

Primitives et équations différentielles

COURS • M15 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Définir une primitive d'une fonction sur un intervalle et justifier que deux primitives diffèrent d'une constante.
- Calculer une primitive des fonctions usuelles (puissances, inverse, exponentielle, sinus, cosinus) et de fonctions composées du type u^n , u'/u , $u'e^u$, $u' \cos u$.
- Déterminer la primitive qui prend une valeur donnée en un point.
- Résoudre l'équation $y' = f$ lorsque f admet une primitive connue.
- Résoudre les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$, avec a non nul, et trouver la solution vérifiant une condition initiale.
- Traduire une situation (décroissance radioactive, refroidissement, charge d'un condensateur, administration d'un médicament) par une équation différentielle, la résoudre et interpréter la solution (valeur d'équilibre, temps caractéristique, demi-vie).

Cours

1. Notion d'équation différentielle

Définition. Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y , définie sur un intervalle I , et une ou plusieurs de ses dérivées. Une **solution** sur I est une fonction dérivable sur I qui vérifie cette égalité pour tout réel de I .

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions. Contrairement à une équation numérique, l'inconnue est une **fonction**, et il y a en général une infinité de solutions.

Exemple. Pour l'équation $y' = 2y$, la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée vaut $2e^{2x}$. La fonction $x \mapsto 5e^{2x}$ l'est aussi, ainsi que la fonction nulle.

Exemple. Pour vérifier que $f(x) = x^2 + 1/x$ est solution de $x y' + y = 3x^2$ sur $]0; +\infty[$, on calcule $f'(x) = 2x - 1/x^2$, puis $x f'(x) + f(x) = 2x^2 - 1/x + x^2 + 1/x = 3x^2$. C'est vérifié.

On note souvent la variable t lorsqu'elle représente le temps, et on écrit alors $y'(t)$. En physique, les équations différentielles traduisent des **lois d'évolution** : la vitesse de variation d'une grandeur dépend de la valeur de cette grandeur.

2. Primitives d'une fonction

L'équation différentielle la plus simple est $y' = f$, où f est une fonction donnée : on cherche une fonction dont la dérivée est f .

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I .

Exemple. $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$. $G(x) = x^3 + 7$ en est une autre.

Propriété. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I , alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Démonstration. Les fonctions $F + C$ conviennent, car la dérivée d'une constante est nulle. Réciproquement, si G est une primitive de f sur I , alors $(G - F)' = f - f = 0$ sur I . Une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante (conséquence du lien entre signe de la dérivée et variations), donc $G - F = C$.

Propriété. Pour x_0 dans I et y_0 réel, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

En effet, parmi les fonctions $F + C$, la condition $F(x_0) + C = y_0$ fixe $C = y_0 - F(x_0)$.

Théorème (admis à ce stade). Toute fonction **continue** sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Ce théorème sera justifié dans le chapitre sur le calcul intégral. Attention : il assure l'existence d'une primitive, pas qu'on sache l'écrire avec les fonctions usuelles.

Les solutions de l'équation $y' = f$ sur I sont donc les primitives de f sur I .

3. Primitives des fonctions usuelles

On lit à l'envers le tableau des dérivées. Dans le tableau, C désigne une constante réelle.

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n (n entier, $n \geq 0$)	$x^{n+1}/(n+1)$	$\mathbb{R}$
$1/x^2$	$-1/x$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$



Fonction f	Une primitive F	Intervalle
$1/x^n$ (n entier, $n \geq 2$)	$-1/((n-1)x^{n-1})$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$1/x$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Linéarité. Si F et G sont des primitives de f et g sur I et k un réel, alors F + G est une primitive de f + g et kF une primitive de kf.

Exemple. Une primitive de $f(x) = 4x^3 - 6x + 2$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$.

Attention : il n'y a **pas** de règle simple pour le produit ou le quotient. Une primitive de $x e^x$ n'est pas $(x^2/2) e^x$.

4. Primitives des fonctions composées

En lisant à l'envers la dérivée d'une composée, on obtient, pour une fonction u dérivable sur I :

Forme de f	Une primitive F	Condition
$u' u^n$ (n entier, $n \geq 1$)	$u^{n+1}/(n+1)$	
u'/u^2	$-1/u$	u ne s'annule pas sur I
$u'/\sqrt{u}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
u'/u	$\ln u$	$u > 0$ sur I
$u' e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	
$f(ax+b)$, $a \neq 0$	$(1/a) G(ax+b)$, où G est une primitive de f	

Méthode : reconnaître la forme, puis ajuster une constante multiplicative. On repère u, on calcule u', et si u' n'apparaît qu'à un facteur constant près, on multiplie et on divise par ce facteur.

Exemples :

- $f(x) = x/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$, donc $f = (1/2) u'/u$ et $F(x) = (1/2) \ln(x^2 + 1)$;
- $f(x) = (2x + 1) e^{x^2 + x}$ sur $\mathbb{R}$. Avec $u(x) = x^2 + x$, $f = u' e^u$, donc $F(x) = e^{x^2 + x}$;

- $f(x) = \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $\sin$ est $-\cos$, donc $F(x) = -(1/3) \cos(3x)$;
- $f(x) = (2x - 1)^4$. Avec $u = 2x - 1$, $u' = 2$, $f = (1/2) u' u^4$, donc $F(x) = (2x - 1)^5/10$;
- $f(x) = e^{-0,5x}$. Avec $a = -0,5$: $F(x) = -2 e^{-0,5x}$.

Contrôle systématique : on dérive F et on doit retrouver f . C'est rapide et cela évite la plupart des erreurs de constante.

Calculer une primitive

1. Repérer une forme du tableau (somme, $u \cdot u^n$, u'/u , $u'e^{\dots}$) • 2. Identifier u et calculer u' • 3. Ajuster le facteur constant • 4. Écrire F • 5. Dériver F pour vérifier

5. L'équation $y' = ay$

Théorème. Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$, où C est une constante réelle.

Démonstration. Les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$ sont solutions : leur dérivée vaut $C a e^{ax} = a \times (C e^{ax})$. Réciproquement, soit y une solution. On pose $g(x) = y(x) e^{-ax}$. Alors $g'(x) = y'(x) e^{-ax} - a y(x) e^{-ax} = (y'(x) - a y(x)) e^{-ax} = 0$. Donc g est constante sur $\mathbb{R}$, égale à un réel C , et $y(x) = C e^{ax}$.

Condition initiale. Pour x_0 et y_0 réels, il existe une **unique** solution de $y' = ay$ telle que $y(x_0) = y_0$: c'est $y(x) = y_0 e^{a(x - x_0)}$. En particulier, si $x_0 = 0$, $y(x) = y_0 e^{ax}$.

Interprétation : $y' = ay$ signifie que la vitesse de variation de y est **proportionnelle** à y . Si $a > 0$ et $y_0 > 0$, c'est une croissance exponentielle (population sans contrainte, intérêts composés en continu) ; si $a < 0$, c'est une décroissance exponentielle vers 0.

Les courbes des solutions ne se croisent jamais : deux solutions égales en un point sont égales partout (unicité).

6. L'équation $y' = ay + b$

Théorème. Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$x \mapsto C e^{ax} - b/a$, où C est une constante réelle.

Démonstration. La fonction constante $y_p = -b/a$ est une **solution particulière** : sa dérivée est nulle, et $a \times (-b/a) + b = 0$. Pour une fonction y dérivable, on pose $z = y - y_p$. Alors $y' = ay + b$ équivaut à $z' = a(z + y_p) + b = az + a y_p + b = az$, puisque $a y_p + b = 0$. Donc y est solution si et seulement si z est solution de $z' = az$, c'est-à-dire $z(x) = C e^{ax}$. D'où $y(x) = C e^{ax} - b/a$.

On retient la structure : **solution générale** = **solution générale de $y' = ay$** + **une solution particulière**.

La constante C est fixée par une condition initiale : avec $y(0) = y_0$, on obtient $C - b/a = y_0$, donc $C = y_0 + b/a$.

Comportement à l'infini lorsque $a < 0$: e^{ax} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc toute solution tend vers $-b/a$, quelle que soit la condition initiale. Cette valeur est la **valeur d'équilibre** (ou régime permanent) du système. Le nombre $\tau = -1/a$ (ou $1/|a|$) est le **temps caractéristique** : au bout de τ , l'écart

à l'équilibre est multiplié par $e^{-1} \approx 0,37$; au bout de 5τ , il ne reste que $e^{-5} \approx 0,7\%$ de l'écart initial.

Résoudre $y' = ay + b$ avec $y(0) = y_0$

1. Mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et lire a et b • 2. Écrire $y = C e^{ax} - b/a$ • 3. Utiliser $y(0) = y_0$ pour trouver C • 4. Vérifier en dérivant • 5. Interpréter la limite $-b/a$ si $a < 0$

Exemple. $y' + 3y = 6$ s'écrit $y' = -3y + 6$, avec $a = -3$ et $b = 6$. Les solutions sont $y(x) = C e^{-3x} + 2$. Avec $y(0) = 0$: $C = -2$, donc $y(x) = 2 - 2e^{-3x} = 2(1 - e^{-3x})$. La fonction croît de 0 vers l'équilibre 2.

7. Modèles

Décroissance radioactive. Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon diminue d'autant plus vite qu'il y a de noyaux : $N'(t) = -\lambda N(t)$, où $\lambda > 0$ est la **constante radioactive** (en s^{-1} ou an^{-1}). Avec $N(0) = N_0$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, demi-vie $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$. L'activité $A(t) = -N'(t) = \lambda N(t)$ suit la même loi.

Refroidissement (loi de Newton). Un corps de température $\theta(t)$, placé dans un milieu de température constante θ_a , se refroidit d'autant plus vite que l'écart est grand : $\theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_a)$, avec $k > 0$. C'est une équation $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $b = k\theta_a$, d'où $\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a) e^{-kt}$. La température tend vers celle du milieu : l'écart $\theta - \theta_a$ décroît exponentiellement.

Charge d'un condensateur. Dans un circuit série comprenant un générateur de tension constante E , un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C initialement déchargé, la loi des mailles et la relation $i = C \times u'$, où u désigne la tension aux bornes du condensateur, donnent $RC u'(t) + u(t) = E$, soit $u' = -(1/(RC)) u + E/(RC)$. Avec $u(0) = 0$: $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, où $\tau = RC$ est la constante de temps (en secondes si R est en ohms et C en farads). À $t = \tau$, $u \approx 0,63 E$; à $t = 5\tau$, $u \approx 0,993 E$: on considère le condensateur chargé.

Pharmacocinétique. On modélise souvent l'organisme par un seul compartiment de volume V (volume de distribution), d'où le médicament est éliminé avec une vitesse proportionnelle à sa concentration $C(t)$: constante d'élimination k .

- Après une **injection intraveineuse unique** (bolus) de dose D : $C' = -kC$, $C(0) = D/V$, d'où $C(t) = (D/V) e^{-kt}$.
- Pendant une **perfusion continue** à débit d'administration constant Q (en $mg \cdot h^{-1}$) : $C' = Q/V - kC$, $C(0) = 0$. C'est une équation $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $b = Q/V$. On obtient

$C(t) = (Q/(kV))(1 - e^{-kt})$. La concentration tend vers le **plateau** $C_s = Q/(kV)$. Le produit kV est la **clairance** du médicament (volume de plasma épuré par unité de temps), d'où $C_s = Q/\text{clairance}$. Le temps pour atteindre une fraction donnée du plateau ne dépend que de k , donc de la demi-vie : on atteint 50 % du plateau en une demi-vie, 75 % en deux, 87,5 % en trois.

Un seul modèle, quatre situations

Radioactivité : $N' = -\lambda N$

Refroidissement : $\theta' = -k(\theta - \theta_a)$

Condensateur : $RC u' + u = E$

Perfusion : $C' = Q/V - kC$

Repères complémentaires, sans séquence causale

Exemples résolus

Exemple 1 : calculs de primitives

Énoncé. Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué. a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$, puis la primitive F telle que $F(1) = 0$. b) $g(x) = x/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$. c) $h(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x}$ sur $\mathbb{R}$. d) $k(x) = 1/(2x - 1)^2$ sur $]1/2; +\infty[$.

Résolution. a) Par linéarité, $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C$. $F(1) = 1 - 2 + 5 + C = 4 + C = 0$ donne $C = -4$: $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$. Vérification : $F'(x) = 3x^2 - 4x + 5$. b) $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$, $g = (1/2) u'/u$: $G(x) = (1/2) \ln(x^2 + 1)$. c) $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$, $h = u' e^u$: $H(x) = e^{x^2 + x}$. d) $u(x) = 2x - 1$, qui ne s'annule pas sur $]1/2; +\infty[$, $u' = 2$, et $k = (1/2) u'/u^2$: $K(x) = -1/(2(2x - 1))$. Vérification : $K(x) = -(1/2)(2x - 1)^{-1}$, $K'(x) = (1/2) \times 2 \times (2x - 1)^{-2} = 1/(2x - 1)^2$.

Exemple 2 : équation $y' = ay + b$ avec condition initiale

Énoncé. On considère l'équation (E) : $y' + 2y = 6$. a) Déterminer une solution constante de (E). b)

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. c) Déterminer la solution f telle que $f(0) = 1$, puis sa limite en $+\infty$.

Résolution. a) (E) s'écrit $y' = -2y + 6$. Une constante c est solution si $0 = -2c + 6$, soit $c = 3$. b) Les solutions de $y' = -2y$ sont $x \mapsto C e^{-2x}$. Les solutions de (E) sont donc $y(x) = C e^{-2x} + 3$, C réel. c) $f(0) = C + 3 = 1$ donne $C = -2$: $f(x) = 3 - 2e^{-2x}$. Comme e^{-2x} tend vers 0 en $+\infty$, f tend vers 3. Vérification : $f'(x) = 4e^{-2x}$ et $f'(x) + 2f(x) = 4e^{-2x} + 6 - 4e^{-2x} = 6$.

Exemple 3 : refroidissement d'une boisson

Énoncé. Une boisson à 80 °C est posée dans une pièce à 20 °C. Sa température $\theta(t)$, t en minutes, vérifie $\theta' = -k(\theta - 20)$, $k > 0$. Au bout de 5 minutes, elle vaut 60 °C. a) Exprimer $\theta(t)$ en fonction de k . b) Déterminer k . c) Au bout de combien de temps la boisson atteint-elle 40 °C ?

Résolution. a) L'équation s'écrit $\theta' = -k\theta + 20k$, de solution constante 20. Donc $\theta(t) = C e^{-kt} + 20$, et $\theta(0) = 80$ donne $C = 60$: $\theta(t) = 20 + 60 e^{-kt}$. b) $\theta(5) = 60$: $60 e^{-5k} = 40$, soit $e^{-5k} = 2/3$, $-5k = \ln(2/3)$, $k = \ln(1,5)/5 \approx 0,0811 \text{ min}^{-1}$. c) $\theta(t) = 40$: $60 e^{-kt} = 20$, $e^{-kt} = 1/3$, $t = \ln 3 / k \approx 1,0986/0,0811$, $t \approx 13,5 \text{ min}$.

Méthodes et pièges

- Une primitive se vérifie toujours en la dérivant : fais-le à chaque fois.
- Précise l'intervalle : $\ln x$ n'est une primitive de $1/x$ que sur $]0 ; +\infty[$, et $\ln(u)$ n'est utilisable que si $u > 0$.
- N'oublie pas la constante C quand on te demande toutes les primitives ou toutes les solutions, puis détermine-la avec la condition donnée.
- Pour une composée $f(ax + b)$, divise par a : une primitive de e^{3x} est $e^{3x}/3$, pas $3e^{3x}$.
- Avant de résoudre, mets l'équation sous la forme exacte $y' = ay + b$: dans $y' + 2y = 6$, a vaut -2 et non 2.
- La solution particulière constante vaut $-b/a$: vérifie son signe en la remplaçant dans l'équation.
- Applique la condition initiale à la solution générale complète (avec le terme $-b/a$), pas seulement à $C e^{ax}$.
- En modélisation, contrôle les unités (k en min^{-1} si t est en minutes) et la cohérence physique : une température ne doit pas passer sous celle du milieu au cours d'un refroidissement.

Vers le PASS

En PASS, les équations différentielles du premier ordre traduisent des bilans : ce qui entre moins ce qui sort donne la vitesse de variation d'une quantité. Elles décrivent la cinétique chimique d'ordre 1 (avec la même notion de demi-vie), la radioactivité et la décroissance de l'activité d'un traceur en médecine nucléaire, la pharmacocinétique (injection, perfusion, clairance, temps pour atteindre le plateau, accumulation lors de prises répétées), les échanges à travers une membrane et la charge des membranes cellulaires assimilées à des condensateurs. Savoir écrire l'équation, reconnaître la valeur d'équilibre et le temps caractéristique sans tout recalculer est un gain précieux en QCM.

Suite en PASS : Équations différentielles et bilans

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de : $f_1(x) = 4x^3 - 6x + 1$; $f_2(x) = e^{2x}$; $f_3(x) = \cos x - 3 \sin x$; $f_4(x) = (x + 1)^2$; $f_5(x) = 5e^{-x}$.
- Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué : $g_1(x) = 1/x^2 + 1/x$ sur $]0 ; +\infty[$; $g_2(x) = 2x/(x^2 + 4)$ sur $\mathbb{R}$; $g_3(x) = 1/(2x + 1)$ sur $] -1/2 ; +\infty[$; $g_4(x) = x e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$; $g_5(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.
- a) Vérifier que $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0 ; +\infty[$. b) En déduire la primitive de $\ln$ qui s'annule en 1.
- Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$: a) $y' = 3y$; b) $y' = -0,5y$ avec $y(0) = 4$; c) $y' = 2y - 6$; d) $y' + y = 1$ avec $y(0) = 0$.
- Déterminer la primitive F de $f(x) = 6x^2 - 2x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 3$.

Niveau 2 : type bac

6. Le cobalt 60 a une demi-vie de 5,27 ans. On note $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t (en années), avec $N'(t) = -\lambda N(t)$ et $N(0) = N_0$.
- a) Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 , λ et t . b) Calculer λ . c) Quel pourcentage des noyaux reste-t-il au bout de 10 ans ? d) Au bout de combien de temps le nombre de noyaux est-il divisé par 10 ?
7. On charge un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$ à travers une résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$, sous une tension $E = 12 \text{ V}$. La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur vérifie $RC u' + u = E$ et $u(0) = 0$.
- a) Calculer $\tau = RC$ et écrire l'équation sous la forme $u' = au + b$. b) Résoudre et exprimer $u(t)$. c) Au bout de combien de temps u atteint-elle 99 % de E ? d) L'intensité vaut $i(t) = C u'(t)$. Calculer $i(0)$.
8. Un médicament est administré par perfusion continue au débit $Q = 20 \text{ mg}\cdot\text{h}^{-1}$. Le volume de distribution vaut $V = 40 \text{ L}$ et la constante d'élimination $k = 0,25 \text{ h}^{-1}$. La concentration $C(t)$ (en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$) vérifie $C' = Q/V - kC$, avec $C(0) = 0$.
- a) Résoudre cette équation. b) Déterminer la concentration au plateau. c) Au bout de combien de temps atteint-on 90 % du plateau ? Exprimer ce temps en nombre de demi-vies. d) Quel débit faudrait-il pour obtenir un plateau de $3 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$?
9. Soit $f(x) = (x - 1) e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- a) Montrer que $F(x) = (x - 2) e^x$ est une primitive de f . b) Déterminer la primitive G de f telle que $G(0) = 0$. c) Étudier les variations de G et donner son minimum.
10. Une cuve contient 100 L d'eau dans laquelle sont dissous 2 000 g de sel. On y verse de l'eau salée à $10 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ avec un débit de $5 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$, et le mélange, homogène, s'écoule au même débit. La masse $m(t)$ de sel (en g, t en minutes) vérifie $m' = 50 - 0,05 m$.
- a) Justifier cette équation par un bilan de matière. b) Résoudre l'équation avec $m(0) = 2 000$. c) Vers quelle masse tend $m(t)$? Interpréter. d) Au bout de combien de temps la masse vaut-elle 1 500 g ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Vrai ou faux ? Justifier.
- a) Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I . b) Si F et G sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$ telles que $F(0) = G(0)$, alors $F = G$. c) Toutes les solutions de $y' = 2y$ sont strictement positives. d) La solution de $y' = -3y + 6$ telle que $y(0) = y_0$ est croissante sur $\mathbb{R}$ dès que $y_0 < 2$.
12. Après une injection intraveineuse unique de 500 mg d'un médicament, la concentration plasmatique suit $C(t) = C_0 e^{-kt}$. On mesure $C(1) = 8,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et $C(4) = 4,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ (t en heures).
- a) Déterminer la demi-vie et k . b) Calculer C_0 . c) En déduire le volume de distribution $V = D/C_0$. d) Calculer la clairance kV .
13. On considère l'équation (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$.
- a) Vérifier que $g(x) = x e^{-2x}$ est une solution particulière de (E). b) Montrer qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -2y$. c) En déduire toutes les solutions de (E). d) Déterminer la solution telle que $y(0) = 1$ et sa limite en $+\infty$.

Corrigés

1. On vérifie chaque résultat en dérivant.

$F_1(x) = x^4 - 3x^2 + x \cdot e^{2x}$ est de la forme e^{ax} avec $a = 2$: $F_2(x) = (1/2) e^{2x}$. Une primitive de $\cos$ est $\sin$, une primitive de $-3 \sin$ est $3 \cos$: $F_3(x) = \sin x + 3 \cos x$. $u = x + 1$, $u' = 1$, $f_4 = u' u^2$: $F_4(x) = (x + 1)^3/3$. Une primitive de e^{-x} est $-e^{-x}$: $F_5(x) = -5e^{-x}$.

2. $G_1(x) = -1/x + \ln x$ (sur $]0 ; +\infty[$).

$u = x^2 + 4 > 0$, $u' = 2x$, $g_2 = u'/u$: $G_2(x) = \ln(x^2 + 4)$. $u = 2x + 1 > 0$ sur $] -1/2 ; +\infty[$, $u' = 2$, $g_3 = (1/2) u'/u$: $G_3(x) = (1/2) \ln(2x + 1)$. $u = x^2$, $u' = 2x$, $g_4 = (1/2) u' e^{\square}$: $G_4(x) = (1/2) e^{x^2}$. $G_5(x) = 2\sqrt{x}$, car $(2\sqrt{x})' = 2 \times 1/(2\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x}$.

3. a) $F'(x) = (1 \times \ln x + x \times 1/x) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. **F est bien une primitive de $\ln$ sur $]0 ; +\infty[$.**

b) Les primitives de $\ln$ sont $x \ln x - x + C$. En $1 : 1 \times 0 - 1 + C = 0$, donc $C = 1$: $G(x) = x \ln x - x + 1$.

4. a) $y(x) = C e^{3x}$, C réel.

b) $y(x) = C e^{-0,5x}$ et $y(0) = C = 4$: $y(x) = 4e^{-0,5x}$. c) $a = 2$, $b = -6$, solution constante $-b/a = 3$: $y(x) = C e^{2x} + 3$, C réel. d) $y' = -y + 1$: $a = -1$, $b = 1$, solution constante 1 , donc $y(x) = C e^{-x} + 1$. $y(0) = C + 1 = 0$ donne $C = -1$: $y(x) = 1 - e^{-x}$.

5. $F(x) = 2x^3 - x^2 + C$. $F(1) = 2 - 1 + C = 1 + C = 3$, donc $C = 2$: $F(x) = 2x^3 - x^2 + 2$.

6. a) Les solutions de $N' = -\lambda N$ sont $N(t) = K e^{-\lambda t}$, et $N(0) = K = N_0$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

b) $\lambda = \ln 2 / 5,27 \approx 0,132 \text{ an}^{-1}$. c) $N(10)/N_0 = e^{-10\lambda} = 2^{-10/5,27} \approx 2^{-1,898} \approx 0,268$. **Il reste environ 27 % des noyaux.** d) $e^{-\lambda t} = 1/10$ donne $t = \ln 10 / \lambda = 5,27 \times \ln 10 / \ln 2 \approx 5,27 \times 3,32$, $t \approx 17,5 \text{ ans}$.

7. a) $\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 1,0 \text{ s}$. En divisant par RC : $u' = -(1/\tau) u + E/\tau$, soit $u' = -u + 12$ (t en secondes, u en volts).

b) Solution constante : 12 . Donc $u(t) = K e^{-t} + 12$, et $u(0) = 0$ donne $K = -12$: $u(t) = 12(1 - e^{-t})$. c) $u(t) = 0,99 \times 12$ équivaut à $1 - e^{-t} = 0,99$, $e^{-t} = 0,01$, $t = \ln 100 \approx 4,6 \text{ s}$ (soit $4,6\tau$). d) $u'(t) = 12 e^{-t}$, donc $i(t) = C u'(t) = 100 \times 10^{-6} \times 12 e^{-t}$ et $i(0) = 1,2 \times 10^{-3} \text{ A}$, $i(0) = 1,2 \text{ mA}$. On retrouve $E/R = 12/10\,000 = 1,2 \text{ mA}$: au départ, le condensateur déchargé se comporte comme un fil.

8. a) $Q/V = 20/40 = 0,5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$, donc $C' = -0,25C + 0,5$. Solution constante : $0,5/0,25 = 2$. Donc $C(t) = K e^{-0,25t} + 2$, avec $C(0) = 0$, $K = -2$: $C(t) = 2(1 - e^{-0,25t})$.

b) $e^{-0,25t}$ tend vers 0 : **plateau $2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$** (c'est $Q/(kV) = 20/(0,25 \times 40)$). c) $C(t) = 0,9 \times 2$ équivaut à $e^{-0,25t} = 0,1$, $t = \ln 10 / 0,25 = 4 \ln 10$, $t \approx 9,2 \text{ h}$. La demi-vie vaut $\ln 2 / 0,25 \approx 2,77 \text{ h}$, donc $t = \ln 10 / \ln 2 \approx 3,3$ **demi-vies**. d) Le plateau vaut $Q/(kV)$, donc $Q = 3 \times kV = 3 \times 0,25 \times 40$, **$Q = 30 \text{ mg} \cdot \text{h}^{-1}$** . Le plateau est proportionnel au débit.

9. a) $F'(x) = 1 \times e^{\square} + (x - 2) e^{\square} = (x - 1) e^{\square} = f(x)$. **F est une primitive de f .**

b) $G(x) = (x - 2) e^{\square} + C$, $G(0) = -2 + C = 0$, donc $C = 2$: $G(x) = (x - 2) e^{\square} + 2$. c) $G' = f$, du signe de $x - 1$ (car $e^{\square} > 0$) : G est décroissante sur $] -\infty ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$. **Minimum : $G(1) = -e + 2 \approx -0,72$.**

10. a) Pendant une petite durée, il entre $5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1} \times 10 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 50 \text{ g} \cdot \text{min}^{-1}$ de sel. Il en sort $5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ à la concentration $m/100 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$, soit $0,05 \text{ m g} \cdot \text{min}^{-1}$. La vitesse de variation de m vaut entrée moins sortie : **$m' = 50 - 0,05 \text{ m}$.**

b) $a = -0,05$ et $b = 50$, solution constante $50/0,05 = 1\,000$. Donc $m(t) = K e^{-0,05t} + 1\,000$, et $m(0) = 2\,000$ donne $K = 1\,000$: $m(t) = 1\,000 + 1\,000 e^{-0,05t}$. c) $m(t)$ tend vers $1\,000$ g : la concentration tend vers $1\,000/100 = 10$ g·L⁻¹, celle de l'eau versée. d) $1\,000 e^{-0,05t} = 500$, $e^{-0,05t} = 0,5$, $t = \ln 2 / 0,05 = 20 \ln 2$, $t \approx 13,9$ min.

11. a) **Vrai**. Une fonction continue sur I a au moins une primitive F, et toutes les $F + C$, C réel, en sont aussi : il y en a une infinité.

b) **Vrai**. $G - F$ est constante sur $\mathbb{R}$ (deux primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante), et cette constante vaut $G(0) - F(0) = 0$. c) **Faux**. Les solutions sont $C e^{2x}$; avec $C = -1$, la solution $-e^{2x}$ est négative, et $C = 0$ donne la fonction nulle. d) **Vrai**. La solution vaut $y(x) = 2 + (y_0 - 2) e^{-3x}$, de dérivée $y'(x) = -3(y_0 - 2) e^{-3x}$. Si $y_0 < 2$, $y_0 - 2 < 0$, donc $y'(x) > 0$: la solution est strictement croissante (elle monte vers l'équilibre 2).

12. a) La concentration est divisée par 2 entre $t = 1$ et $t = 4$: la demi-vie vaut 3 h. Donc $k = \ln 2 / 3 \approx 0,231$ h⁻¹. (Par le calcul : $C(4)/C(1) = e^{-3k} = 1/2$.)

b) $C(1) = C_0 e^{-k}$ donne $C_0 = 8,0 e^k = 8,0 \times 2^{1/3} \approx 8,0 \times 1,260$, $C_0 \approx 10$ mg·L⁻¹ (10,1 mg·L⁻¹). c) $V = 500/10,08$, $V \approx 50$ L. d) Clairance = $kV \approx 0,231 \times 49,6$, clairance ≈ 11 L·h⁻¹.

13. a) $g'(x) = e^{-2x} - 2x e^{-2x}$. Donc $g'(x) + 2g(x) = e^{-2x} - 2x e^{-2x} + 2x e^{-2x} = e^{-2x}$. **g est solution de (E).**

b) Posons $z = y - g$. Alors $z' + 2z = (y' + 2y) - (g' + 2g) = (y' + 2y) - e^{-2x}$. Ainsi $y' + 2y = e^{-2x}$ équivaut à $z' + 2z = 0$, c'est-à-dire $z' = -2z$. **y est solution de (E) si et seulement si y - g est solution de y' = -2y.** c) Les solutions de $z' = -2z$ sont $z(x) = C e^{-2x}$. Donc $y(x) = C e^{-2x} + x e^{-2x} = (x + C) e^{-2x}$, C réel. d) $y(0) = C = 1$: $y(x) = (x + 1) e^{-2x}$. En $+\infty$, $y(x) = x e^{-2x} + e^{-2x}$. Le second terme tend vers 0 ; pour le premier, $x e^{-2x} = (1/2) \times (2x)/e^{2x}$ tend vers 0 par croissance comparée. **La limite vaut 0.**