



Fiche : Calcul intégral

FICHE • M16 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Pour f continue et positive sur $[a ; b]$, $\int$ de a à b de $f(x) dx$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.
- La variable d'intégration est muette : $\int$ de a à b de $f(x) dx = \int$ de a à b de $f(t) dt$.
- La fonction $x \mapsto \int$ de a à x de $f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a ; c'est pourquoi toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Si F est une primitive de f , $\int$ de a à b de $f = F(b) - F(a)$, ce qui définit l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.
- Pour une fonction négative, l'intégrale est l'opposé de l'aire ; pour une fonction qui change de signe, c'est une aire algébrique.
- L'intégrale est linéaire et vérifie la relation de Chasles ; inverser les bornes change son signe.
- Pour $a \leq b$, l'intégrale d'une fonction positive est positive et l'intégration conserve l'ordre ($f \leq g$ donne $\int f \leq \int g$).
- La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ vaut $(1/(b - a)) \times \int$ de a à b de f : c'est la hauteur du rectangle de même aire.
- Si $f \geq g$ sur $[a ; b]$, l'aire entre les deux courbes vaut $\int$ de a à b de $(f - g)$.
- L'intégration par parties s'écrit $\int uv' = [uv] - \int u'v$; on dérive le facteur qui se simplifie.
- Pour un polynôme multiplié par e^x ou $\sin x$, on dérive le polynôme ; pour un polynôme multiplié par $\ln x$, on dérive $\ln x$.
- Une suite d'intégrales s'étudie par intégration par parties (récurrence) et par encadrement (limite).
- L'intégrale d'un débit donne une quantité cumulée, et l'aire sous la courbe d'une concentration mesure l'exposition à un médicament.
- La méthode des rectangles encadre l'intégrale d'une fonction monotone, avec un écart qui tend vers 0 quand le pas diminue.



Formules et définitions à connaître

Notion	Formule	Condition
Calcul	$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f = F(b) - F(a)$	F primitive de f, f continue
Fonction intégrale	$(\int \text{de } a \text{ à } x \text{ de } f(t) dt)' = f(x)$	f continue
Inversion des bornes	$\int \text{de } b \text{ à } a \text{ de } f = - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f$	
Chasles	$\int \text{de } a \text{ à } c = \int \text{de } a \text{ à } b + \int \text{de } b \text{ à } c$	
Linéarité	$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$	
Positivité, croissance	$f \geq 0 \text{ donne } \int f \geq 0 ; f \leq g \text{ donne } \int f \leq \int g$	$a \leq b$
Inégalité de la moyenne	$m(b-a) \leq \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f \leq M(b-a)$	$a \leq b, m \leq f \leq M$
Valeur moyenne	$\mu = (1/(b-a)) \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f$	$a < b$
Aire entre courbes	$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } (f - g)$	$f \geq g \text{ sur } [a ; b]$
Intégration par parties	$\int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } uv' = [uv] \text{ de } a \text{ à } b - \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } u'v$	$u', v' \text{ continues}$

Pièges à éviter

- Confondre intégrale et aire quand la fonction change de signe : découper avec Chasles.



- Calculer $F(a) - F(b)$ au lieu de $F(b) - F(a)$, ou oublier les parenthèses autour de $F(a)$.
- Utiliser la positivité ou la croissance de l'intégrale avec $a > b$.
- Intégrer (courbe du dessous) - (courbe du dessus) et obtenir une aire négative.
- Oublier le crochet $[uv]$ ou le signe moins dans l'intégration par parties.
- Diviser par b au lieu de $b - a$ dans la valeur moyenne.

Je me teste

1. $\int$ de 0 à 1 de $x^2 dx$? $\rightarrow 1/3$.
2. $\int$ de 0 à $\pi/2$ de $\sin x dx$? $\rightarrow 1$.
3. $\int$ de 1 à e de $(1/x) dx$? $\rightarrow 1$.
4. Si $\int$ de 0 à 2 de $f = 5$, que vaut $\int$ de 2 à 0 de f ? $\rightarrow -5$.
5. Valeur moyenne de $x \mapsto 2x$ sur $[0 ; 3]$? $\rightarrow 3$.
6. Aire entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0 ; 1]$? $\rightarrow 1/6$ u.a.
7. $\int$ de 0 à 1 de $x e^{-x} dx$? $\rightarrow 1$, par parties.
8. Dérivée de $x \mapsto \int$ de 0 à x de $e^{-t^2} dt$? $\rightarrow e^{-x^2}$.
9. $\int$ de 0 à 2π de $\sin x dx$? $\rightarrow 0$, mais l'aire correspondante vaut 4 u.a.
10. 1 u.a. si les unités sont 2 cm et 3 cm ? $\rightarrow 6 \text{ cm}^2$.