangles de largeur 0,25, encadrer I plus finement (la fonction est décroissante sur $[0 ; 1]$).

Niveau 3 : vers le PASS

11. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$.

a) Calculer I_0 . b) Montrer par intégration par parties que $I_{n+1} = e - (n + 1) I_n$. c) En déduire I_1 et I_2 . d) Montrer que $0 \leq I_n \leq e/(n + 1)$ et en déduire la limite de la suite (I_n) .

12. Après une injection intraveineuse de 400 mg, la concentration d'un médicament est $C(t) = 10 e^{-0,2t}$, t en heures, C en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Calculer $\text{ASC}(T) = \int_0^T C(t) \, dt$ pour $T > 0$. b) Déterminer la limite ASC_∞ de $\text{ASC}(T)$ quand T tend vers $+\infty$. c) La clairance vaut dose / ASC_∞ . La calculer et vérifier qu'elle est égale à kV , avec $k = 0,2 \, \text{h}^{-1}$ et $V = \text{dose} / C(0)$. d) Calculer la concentration moyenne sur les 10 premières heures.

13. Vrai ou faux ? Justifier.

a) Si f est continue sur $[a ; b]$ ($a < b$) et $\int_a^b f = 0$, alors f est la fonction nulle. b) $\int_0^1 x^2 \, dx < \int_0^1 x \, dx$. c) La valeur moyenne de $f(x) = 2x + 1$ sur $[0 ; 4]$ est égale à $f(2)$. d) Pour tout $x > 0$, $\int_1^x (1/t) \, dt = \ln x$. e) L'aire du domaine compris entre la courbe de $\sin$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2\pi$ vaut $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$.

Corrigés

1. a) $[x^2 + x]$ de 1 à 3 = $(9 + 3) - (1 + 1)$, **10**.
- b) $[e^x]$ de 0 à 1, $e - 1 \approx 1,72$. c) $[\ln x]$ de 1 à $e = 1 - 0$, **1**. d) $[-\cos x]$ de 0 à $\pi = -(-1) - (-1)$, **2**. e) $[x^4/4]$ de -1 à 1 = $1/4 - 1/4$, **0** (fonction impaire : les aires de part et d'autre de l'origine se compensent).
2. a) Sur $[0 ; 4]$, $f(x) = x/2 + 1$ est positive ; le domaine est un trapèze de bases $f(0) = 1$ et $f(4) = 3$ et de hauteur 4, d'aire $(1 + 3)/2 \times 4 = 8$. Vérification : $[x^2/4 + x]$ de 0 à 4 = $4 + 4 = 8$. **L'intégrale vaut 8**.
- b) $y = \sqrt{4 - x^2}$ avec $y \geq 0$ équivaut à $x^2 + y^2 = 4$ et $y \geq 0$: c'est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 2. L'intégrale est l'aire du demi-disque : $\pi \times 2^2/2$, **$2\pi \approx 6,28$** .
3. a) $u = x^2$, $u' = 2x$: $2x e^{x^2} = u' e^u$, de primitive e^{x^2} . $[e^{x^2}]$ de 0 à 1, **$e - 1$** .
- b) $[\ln(x + 1)]$ de 0 à 1 = $\ln 2 - \ln 1$, **$\ln 2 \approx 0,693$** . c) $[\sin(2x)/2]$ de 0 à $\pi/4 = (\sin(\pi/2) - \sin 0)/2$, **1/2**. d) $u = 2x + 1$, $u' = 2$: $(2x + 1)^2 = (1/2) u' u^2$, de primitive $(2x + 1)^3/6$. $[(2x + 1)^3/6]$ de 0 à 1 = $(27 - 1)/6 = 26/6$, **13/3**.
4. a) Chasles : $3 + (-1)$, **$\int$ de 0 à 5 de $f = 2$** .
- b) Linéarité : $2 \times 2 - 3 \times 4$, **-8**. c) Inversion des bornes : **-2**. d) **-3**.
5. a) $\mu = (1/3) \times [x^3/3]$ de 0 à 3 = $(1/3) \times 9$, **$\mu = 3$** .
- b) $\mu = (1/\pi) \times 2$, **$\mu = 2/\pi \approx 0,637$** . c) $\mu = (1/(e - 1)) \times [\ln x]$ de 1 à $e = 1/(e - 1)$, **$\mu \approx 0,582$** .
6. a) Soit $h(x) = e^x - x - 1$. $h'(x) = e^x - 1$, négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$. h a un minimum en 0, $h(0) = 0$, donc $h(x) \geq 0$: **$e^x \geq x + 1$ pour tout réel x** .
- b) Comme $f \geq g$, aire = $\int$ de 0 à 1 de $(e^x - x - 1) dx = [e^x - x^2/2 - x]$ de 0 à 1 = $(e - 1/2 - 1) - 1 = e - 5/2$. **Aire = $e - 2,5 \approx 0,218$ u.a.** c) 1 u.a. = $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, donc aire = $4(e - 2,5) \approx 0,87 \text{ cm}^2$.
7. a) $u = x$, $v' = \sin x$, $u' = 1$, $v = -\cos x$. $\int = [-x \cos x]$ de 0 à $\pi + \int$ de 0 à π de $\cos x dx = (-\pi \cos \pi - 0) + [\sin x]$ de 0 à $\pi = \pi + 0$, **π** .
- b) $u = \ln x$, $v' = x$, $u' = 1/x$, $v = x^2/2$. $\int = [(x^2/2) \ln x]$ de 1 à $e - \int$ de 1 à e de $x/2 dx = e^2/2 - [x^2/4]$ de 1 à $e = e^2/2 - (e^2 - 1)/4 = (2e^2 - e^2 + 1)/4$, **$(e^2 + 1)/4 \approx 2,10$** . c) $u = 2x + 1$, $v' = e^x$, $u' = 2$, $v = e^x$. $\int = [(2x + 1) e^x]$ de 0 à 1 - $\int$ de 0 à 1 de $2e^x dx = (3e - 1) - 2(e - 1) = 3e - 1 - 2e + 2$, **$e + 1 \approx 3,72$** .
8. a) **$F(1) = 0$** (bornes égales). $\ln$ est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc F est la primitive de $\ln$ qui s'annule en 1 : **$F'(x) = \ln x$** .
- b) $F'(x) = \ln x$ est négatif sur $]0 ; 1[$ et positif sur $]1 ; +\infty[$: **F est décroissante sur $]0 ; 1[$ et croissante sur $]1 ; +\infty[$** , de minimum $F(1) = 0$. Donc $F(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. c) Une primitive de $\ln$ est $x \ln x - x$ (vérifiée par dérivation). $F(x) = [t \ln t - t]$ de 1 à $x = x \ln x - x - (0 - 1)$, **$F(x) = x \ln x - x + 1$** . $F(e) = e - e + 1$, **$F(e) = 1$** .
9. a) Une primitive de v est $V(t) = 20(t + 2e^{-0,5t})$, car la dérivée de $2e^{-0,5t}$ est $-e^{-0,5t}$. Distance = $V(10) - V(0) = 20(10 + 2e^{-5}) - 20 \times 2 = 20(8 + 2e^{-5}) = 160 + 40e^{-5}$. Avec $e^{-5} \approx 0,00674$: **distance $\approx 160,3 \text{ m}$** .
- b) Vitesse moyenne = distance / 10, **environ $16,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$** .
10. a) La fonction $\varphi(u) = e^u - 1 - u$ a pour dérivée $e^u - 1$, négative pour $u < 0$ et positive pour $u > 0$: minimum $\varphi(0) = 0$, donc **$e^u \geq 1 + u$** . Avec $u = -x^2$, on obtient **$e^{-x^2} \geq 1 - x^2$** . De plus $-x^2 \leq 0$ donne **$e^{-x^2} \leq e^0 = 1$** . D'où **$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ sur $[0 ; 1]$** .

b) Par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$) : $\int_0^1 (1 - x^2) dx \leq I \leq \int_0^1 1 dx$. Or $\int_0^1 (1 - x^2) dx = 1 - 1/3 = 2/3$. $2/3 \leq I \leq 1$. c) Valeurs : $f(0) = 1$; $f(0,25) = e^{-0,0625} \approx 0,9394$; $f(0,5) = e^{-0,25} \approx 0,7788$; $f(0,75) = e^{-0,5625} \approx 0,5698$; $f(1) = e^{-1} \approx 0,3679$. La fonction étant décroissante, les rectangles à gauche donnent une valeur par excès et ceux à droite une valeur par défaut : par excès : $0,25 \times (1 + 0,9394 + 0,7788 + 0,5698) \approx 0,8220$; par défaut : $0,25 \times (0,9394 + 0,7788 + 0,5698 + 0,3679) \approx 0,6640$. $0,664 \leq I \leq 0,822$ (la valeur réelle est environ 0,747).

11. a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$, $I_0 = e - 1$.

b) $u(x) = x^{n+1}$, $v'(x) = e^{-x}$, $u'(x) = (n+1)x^n$, $v(x) = e^{-x}$. $I_{n+1} = [x^{n+1} e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^{-x} dx = (e - 0) - (n+1)I_n$. $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. c) $I_1 = e - I_0 = 1$; $I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \approx 0,718$. d) Pour x dans $[0 ; 1]$, $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n \times e$ (car $e^{-x} \leq e$). Par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$) : $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx = e/(n+1)$. Comme $e/(n+1)$ tend vers 0, le théorème des gendarmes donne $\lim I_n = 0$.

12. a) Une primitive de $10 e^{-0,2t}$ est $-50 e^{-0,2t}$. $ASC(T) = [-50 e^{-0,2t}]_0^T$ de 0 à T, $ASC(T) = 50(1 - e^{-0,2T})$ $mg \cdot h \cdot L^{-1}$.

b) $e^{-0,2T}$ tend vers 0, $ASC_{\infty} = 50 mg \cdot h \cdot L^{-1}$ (c'est $C(0)/k = 10/0,2$). c) Clairance = $400/50$, $8 L \cdot h^{-1}$. $V = 400/10 = 40 L$ et $kV = 0,2 \times 40 = 8 L \cdot h^{-1}$: les deux calculs concordent. d) $\mu = ASC(10)/10 = 50(1 - e^{-2})/10 = 5(1 - e^{-2}) \approx 5 \times 0,8647$, $\mu \approx 4,3 mg \cdot L^{-1}$.

13. a) **Faux**. Contre-exemple : $f(x) = x$ sur $[-1 ; 1]$ n'est pas nulle et $\int_{-1}^1 x dx = [x^2/2]_{-1}^1 = 0$. (La propriété devient vraie si f est continue et positive.)

b) **Vrai**. $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$ et $\int_0^1 x dx = 1/2$, et $1/3 < 1/2$. On le prévoit sans calcul car $x^2 \leq x$ sur $[0 ; 1]$. c) **Vrai**. $\mu = (1/4)[x^2 + x]_0^4 = (1/4) \times 20 = 5$, et $f(2) = 5$. d) **Vrai**. $\ln$ est une primitive de $1/t$ sur $]0 ; +\infty[$, intervalle qui contient 1 et x , donc l'intégrale vaut $\ln x - \ln 1 = \ln x$. e) **Faux**. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0$, car $\sin$ est négative sur $[\pi ; 2\pi]$. L'aire vaut $\int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2 - (-2) = 4$ u.a.