

Fiche : Fonctions sinus et cosinus

FICHE • M14 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le point $M(x)$ du cercle trigonométrique a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$, avec x en radians.
- Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et $\cos x$ et $\sin x$ sont compris entre -1 et 1 .
- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques : on les étudie sur un intervalle de longueur 2π .
- La fonction $\cos$ est paire (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), la fonction $\sin$ est impaire (courbe symétrique par rapport à l'origine).
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.
- Pour une fonction u dérivable, $(\sin u)' = u' \cos u$ et $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- Le nombre dérivé de $\sin$ en 0 vaut 1 , d'où la limite fondamentale : $\sin x / x$ tend vers 1 quand x tend vers 0 .
- $\cos$ est décroissante sur $[0 ; \pi]$ et croissante sur $[-\pi ; 0]$; $\sin$ est croissante sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$ et décroissante sur $[\pi/2 ; \pi]$.
- La courbe de $\cos$ est celle de $\sin$ décalée de $\pi/2$ vers la gauche, car $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.
- $\cos x = \cos a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.
- Une inéquation trigonométrique se résout sur un intervalle en repérant un arc sur le cercle.
- Dans $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, A est l'amplitude, ω la pulsation, φ la phase à l'origine, $T = 2\pi/\omega$ la période et $f = 1/T$ la fréquence.
- La fonction $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ vérifie $s'' = -\omega^2 s$: c'est le modèle de l'oscillateur harmonique.
- Pour une grandeur oscillant entre un minimum et un maximum, la valeur moyenne vaut $(\max + \min)/2$ et l'amplitude $(\max - \min)/2$.



Formules et définitions à connaître

Notion	Formule	Remarque
Relation fondamentale	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	pour tout x
Parité	$\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$	
Angles associés	$\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$	
Quart de tour	$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$; $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$	
Dérivées	$\sin' = \cos$; $\cos' = -\sin$	x en radians
Composées	$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$; $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$	
Limite	$\sin x / x \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$	
Équation en cos	$x = \pm a + 2k\pi$	k entier relatif
Équation en sin	$x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$	k entier relatif
Signal sinusoïdal	$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$	$A > 0$, $\omega > 0$
Période, fréquence	$T = 2\pi/\omega$; $f = 1/T = \omega/(2\pi)$	T en s, f en Hz

Pièges à éviter

- Calculer en mode degré alors que le cours travaille en radians.



- N'écrire qu'une seule famille de solutions pour $\cos x = c$ ou $\sin x = c$.
- Dans $\cos(2x) = c$, oublier de diviser aussi $2k\pi$ par 2.
- Chercher des solutions à $\cos x = 1,5$: il n'y en a aucune.
- Oublier le facteur ω en dérivant $\cos(\omega t + \varphi)$.
- Déterminer φ avec $\cos \varphi$ seul, sans utiliser le sens de variation à l'instant 0.

Je me teste

1. Valeur exacte de $\sin(5\pi/6)$? $\rightarrow 1/2$.
2. Dérivée de $\cos(4x)$? $\rightarrow -4 \sin(4x)$.
3. Période de $x \mapsto \cos(3x)$? $\rightarrow 2\pi/3$.
4. Limite de $\sin(2x)/x$ en 0 ? $\rightarrow 2$.
5. Solutions de $\cos x = 0$ sur $\mathbb{R}$? $\rightarrow x = \pi/2 + k\pi$.
6. Solutions de $\sin x = 1/2$ sur $[0 ; 2\pi[$? $\rightarrow \pi/6$ et $5\pi/6$.
7. Solutions de $\cos x \geq 0$ sur $]-\pi ; \pi]$? $\rightarrow [-\pi/2 ; \pi/2]$.
8. Pulsation d'un signal de fréquence 50 Hz ? $\rightarrow 100\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
9. Amplitude et valeur moyenne de $4 + 3 \cos t$? $\rightarrow$ amplitude 3, moyenne 4.
10. Équation vérifiée par $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$? $\rightarrow s'' = -\omega^2 s$.