

Fonctions sinus et cosinus

COURS • M14 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Lire sur le cercle trigonométrique le cosinus et le sinus d'un réel, et utiliser les valeurs remarquables et les angles associés.
- Justifier la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus et en déduire leurs symétries graphiques.
- Calculer la dérivée de $\sin$, de $\cos$ et de fonctions composées comme $\sin(ax + b)$ ou $\cos(u)$.
- Établir et utiliser la limite de $\sin x / x$ en 0.
- Dresser le tableau de variations de $\sin$ et de $\cos$ sur une période et tracer leurs courbes.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle une équation du type $\cos x = a$ ou $\sin x = a$, puis $\cos(u) = \cos(v)$ ou $\sin(u) = \sin(v)$.
- Résoudre une inéquation trigonométrique simple sur un intervalle à l'aide du cercle.
- Identifier l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence et la phase à l'origine d'une fonction $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$.
- Modéliser un phénomène périodique (tension alternative, oscillateur, marée, signal physiologique) par une fonction sinusoïdale et exploiter ce modèle.

Cours

1. Rappels : cercle trigonométrique et valeurs remarquables

Dans un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. À tout réel x , on associe un unique point $M(x)$ du cercle, obtenu en « enroulant » la droite des réels sur le cercle à partir du point $I(1 ; 0)$. Le réel x est une mesure, en **radians**, de l'angle orienté (vecteur OI , vecteur OM). Un tour complet mesure 2π radians, donc π radians correspondent à 180° .

Définition. Le **cosinus** de x est l'abscisse de $M(x)$, le **sinus** de x est son ordonnée : $M(x)$ a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.

Conséquences immédiates, pour tout réel x :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (théorème de Pythagore, $OM = 1$) ;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout entier relatif k , car x et $x + 2k\pi$ repèrent le même point.

Valeurs remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Angles associés (lus par symétries du cercle) :

- symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$;
- symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- symétrie de centre O : $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- symétrie par rapport à la droite $y = x$: $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$;
- quart de tour : $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$, $\sin(x + \pi/2) = \cos x$.

Exemple. $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$. $\sin(7\pi/6) = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$.

Pour trouver le cosinus d'un réel « grand », on lui retranche un multiple de 2π : $17\pi/4 = 4\pi + \pi/4$, donc $\cos(17\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

2. Les fonctions sinus et cosinus : définition, parité, périodicité

Définition. La fonction **cosinus** est la fonction $x \mapsto \cos x$ et la fonction **sinus** est la fonction $x \mapsto \sin x$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.

Périodicité. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période T** ($T > 0$) si $f(x + T) = f(x)$ pour tout réel x . Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont **2π -périodiques**. Graphiquement, la courbe est invariante par la translation de vecteur $2\pi \times$ vecteur i : il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π puis de la reproduire.

Parité. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x (courbe symétrique par rapport à l'origine).

- **cos est paire** car $\cos(-x) = \cos x$;
- **sin est impaire** car $\sin(-x) = -\sin x$.

Conséquence pratique : grâce à la parité et à la périodicité, l'étude de $\cos$ et de $\sin$ peut se limiter à l'intervalle $[0 ; \pi]$, puis on complète par symétrie sur $[-\pi ; \pi]$ et par translation sur $\mathbb{R}$.

Période d'une fonction composée. Pour $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto \cos(\omega x)$ est périodique de période $2\pi/\omega$, car $\cos(\omega(x + 2\pi/\omega)) = \cos(\omega x + 2\pi) = \cos(\omega x)$. Par exemple $\sin(3x)$ a pour période $2\pi/3$ et $\cos(x/2)$ a pour période 4π .

3. Dérivées et limite fondamentale

Propriété (admise). Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos x \text{ et } \cos'(x) = -\sin x.$$

En particulier elles sont continues sur $\mathbb{R}$.

La propriété a une interprétation géométrique : quand x augmente légèrement, le point $M(x)$ se déplace sur le cercle perpendiculairement au rayon, avec une vitesse de norme 1 ; le vecteur vitesse a pour coordonnées $(-\sin x ; \cos x)$, qui sont les dérivées de $\cos$ et de $\sin$.

Limite fondamentale. Le nombre dérivé de $\sin$ en 0 vaut $\cos 0 = 1$. Par définition du nombre dérivé, le taux d'accroissement $(\sin h - \sin 0)/h = \sin h / h$ tend vers 1 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin h / h = 1.$$

De même, le nombre dérivé de $\cos$ en 0 vaut $-\sin 0 = 0$, donc $(\cos x - 1)/x$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Interprétation : pour x proche de 0 (en radians), $\sin x \approx x$. C'est l'approximation des petits angles utilisée en physique pour le pendule. Par exemple $\sin(0,1) \approx 0,0998$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(5x)/x$: on écrit $\sin(5x)/x = 5 \times \sin(5x)/(5x)$. En posant $X = 5x$, qui tend vers 0, $\sin X / X$ tend vers 1, donc la limite vaut 5.

Dérivées des composées. Si u est dérivable sur un intervalle I :

$$(\sin u)' = u' \cos u \text{ et } (\cos u)' = -u' \sin u.$$

En particulier, pour a et b réels : $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$ et $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$.

Exemples :

- $f(x) = \cos(3x - \pi/4)$: $f'(x) = -3 \sin(3x - \pi/4)$;
- $g(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$: $g'(x) = 2 \sin x \cos x$;
- $h(x) = x \cos x$: $h'(x) = \cos x - x \sin x$.

Dérivées secondes : $\sin'' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos$. Les fonctions sinus et cosinus vérifient donc $y'' = -y$, et plus généralement $x \mapsto \cos(\omega x)$ vérifie $y'' = -\omega^2 y$. C'est l'équation d'un **oscillateur harmonique**, que l'on rencontre en mécanique et en électricité.

4. Variations et courbes sur une période

Étude de $\cos$ sur $[0 ; \pi]$: $\cos'(x) = -\sin x$, et $\sin x \geq 0$ sur $[0 ; \pi]$ (le point $M(x)$ est dans le demi-plan supérieur), nul seulement en 0 et en π . Donc **cos est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$** , de 1 à -1. Par parité, $\cos$ est strictement croissante sur $[-\pi ; 0]$.



x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x) = -\sin x$	0	+	0	-	0
$\cos x$	-1	$\boxtimes$	1	$\boxtimes$	-1

Étude de sin sur $[-\pi ; \pi]$: $\sin'(x) = \cos x$, positif sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$ et négatif sur $[-\pi ; -\pi/2]$ et sur $[\pi/2 ; \pi]$.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\sin'(x) = \cos x$	-1	-	0	+	0	-	-1
$\sin x$	0	$\boxtimes$	-1	$\boxtimes$	1	$\boxtimes$	0

Les courbes de sin et de cos sont des **sinusoïdes**. Comme $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, la courbe de cos est l'image de celle de sin par la translation de vecteur $-(\pi/2) \times$ vecteur i : c'est la même courbe, décalée d'un quart de période.

Repères des sinusoïdes

sin s'annule en $k\pi$, vaut 1 en $\pi/2 + 2k\pi$

cos s'annule en $\pi/2 + k\pi$, vaut 1 en $2k\pi$

Tangente à sin en 0 : $y = x$

Courbe de cos symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Courbe de sin symétrique par rapport à l'origine

Repères complémentaires, sans séquence causale

Remarque : la tangente à la courbe de sin en 0 a pour équation $y = x$ (car $\sin 0 = 0$ et $\sin'(0) = 1$). Pour $x \geq 0$, on montre que $\sin x \leq x$: la fonction $x \mapsto x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x \geq 0$, elle est donc croissante et vaut 0 en 0.

5. Équations trigonométriques

Le cercle trigonométrique montre que deux réels ont le même cosinus si et seulement si leurs points sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et le même sinus si et seulement si leurs points sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété. Pour tous réels x et a :

$\cos x = \cos a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, avec k entier relatif ;

$\sin x = \sin a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, avec k entier relatif.

Résoudre $\cos x = c$ ou $\sin x = c$

1. Vérifier que $-1 \leq c \leq 1$ (sinon aucune solution) • 2. Trouver un réel a avec $\cos a = c$ ou $\sin a = c$ • 3. Écrire les deux familles de solutions • 4. Sélectionner celles de l'intervalle demandé

Exemples :

- $\cos x = 1/2 = \cos(\pi/3)$: $x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/3 + 2k\pi$. Sur $]-\pi ; \pi]$, les solutions sont $-\pi/3$ et $\pi/3$;
- $\sin x = -1$: un seul point du cercle, $x = -\pi/2 + 2k\pi$;
- $\cos x = 2$: **aucune solution**, car un cosinus est compris entre -1 et 1 ;
- $\cos(2x) = 0 = \cos(\pi/2)$: $2x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $2x = -\pi/2 + 2k\pi$, ce qui se résume en $2x = \pi/2 + k\pi$, soit $x = \pi/4 + k\pi/2$. Attention : on divise aussi la période par 2.

Cas des valeurs non remarquables : pour $\cos x = 0,3$, la calculatrice (touche $\cos^{-1}$ en mode radian) fournit l'unique réel a de $[0 ; \pi]$ tel que $\cos a = 0,3$, soit $a \approx 1,266$; les solutions sont alors $x = \pm a + 2k\pi$.

Équations se ramenant au second degré : pour $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, on pose $X = \sin x$, avec $-1 \leq X \leq 1$. L'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ se factorise en $(2X + 1)(X - 1) = 0$, d'où $\sin x = 1$ ou $\sin x = -1/2$.

Inéquations. On les résout sur un intervalle donné à l'aide du cercle : on place les points où l'égalité a lieu, puis on repère l'arc où l'inégalité est vraie.

Exemple. $\cos x \geq 1/2$ sur $]-\pi ; \pi]$: les points d'abscisse supérieure ou égale à $1/2$ forment l'arc compris entre $M(-\pi/3)$ et $M(\pi/3)$, qui contient I . Ensemble des solutions : $[-\pi/3 ; \pi/3]$.

Exemple. $\sin x > 0$ sur $]-\pi ; \pi]$: les points d'ordonnée strictement positive forment le demi-cercle supérieur ouvert, d'où $]0 ; \pi[$.

6. Les fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$

En physique, une grandeur sinusoïdale s'écrit

$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, avec $A > 0$ et $\omega > 0$, où :

- A est l'**amplitude** : $s(t)$ varie entre $-A$ et A ;
- ω est la **pulsation**, en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $T = 2\pi/\omega$ est la **période**, en secondes ;
- $f = 1/T = \omega/(2\pi)$ est la **fréquence**, en hertz (Hz) ;
- φ est la **phase à l'origine** (en radians) ; $\omega t + \varphi$ est la **phase** à l'instant t .

Justification de la période : $s(t + 2\pi/\omega) = A \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi) = s(t)$.

On peut aussi écrire $s(t) = A \cos(\omega(t + \varphi/\omega))$: la courbe de s est celle de $A \cos(\omega t)$ décalée dans le temps de φ/ω . Une phase à l'origine positive correspond à une **avance**.

Dérivées :

- $s'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$, d'amplitude $A\omega$;
- $s''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s(t)$.

Lorsque s est une position, s' est la vitesse et s'' l'accélération : l'accélération est proportionnelle à la position et de signe opposé. La vitesse est nulle aux extrémités ($s = \pm A$) et maximale en valeur absolue au passage par 0.

Détermination de φ . Connaissant A , ω , la valeur $s(0)$ et le sens de variation à l'instant 0, on trouve φ : $\cos \varphi = s(0)/A$ donne deux valeurs possibles (φ et $-\varphi$), et le signe de $s'(0) = -A\omega \sin \varphi$ permet de choisir.

Une grandeur qui oscille autour d'une valeur moyenne m s'écrit $s(t) = m + A \cos(\omega t + \varphi)$. Elle varie entre $m - A$ et $m + A$, donc $m = (\max + \min)/2$ et $A = (\max - \min)/2$.

Modéliser un phénomène périodique

1. Mesurer la période T , en déduire $\omega = 2\pi/T$ • 2. Mesurer le maximum et le minimum, en déduire m et A • 3. Utiliser la valeur initiale et le sens de variation pour φ • 4. Contrôler le modèle sur une autre mesure

7. Modélisation de phénomènes périodiques

Tension du secteur. En France, la tension du secteur a une fréquence de 50 Hz et une valeur efficace de 230 V, soit une amplitude de $230 \times \sqrt{2} \approx 325$ V. On la modélise par $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$, avec $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $T = 20 \text{ ms}$.

Oscillateur mécanique. Un solide accroché à un ressort de raideur k , de masse m , écarté de sa position d'équilibre puis lâché, oscille sans frottement selon $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. L'équation $x'' = -\omega_0^2 x$ traduit la deuxième loi de Newton.

Pendule simple. Pour de petites oscillations ($\sin \theta \approx \theta$), l'angle suit $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, soit une période $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ indépendante de l'amplitude.

Phénomènes naturels et biologiques. La hauteur de la marée, la température au cours d'une journée ou d'une année, la pression dans une artère au cours d'un cycle cardiaque ou le volume pulmonaire lors d'une respiration calme sont approximativement périodiques. Un modèle sinusoïdal en donne une description simple, dont on doit discuter les limites : la vraie courbe n'est pas exactement une sinusoïde, et la période peut varier.

Exemple. Une pression oscille entre 80 et 120 (en mmHg) avec une période de 0,8 s. On prend $m = 100$, $A = 20$, $\omega = 2\pi/0,8 = 2,5\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, et si le maximum a lieu à $t = 0$: $P(t) = 100 + 20 \cos(2,5\pi t)$. La fréquence vaut $1/0,8 = 1,25 \text{ Hz}$, soit 75 cycles par minute.

Exemples résolus

Exemple 1 : étude de $x \mapsto x - 2 \sin x$

Énoncé. Soit f définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x) = x - 2 \sin x$. a) Calculer $f'(x)$. b) Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0 ; 2\pi]$, puis étudier le signe de $f'(x)$. c) Dresser le tableau de variations de f avec les valeurs exactes des extremums.

Résolution. a) $f'(x) = 1 - 2 \cos x$. b) $f'(x) = 0$ équivaut à $\cos x = 1/2 = \cos(\pi/3)$, soit $x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/3 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi]$: $x = \pi/3$ ou $x = 5\pi/3$. $f'(x) > 0$ équivaut à $\cos x < 1/2$. Sur le cercle, les points d'abscisse strictement inférieure à $1/2$ correspondent à x dans $] \pi/3 ; 5\pi/3[$. Donc $f'(x) < 0$ sur $[0 ; \pi/3[$ et sur $] 5\pi/3 ; 2\pi]$, $f'(x) > 0$ sur $] \pi/3 ; 5\pi/3[$. c) Valeurs : $f(0) = 0$; $f(\pi/3) = \pi/3 - 2 \times (\sqrt{3}/2) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0,685$; $f(5\pi/3) = 5\pi/3 - 2 \times (-\sqrt{3}/2) = 5\pi/3 + \sqrt{3} \approx 6,968$; $f(2\pi) = 2\pi \approx 6,283$.

x	0		$\pi/3$		$5\pi/3$		2π
$f'(x)$	-1	-	0	+	0	-	-1
$f(x)$	0	$\boxtimes$	$\pi/3 - \sqrt{3}$	$\boxtimes$	$5\pi/3 + \sqrt{3}$	$\boxtimes$	2π

Exemple 2 : équations et inéquation

Énoncé. a) Résoudre $\sin(2x) = \sqrt{3}/2$ sur $[0 ; 2\pi[$. b) Résoudre $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$. c) Résoudre $\cos x > -1/2$ sur $]-\pi ; \pi]$.

Résolution. a) $\sqrt{3}/2 = \sin(\pi/3)$. L'équation équivaut à $2x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \pi/3 + 2k\pi = 2\pi/3 + 2k\pi$, soit $x = \pi/6 + k\pi$ ou $x = \pi/3 + k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$ ($k = 0$ ou $k = 1$) : $S = \{\pi/6 ; \pi/3 ; 7\pi/6 ; 4\pi/3\}$. On obtient quatre solutions, car $\sin(2x)$ parcourt deux périodes quand x parcourt $[0 ; 2\pi[$. b) On pose $X = \sin x$: $2X^2 - X - 1 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 8 = 9$, les racines sont $(1 + 3)/4 = 1$ et $(1 - 3)/4 = -1/2$. $\sin x = 1$ donne $x = \pi/2$. $\sin x = -1/2 = \sin(-\pi/6)$ donne $x = -\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = \pi + \pi/6 + 2k\pi$, soit, dans $[0 ; 2\pi[$, $x = 11\pi/6$ ou $x = 7\pi/6$. $S = \{\pi/2 ; 7\pi/6 ; 11\pi/6\}$. c) $\cos x = -1/2$ pour $x = 2\pi/3$ ou $x = -2\pi/3$ dans $]-\pi ; \pi]$. Les points d'abscisse strictement supérieure à $-1/2$ forment l'arc ouvert de $M(-2\pi/3)$ à $M(2\pi/3)$ passant par I. $S =]-2\pi/3 ; 2\pi/3]$.

Exemple 3 : modéliser une tension sinusoïdale

Énoncé. Un oscilloscope affiche une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, avec φ dans $]-\pi ; \pi]$. On relève : valeur maximale 12 V, période 20 ms, $u(0) = 6,0$ V et u décroissante à l'instant 0. a) Déterminer U_m , ω et la fréquence. b) Déterminer φ . c) Calculer le premier instant $t > 0$ où la tension s'annule.

Résolution. a) $U_m = 12$ V. $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0,020 = 100\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \approx 314 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, et $f = 1/T = 50$ Hz. b) $u(0) = 12 \cos \varphi = 6$, donc $\cos \varphi = 1/2$, d'où $\varphi = \pi/3$ ou $\varphi = -\pi/3$. La dérivée vaut $u'(t) = -12\omega \sin(\omega t + \varphi)$, donc $u'(0) = -12\omega \sin \varphi$. Comme u est décroissante en 0, $u'(0) < 0$, donc $\sin \varphi > 0$: $\varphi = \pi/3$. c) $u(t) = 0$ équivaut à $\cos(100\pi t + \pi/3) = 0$, soit $100\pi t + \pi/3 = \pi/2 + k\pi$. La plus petite valeur positive s'obtient pour $k = 0$: $100\pi t = \pi/6$, $t = 1/600$ s, soit $t \approx 1,7$ ms.

Méthodes et pièges

- Règle ta calculatrice en mode radian : $\cos(\pi/3)$ en mode degré ne donne pas 0,5.
- Pour résoudre $\cos x = c$ ou $\sin x = c$, écris toujours les deux familles de solutions, puis sélectionne celles de l'intervalle en testant les valeurs de k une par une.
- Dans $\cos(2x) = c$, la période des solutions devient π et non 2π : divise aussi le terme $2k\pi$.
- Avant de chercher des solutions, vérifie que c est entre -1 et 1 ; sinon, l'ensemble des solutions est vide.
- Pour une inéquation, dessine le cercle, place les points d'égalité, colorie l'arc solution et lis ses extrémités dans le sens direct, en respectant l'intervalle imposé.
- N'oublie pas le facteur intérieur : $(\cos(\omega t + \varphi))' = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$, pas $-\sin(\omega t + \varphi)$.
- Ne confonds pas pulsation ω ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), fréquence f (Hz) et période T (s) : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.
- Pour déterminer φ , $\cos \varphi$ seul ne suffit pas : utilise le sens de variation à l'instant 0 (signe de la dérivée).

Vers le PASS

En PASS, les fonctions sinusoïdales servent d'abord en physique : oscillations mécaniques et électriques, ondes sonores et ultrasonores (échographie), ondes électromagnétiques, courant alternatif. La notion de fréquence relie ces signaux à l'audition (gamme des fréquences audibles) et à l'imagerie. Le cosinus intervient aussi dans les projections de vecteurs (composantes d'une force, travail d'une force, moment d'une force en biomécanique) et dans le produit scalaire. Enfin, l'idée qu'un signal périodique se décompose en sinusoïdes de fréquences différentes est à la base du traitement des signaux biologiques (électrocardiogramme, électroencéphalogramme) et de l'IRM.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Donner la valeur exacte de : $\cos(2\pi/3)$; $\sin(7\pi/6)$; $\cos(-\pi/4)$; $\sin(11\pi/3)$; $\cos(5\pi/6)$.
- Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$; $g(x) = \cos(3x - \pi/4)$; $h(x) = x \sin x$; $k(x) = \sin^2 x$; $m(x) = \cos x / (2 + \sin x)$.
- a) Montrer que $f(x) = \cos(2x)$ est paire et π -périodique. b) Montrer que $g(x) = x^2 \cos x$ est paire. c) Donner la période de $x \mapsto \sin(3x)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\cos x = \sqrt{2}/2$; b) $\sin x = -1$; c) $\sin x = \sin(\pi/5)$; d) $\cos(2x) = 0$.
- Déterminer les limites : a) en 0 de $\sin(3x)/x$; b) en 0 de $\sin x / (2x)$; c) en $+\infty$ de $\sin x / x$; d) en $+\infty$ de $x + \cos x$.

Niveau 2 : type bac

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$.
a) Montrer que f est impaire et 2π -périodique. b) Montrer que $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. c) Étudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$ et donner son maximum exact. d) En déduire l'allure des variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.
- Résoudre :
a) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$ sur $]-\pi ; \pi]$; b) $\cos(x - \pi/4) = 1/2$ sur $[0 ; 2\pi[$; c) $2\cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$; d) $\sin x \leq 1/2$ sur $[0 ; 2\pi[$.
- Un solide accroché à un ressort oscille horizontalement. Sa position, en mètres, est $x(t) = 0,050 \cos(10t + \pi/6)$, t en secondes.
a) Donner l'amplitude, la pulsation, la période et la fréquence du mouvement. b) Exprimer la vitesse $v(t) = x'(t)$ et donner sa valeur maximale. c) Vérifier que $x''(t) + 100 x(t) = 0$ pour tout t . d) Déterminer le premier instant $t > 0$ où le solide passe par la position d'équilibre $x = 0$.
- Dans un port, la hauteur d'eau (en mètres) est modélisée par $h(t) = 4 + 3 \cos(\pi t/6)$, t en heures, $t = 0$ correspondant à une pleine mer.
a) Donner les hauteurs maximale et minimale et la période du phénomène. b) Un bateau ne peut entrer que si $h(t) \geq 5,5$ m. Sur $[0 ; 12]$, déterminer les plages horaires d'entrée possibles. c) À quel instant de $[0 ; 12]$ la mer monte-t-elle le plus vite ? Avec quelle vitesse ?

10. La tension du secteur est modélisée par $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$, t en secondes, u en volts.

a) Donner l'amplitude, la période et la fréquence. b) Résoudre $u(t) = 162,5$ sur $[0 ; 0,020[$. c) Calculer la valeur maximale de $|u'(t)|$.

Niveau 3 : vers le PASS

11. Vrai ou faux ? Justifier.

a) La fonction $t \mapsto \sin t + \sin(2t)$ est périodique de période 2π . b) L'équation $\cos x = x$ admet exactement une solution réelle. c) Pour tout $x \geq 0$, $\sin x \leq x$. d) La limite en 0 de $(1 - \cos x)/x^2$ vaut $1/2$.

12. Un pendule simple de longueur $L = 1,00$ m oscille avec de petits angles, $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\theta_m = 0,10$ rad et φ dans $]-\pi ; \pi]$.

a) Calculer ω_0 et la période T_0 . b) À $t = 0$, $\theta(0) = 0,050$ rad et l'angle augmente. Déterminer φ . c) Calculer le premier instant $t > 0$ où $\theta(t) = \theta_m$. d) Calculer la valeur maximale de la vitesse angulaire $\theta'(t)$.

13. On modélise la pression dans une artère par $P(t) = 100 + 20 \cos(\omega t)$, t en secondes, P en mmHg, avec une période de $0,80$ s.

a) Calculer ω , ainsi que les valeurs extrêmes de P et le nombre de cycles par minute. b) Pendant quelle durée, au cours d'un cycle, a-t-on $P(t) \geq 110$? c) La fréquence passe à 90 cycles par minute. Donner la nouvelle pulsation. d) La proportion du cycle pendant laquelle $P(t) \geq 110$ dépend-elle de la fréquence ? Justifier.

Corrigés

1. $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3)$, $\cos(2\pi/3) = -1/2$.

$\sin(7\pi/6) = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin(\pi/6)$, $\sin(7\pi/6) = -1/2$. $\cos$ est paire : $\cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4)$, $\cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$. $11\pi/3 = 4\pi - \pi/3$, donc $\sin(11\pi/3) = \sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3)$, $\sin(11\pi/3) = -\sqrt{3}/2$. $\cos(5\pi/6) = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos(\pi/6)$, $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.

2. $f'(x) = 3 \cos x + 2 \sin x$.

$g'(x) = -3 \sin(3x - \pi/4)$, par la règle $(\cos u)' = -u' \sin u$ avec $u' = 3$: $g'(x) = -3 \sin(3x - \pi/4)$. $h = uv$ avec $u = x$ et $v = \sin x$: $h'(x) = \sin x + x \cos x$. $k = (\sin x)^2$: $k' = 2 \times \sin'(x) \times \sin x$, $k'(x) = 2 \sin x \cos x$. $m = u/v$ avec $u = \cos x$ et $v = 2 + \sin x > 0$ (car $\sin x \geq -1$) : $m' = (u'v - uv')/v^2 = [-\sin x(2 + \sin x) - \cos x \times \cos x]/(2 + \sin x)^2 = (-2 \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x)/(2 + \sin x)^2$. Comme $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: $m'(x) = -(2 \sin x + 1)/(2 + \sin x)^2$.

3. a) f est définie sur $\mathbb{R}$, et $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$ par parité de $\cos$: f est paire. De plus $f(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$: f est π -périodique.

b) $g(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = g(x)$: g est paire. c) $\sin(3(x + 2\pi/3)) = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x)$: la période est $2\pi/3$.

4. a) $\sqrt{2}/2 = \cos(\pi/4)$: $x = \pi/4 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/4 + 2k\pi$, k entier relatif.

b) Seul le point $M(-\pi/2)$ a pour ordonnée -1 : $x = -\pi/2 + 2k\pi$. c) $x = \pi/5 + 2k\pi$ ou $x = \pi - \pi/5 + 2k\pi = 4\pi/5 + 2k\pi$. d) $\cos(2x) = \cos(\pi/2)$ équivaut à $2x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $2x = -\pi/2 + 2k\pi$. Ces deux familles se regroupent en $2x = \pi/2 + k\pi$, donc $x = \pi/4 + k\pi/2$.

5. a) $\sin(3x)/x = 3 \times \sin(3x)/(3x)$. Avec $X = 3x$ qui tend vers 0, $\sin X / X$ tend vers 1 : limite 3.

b) $\sin x / (2x) = (1/2) \times \sin x / x$: limite $1/2$. c) Pour $x > 0$, $-1/x \leq \sin x / x \leq 1/x$, et les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, limite 0. d) $x + \cos x \geq x - 1$, qui tend vers $+\infty$: par comparaison, limite $+\infty$.

6. a) $f(-x) = \sin(-x)(1 + \cos(-x)) = -\sin x (1 + \cos x) = -f(x)$: **f est impaire**. $f(x + 2\pi) = f(x)$ car sin et cos sont 2π -périodiques : **f est 2π -périodique**.

b) $f(x) = \sin x + \sin x \cos x$. $f'(x) = \cos x + (\cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$. Avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$. Or $(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 2\cos^2 x + 2 \cos x - \cos x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1$. D'où $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. c) Sur $[0 ; \pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$ (nul seulement en π). $2 \cos x - 1 > 0$ équivaut à $\cos x > 1/2$, soit x dans $[0 ; \pi/3[$; il est négatif sur $]\pi/3 ; \pi]$. Donc f est croissante sur $[0 ; \pi/3]$ et décroissante sur $[\pi/3 ; \pi]$. $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0 \times 0 = 0$ et $f(\pi/3) = (\sqrt{3}/2)(1 + 1/2) = 3\sqrt{3}/4$. **Maximum : $3\sqrt{3}/4 \approx 1,30$, atteint en $\pi/3$** . d) f étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine : f est décroissante sur $[-\pi ; -\pi/3]$, de 0 à $-3\sqrt{3}/4$, puis croissante sur $[-\pi/3 ; \pi/3]$, de $-3\sqrt{3}/4$ à $3\sqrt{3}/4$, puis décroissante sur $[\pi/3 ; \pi]$, de $3\sqrt{3}/4$ à 0. **Minimum $-3\sqrt{3}/4$ en $-\pi/3$, maximum $3\sqrt{3}/4$ en $\pi/3$** .

7. a) $\sin x = -\sqrt{3}/2 = \sin(-\pi/3)$: $x = -\pi/3 + 2k\pi$ ou $x = \pi + \pi/3 + 2k\pi = 4\pi/3 + 2k\pi$. Dans $]-\pi ; \pi]$: $-\pi/3$ et $4\pi/3 - 2\pi = -2\pi/3$. **S = $\{-2\pi/3 ; -\pi/3\}$** .

b) $\cos(x - \pi/4) = \cos(\pi/3)$: $x - \pi/4 = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x - \pi/4 = -\pi/3 + 2k\pi$, soit $x = 7\pi/12 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/12 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$: $7\pi/12$ et $-\pi/12 + 2\pi = 23\pi/12$. **S = $\{7\pi/12 ; 23\pi/12\}$** . c) $X = \cos x$: $2X^2 + 3X + 1 = 0$, discriminant $9 - 8 = 1$, racines $(-3 + 1)/4 = -1/2$ et $(-3 - 1)/4 = -1$. $\cos x = -1/2$ donne $2\pi/3$ et $4\pi/3$; $\cos x = -1$ donne π . **S = $\{2\pi/3 ; \pi ; 4\pi/3\}$** . d) $\sin x = 1/2$ pour $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$ dans $[0 ; 2\pi]$. On a $\sin x > 1/2$ sur l'arc supérieur $]\pi/6 ; 5\pi/6[$. Donc $\sin x \leq 1/2$ sur le reste : **S = $[0 ; \pi/6] \cup [5\pi/6 ; 2\pi]$** .

8. a) Amplitude $X_m = 0,050 \text{ m} = 5,0 \text{ cm}$; pulsation $\omega = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$; période $T = 2\pi/10 \approx 0,63 \text{ s}$; fréquence $f = 1/T = 10/(2\pi) \approx 1,6 \text{ Hz}$.

b) $v(t) = -0,050 \times 10 \sin(10t + \pi/6) = -0,50 \sin(10t + \pi/6)$. Le sinus valant au plus 1 en valeur absolue, la **vitesse maximale vaut $0,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$** . c) $x''(t) = v'(t) = -0,50 \times 10 \cos(10t + \pi/6) = -5,0 \cos(10t + \pi/6) = -100 \times 0,050 \cos(10t + \pi/6) = -100 x(t)$. **Donc $x'' + 100x = 0$** . d) $x(t) = 0$ équivaut à $\cos(10t + \pi/6) = 0$, soit $10t + \pi/6 = \pi/2 + k\pi$. Le plus petit $t > 0$ est obtenu pour $k = 0$: $10t = \pi/3$, **$t = \pi/30 \approx 0,105 \text{ s}$** .

9. a) Le cosinus varie entre -1 et 1 : **$h_{\max} = 4 + 3 = 7 \text{ m}$, $h_{\min} = 4 - 3 = 1 \text{ m}$** . Période $T = 2\pi/(\pi/6) = 12 \text{ h}$.

b) $h(t) \geq 5,5$ équivaut à $\cos(\pi t/6) \geq 1/2$. Pour t dans $[0 ; 12]$, $X = \pi t/6$ parcourt $[0 ; 2\pi]$, et $\cos X \geq 1/2$ pour X dans $[0 ; \pi/3] \cup [5\pi/3 ; 2\pi]$, soit t dans $[0 ; 2] \cup [10 ; 12]$. **Entrée possible entre 0 h et 2 h, puis entre 10 h et 12 h** (4 h par cycle, centrées sur la pleine mer). c) $h'(t) = -3 \times (\pi/6) \sin(\pi t/6) = -(\pi/2) \sin(\pi t/6)$. La montée est la plus rapide quand $h'(t)$ est maximal, c'est-à-dire quand $\sin(\pi t/6) = -1$, soit $\pi t/6 = 3\pi/2$, **$t = 9 \text{ h}$** , à mi-chemin entre la basse mer (6 h) et la pleine mer suivante (12 h). **Vitesse : $\pi/2 \approx 1,6 \text{ m}\cdot\text{h}^{-1}$** .

10. a) Amplitude **325 V** ; $\omega = 100\pi$, donc **$T = 2\pi/(100\pi) = 0,020 \text{ s} = 20 \text{ ms}$** et **$f = 50 \text{ Hz}$** .

b) $325 \cos(100\pi t) = 162,5$ équivaut à $\cos(100\pi t) = 1/2$. Pour t dans $[0 ; 0,020[$, $X = 100\pi t$ parcourt $[0 ; 2\pi]$, et $\cos X = 1/2$ pour $X = \pi/3$ ou $X = 5\pi/3$. Donc $t = 1/300 \text{ s}$ ou $t = 5/300 = 1/60 \text{ s}$. **S = $\{1/300 ; 1/60\}$, soit environ 3,3 ms et 16,7 ms**. c) $u'(t) = -325 \times 100\pi \sin(100\pi t)$. Son maximum en valeur absolue vaut $32\,500\pi \approx 1,02 \times 10^5 \text{ V}\cdot\text{s}^{-1}$, atteint quand la tension passe par 0.

11. a) **Vrai**. $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ et $\sin(2(t + 2\pi)) = \sin(2t + 4\pi) = \sin(2t)$, donc la somme est inchangée par $t \mapsto t + 2\pi$.

b) **Vrai.** Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$, une solution vérifie $-1 \leq x \leq 1$. Sur $[-1 ; 0]$, $\cos x > 0 \geq x$ (car $\cos x \geq \cos 1 > 0$ sur $[-1 ; 1]$), donc pas de solution. Sur $[0 ; 1]$, $g(x) = \cos x - x$ a pour dérivée $-\sin x - 1 \leq -1 < 0$ (car $\sin x \geq 0$ sur $[0 ; 1]$), g est strictement décroissante et continue, avec $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), **g s'annule exactement une fois** (vers $x \approx 0,739$). c) **Vrai.** $h(x) = x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x \geq 0$, donc h est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $h(x) \geq h(0) = 0$. d) **Vrai.** Pour x non nul proche de 0, $1 + \cos x \neq 0$ et $(1 - \cos x)/x^2 = (1 - \cos x)(1 + \cos x)/(x^2(1 + \cos x)) = \sin^2 x / (x^2(1 + \cos x)) = (\sin x / x)^2 \times 1/(1 + \cos x)$. Le premier facteur tend vers $1^2 = 1$, le second vers $1/2$: **la limite vaut $1/2$.**

12. a) $\omega_0 = \sqrt{9,81/1,00} \approx 3,13 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$; $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 2,01 \text{ s}$.

b) $\theta(0) = 0,10 \cos \varphi = 0,050$, donc $\cos \varphi = 1/2$ et $\varphi = \pm\pi/3$. $\theta'(0) = -\theta_m \omega_0 \sin \varphi > 0$ impose $\sin \varphi < 0$: $\varphi = -\pi/3$. c) $\theta(t) = \theta_m$ équivaut à $\cos(\omega_0 t - \pi/3) = 1$, soit $\omega_0 t - \pi/3 = 2k\pi$. Le premier instant positif correspond à $k = 0$: $t = \pi/(3\omega_0) = T_0/6 \approx 0,33 \text{ s}$. d) $\theta'(t) = -\theta_m \omega_0 \sin(\omega_0 t - \pi/3)$, de valeur maximale $\theta_m \omega_0 = 0,10 \times 3,13 \approx 0,31 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, atteinte au passage par la verticale.

13. a) $\omega = 2\pi/0,80 = 2,5\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \approx 7,85 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. P varie entre **80 et 120 mmHg**. Nombre de cycles par minute : $60/0,80 = 75$.

b) $P(t) \geq 110$ équivaut à $\cos(\omega t) \geq 1/2$. Sur un cycle, avec $X = \omega t$ dans $[-\pi ; \pi]$, la condition s'écrit X dans $[-\pi/3 ; \pi/3]$, intervalle de longueur $2\pi/3$. La durée correspondante vaut $(2\pi/3)/\omega = (2\pi/3)/(2,5\pi) = 4/15 \text{ s}$, **soit environ 0,27 s par cycle**. c) $T = 60/90 = 2/3 \text{ s}$, donc $\omega = 2\pi/(2/3) = 3\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \approx 9,4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. d) La durée vaut $(2\pi/3)/\omega$ et la période $2\pi/\omega$: leur rapport vaut $1/3$ quelle que soit ω . **Non : $P(t) \geq 110$ pendant un tiers de chaque cycle, quelle que soit la fréquence** (dans ce modèle, où seule ω change).