



Fiche : Primitives et équations différentielles

FICHE • M15 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Une équation différentielle a pour inconnue une fonction ; une solution est une fonction dérivable qui vérifie l'égalité sur tout l'intervalle.
- Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.
- Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante : les primitives de f sont les $F + C$.
- Il existe une unique primitive de f prenant une valeur donnée y_0 en un point x_0 donné.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (théorème démontré avec le calcul intégral).
- Les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f .
- Pour une composée, on reconnaît une forme ($u'u^n$, u'/u , $u'e^u$, $u' \cos u$...) puis on ajuste un facteur constant.
- On vérifie toujours une primitive en la dérivant.
- Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$; la solution telle que $y(0) = y_0$ est $y_0 e^{ax}$.
- Pour $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax} - b/a$, où $-b/a$ est la solution constante.
- Si $a < 0$, toutes les solutions de $y' = ay + b$ tendent vers la valeur d'équilibre $-b/a$, avec un temps caractéristique $\tau = 1/|a|$.
- Décroissance radioactive : $N' = -\lambda N$ donne $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, de demi-vie $\ln 2 / \lambda$.
- Refroidissement de Newton : $\theta' = -k(\theta - \theta_a)$ donne $\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a) e^{-kt}$.
- Charge d'un condensateur : $RC u' + u = E$ donne $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, avec $\tau = RC$.
- Perfusion à débit Q : $C' = Q/V - kC$ donne un plateau $Q/(kV)$, atteint à 50 % en une demi-vie.



Formules et définitions à connaître

Fonction f	Une primitive	Condition
x^n ($n \geq 0$ entier)	$x^{n+1}/(n+1)$	$\mathbb{R}$
$1/x^2$	$-1/x$	$x \neq 0$, sur un intervalle
$1/x$	$\ln x$	$x > 0$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$
e^x ; $\cos x$; $\sin x$	e^x ; $\sin x$; $-\cos x$	$\mathbb{R}$
$u' u^n$	$u^{n+1}/(n+1)$	n entier, $n \geq 1$
u'/u	$\ln u$	$u > 0$
u'/u^2	$-1/u$	u ne s'annule pas
$u' e^x$	e^x	
$f(ax+b)$	$(1/a) F(ax+b)$	$a \neq 0$

Équation	Solutions	Remarque
$y' = f$	$F + C$	F primitive de f
$y' = ay$	$C e^{ax}$	$y(0) = y_0$ donne $C = y_0$
$y' = ay + b$, $a \neq 0$	$C e^{ax} - b/a$	équilibre $-b/a$ si $a < 0$

Pièges à éviter

- Oublier de préciser l'intervalle, en particulier pour $\ln$.



- Multiplier par a au lieu de diviser : une primitive de e^{3x} est $e^{3x}/3$.
- Lire a et b sans mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$ (dans $y' + 2y = 6$, $a = -2$).
- Appliquer la condition initiale à $C e^{ax}$ seul en oubliant le terme $-b/a$.
- Croire qu'il existe une règle de primitive pour un produit quelconque.
- Oublier les unités du temps caractéristique ou de la constante k .

Je me teste

1. Une primitive de $3x^2 + 2$? $\rightarrow x^3 + 2x$.
2. Une primitive de $2x/(x^2 + 1)$? $\rightarrow \ln(x^2 + 1)$.
3. Une primitive de $\cos(2x)$? $\rightarrow (1/2) \sin(2x)$.
4. Une primitive de $x e^{x^2}$? $\rightarrow (1/2) e^{x^2}$.
5. Solutions de $y' = -4y$? $\rightarrow C e^{-4x}$.
6. Solution de $y' = 5y$ avec $y(0) = 2$? $\rightarrow 2e^{5x}$.
7. Solution constante de $y' = -2y + 10$? $\rightarrow 5$.
8. Limite des solutions de $y' = -0,1y + 3$ en $+\infty$? $\rightarrow 30$.
9. Constante de temps pour $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ mF}$? $\rightarrow \tau = 1 \text{ s}$.
10. Fraction du plateau atteinte après deux demi-vies de perfusion ? $\rightarrow 75 \%$.