

Fonction logarithme népérien

COURS • M13 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	8
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Définir $\ln a$, pour $a > 0$, comme l'unique solution de l'équation $e^x = a$, et utiliser les égalités $e^{\ln x} = x$ et $\ln(e^x) = x$.
- Utiliser la relation fonctionnelle $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et ses conséquences (inverse, quotient, puissance entière, racine carrée) pour simplifier une expression.
- Calculer la dérivée de $\ln$ et celle de $\ln(u)$ pour une fonction u strictement positive et dérivable.
- Dresser le tableau de variations de $\ln$, connaître ses limites en 0 et en $+\infty$ et l'allure de sa courbe.
- Utiliser les croissances comparées ($\ln x / x$ en $+\infty$, $x \ln x$ en 0) pour lever une forme indéterminée.
- Résoudre une équation ou une inéquation faisant intervenir $\ln$ ou $\exp$, en commençant par le domaine de validité.
- Déterminer le plus petit entier n tel que q^n dépasse ou passe sous un seuil donné.
- Utiliser le logarithme décimal $\log$ et ses propriétés.
- Exploiter le logarithme dans des modèles : pH d'une solution, niveau sonore en décibels, demi-vie d'une décroissance exponentielle.

Cours

1. Définition comme réciproque de l'exponentielle

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec une limite égale à 0 en $-\infty$ et à $+\infty$ en $+\infty$. Elle prend toutes les valeurs strictement positives, chacune une seule fois (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone).

Définition. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution réelle. On l'appelle **logarithme népérien de a** et on la note $\ln a$. La fonction $\ln$ est ainsi définie sur $]0; +\infty[$.

Autrement dit, pour $x > 0$ et y réel : $y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$.

Conséquences immédiates :

- $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$;
- $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x ;
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$).

Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont dites **réci-proques** l'une de l'autre. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** : le point $(a ; b)$ est sur la courbe de $\exp$ si et seulement si le point $(b ; a)$ est sur celle de $\ln$.

Comme $\exp$ est strictement croissante, $\ln$ l'est aussi. On en déduit, pour $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.

Justification de la seconde : si $a < b$ avec $\ln a \geq \ln b$, alors, $\exp$ étant croissante, $e^{\ln a} \geq e^{\ln b}$, c'est-à-dire $a \geq b$, contradiction. La réciproque se traite de la même façon.

Signe du logarithme : en comparant x à 1 et en utilisant $\ln 1 = 0$,

- $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$;
- $\ln x = 0$ pour $x = 1$;
- $\ln x > 0$ pour $x > 1$.

Ces équivalences sont l'outil principal de résolution des équations et inéquations : on passe d'une égalité ou d'une inégalité entre logarithmes à une égalité ou une inégalité entre les nombres eux-mêmes, et inversement.

2. Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Propriété fondamentale. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration. D'après la propriété de l'exponentielle $e^{x+y} = e^x \times e^y$: $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b = e^{\ln(ab)}$. Deux réels qui ont la même exponentielle sont égaux ($\exp$ est strictement croissante), donc $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.

Le logarithme transforme les produits en sommes : c'est historiquement la raison de son invention, pour simplifier les calculs astronomiques.

Conséquences, pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier relatif :

- $\ln(1/a) = -\ln a$, car $\ln a + \ln(1/a) = \ln(a \times 1/a) = \ln 1 = 0$;
- $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, car $a/b = a \times (1/b)$;
- $\ln(a^n) = n \ln a$: pour n entier naturel, par récurrence ($\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a$), puis pour n négatif grâce à l'inverse ;
- $\ln(\sqrt{a}) = (1/2) \ln a$, car $(\sqrt{a})^2 = a$ donne $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a$.

Expression	Transformation
$\ln(ab)$	$\ln a + \ln b$
$\ln(1/a)$	$-\ln a$

Expression	Transformation
$\ln(a/b)$	$\ln a - \ln b$
$\ln(a^n)$	$n \ln a$
$\ln(\sqrt[n]{a})$	$(1/n) \ln a$
$e^{\ln a}$	a
$\ln(e^x)$	x

Exemple. $A = \ln 50 - 2 \ln 5$. On écrit $50 = 2 \times 5^2$, donc $\ln 50 = \ln 2 + 2 \ln 5$ et $A = \ln 2$.

Exemple. $B = \ln(e^2) + \ln(1/\sqrt{e}) = 2 - 1/2 = 3/2$.

Attention : il n'existe **aucune formule** pour $\ln(a + b)$. Par exemple $\ln(1 + 1) = \ln 2$, qui n'est pas égal à $\ln 1 + \ln 1 = 0$.

Ces règles exigent que a et b soient strictement positifs. L'expression $\ln(x^2)$ est définie pour tout x non nul, mais elle vaut $2 \ln|x|$ et non $2 \ln x$: si $x = -3$, $\ln(x^2) = \ln 9 = 2 \ln 3$, alors que $2 \ln(-3)$ n'existe pas.

3. Dérivée de $\ln$ et de $\ln(u)$

Propriété. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = 1/x$.

Justification (la dérivabilité étant admise). Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. On dérive les deux membres, le premier comme une composée $(e^u)' = u' e^u$: $\ln'(x) \times e^{\ln x} = 1$, soit $\ln'(x) \times x = 1$, donc $\ln'(x) = 1/x$.

Une autre lecture de ce résultat : le nombre dérivé de $\ln$ en 1 vaut 1, ce qui s'écrit, avec le taux d'accroissement,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h) - \ln(1)}{h} = 1$.

Cette limite est très utile : pour h proche de 0, $\ln(1 + h)$ est proche de h (approximation affine). Par exemple $\ln(1,02) \approx 0,0198$, très proche de 0,02.

Dérivée d'une composée. Si u est dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = u'/u$.

C'est un cas particulier de la dérivée de $x \mapsto g(u(x))$, égale à $u'(x) \times g'(u(x))$, avec $g = \ln$.

Exemples :

- $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 > 0$, et $f'(x) = 2x/(x^2 + 1)$;
- $g(x) = \ln(3x - 6)$ est définie sur $]2; +\infty[$, et $g'(x) = 3/(3x - 6) = 1/(x - 2)$;
- $h(x) = x \ln x$ sur $]0; +\infty[$: par la dérivée d'un produit, $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times (1/x) = \ln x + 1$.

Remarque : comme u' et u'/u ont le même signe lorsque $u > 0$, la fonction $\ln(u)$ a **les mêmes variations que u** sur I . C'est cohérent avec la croissance de $\ln$.

Tangente en 1 : $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$, donc la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.

Convexité : la dérivée seconde vaut $\ln''(x) = -1/x^2$, strictement négative. La fonction $\ln$ est donc **concave** sur $]0 ; +\infty[$ et sa courbe est située **sous chacune de ses tangentes**. En particulier :

$\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

4. Variations, limites et courbe

La dérivée $1/x$ est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$: **$\ln$ est strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

Limites aux bornes. $\lim$ quand x tend vers $+\infty$ de $\ln x = +\infty$; $\lim$ quand x tend vers 0 par valeurs positives de $\ln x = -\infty$.

Justification de la limite en $+\infty$. Soit M un réel quelconque. Dès que $x > e^M$, la croissance de $\ln$ donne $\ln x > \ln(e^M) = M$. Donc $\ln x$ dépasse tout réel M pour x assez grand.

Justification de la limite en 0. Pour $x > 0$, $\ln x = -\ln(1/x)$. Quand x tend vers 0 par valeurs positives, $1/x$ tend vers $+\infty$, donc $\ln(1/x)$ tend vers $+\infty$ et $\ln x$ tend vers $-\infty$.

Conséquence graphique : l'axe des ordonnées (droite $x = 0$) est **asymptote verticale** à la courbe de $\ln$.

Tableau de variations :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x) = 1/x$	$\parallel$	+		+		+	
$\ln x$	$-\infty$	$\boxtimes$	0	$\boxtimes$	1	$\boxtimes$	$+\infty$

Valeurs utiles : $\ln 2 \approx 0,693$; $\ln 3 \approx 1,099$; $\ln 10 \approx 2,303$; $e \approx 2,718$.

L'allure de la courbe : elle traverse l'axe des abscisses en $x = 1$, monte très vite près de 0 (pente $1/x$ grande) puis de plus en plus lentement (pente $1/x$ proche de 0 pour x grand), sans jamais avoir de limite finie. Pour atteindre $\ln x = 10$, il faut déjà $x = e^{10} \approx 22\,026$.

Repères de la courbe de $\ln$

Passe par (1 ; 0) et (e ; 1)

Asymptote verticale $x = 0$

Tangente $y = x - 1$ en 1

Concave, sous ses tangentes

Symétrique de $\exp$ par rapport à $y = x$

Repères complémentaires, sans séquence causale

5. Croissances comparées

Lorsque x tend vers $+\infty$, x et $\ln x$ tendent tous deux vers $+\infty$: le quotient $\ln x / x$ est une forme indéterminée. Le résultat suivant la lève.

Croissances comparées.

$\lim$ quand x tend vers $+\infty$ de $\ln x / x = 0$;

$\lim$ quand x tend vers 0 par valeurs positives de $x \ln x = 0$.

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln x / x^n$ tend vers 0 en $+\infty$ et $x^n \ln x$ tend vers 0 en 0.

Démonstration de la première. On pose $X = \ln x$, soit $x = e^X$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$, et $\ln x / x = X / e^X$. Or on sait (croissance comparée de l'exponentielle) que e^X / X tend vers $+\infty$, donc X / e^X tend vers 0.

Démonstration de la seconde. On pose $t = 1/x$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs positives. Alors $x \ln x = (1/t) \times \ln(1/t) = -\ln t / t$, qui tend vers 0 d'après la première limite.

Pour la généralisation : $\ln x / x^n = (\ln x / x) \times (1/x^{n-1})$, produit d'un terme qui tend vers 0 et d'un terme borné pour $x \geq 1$.

On retient l'idée : **en $+\infty$, toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$; en 0, toute puissance de x l'emporte aussi sur $\ln x$.** Le logarithme croît, mais beaucoup plus lentement que n'importe quelle puissance.

Exemples :

- $\lim$ en $+\infty$ de $(x - \ln x)$: on factorise, $x - \ln x = x(1 - \ln x / x)$. Le facteur entre parenthèses tend vers 1, donc la limite est $+\infty$;
- $\lim$ en $+\infty$ de $\ln x / \sqrt{x}$: en posant $X = \sqrt{x}$, $\ln x = 2 \ln X$ et $\ln x / \sqrt{x} = 2 \ln X / X$, qui tend vers 0.

6. Équations, inéquations et seuils

La méthode générale tient en cinq étapes.

Résoudre une équation avec $\ln$

1. Déterminer le domaine de validité
2. Regrouper les logarithmes avec les propriétés
3. Se ramener à $\ln A = \ln B$ ou $A = e^k$
4. Résoudre l'équation algébrique
5. Garder les solutions du domaine

Exemples :

- $e^x = 5$ équivaut à $x = \ln 5$;
- $\ln(2x - 1) = 3$: domaine $2x - 1 > 0$, soit $x > 1/2$. L'équation équivaut à $2x - 1 = e^3$, donc $x = (e^3 + 1)/2$, qui vérifie bien $x > 1/2$;
- $\ln(x - 2) \leq 1$: domaine $x > 2$. Comme $1 = \ln e$, l'inéquation équivaut à $x - 2 \leq e$ ($\ln$ est croissante), soit $x \leq 2 + e$. Ensemble des solutions : $]2 ; 2 + e]$;
- $e^{3x} > 2$: $\ln$ étant croissante, $3x > \ln 2$, soit $x > (\ln 2)/3$.

Problème de seuil. On cherche le plus petit entier n tel que $0,8^n < 0,01$. Les deux membres sont strictement positifs, et $\ln$ est strictement croissante, donc l'inégalité équivaut à $\ln(0,8^n) < \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,8) < \ln(0,01)$. Comme $\ln(0,8) < 0$ (car $0,8 < 1$), la division par $\ln(0,8)$ **change le sens** : $n > \ln(0,01)/\ln(0,8) \approx 20,64$. Le plus petit entier convenable est **$n = 21$** . Vérification : $0,8^{20} \approx 0,0115$ et $0,8^{21} \approx 0,0092$.

Équations de degré 2 déguisées : pour $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$, on pose $X = \ln x$. L'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2, donc $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$, soit $x = e$ ou $x = e^2$.

7. Logarithme décimal

Définition. Le **logarithme décimal** est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par **$\log x = \ln x / \ln 10$** .

Comme $\ln 10 > 0$, $\log$ a les mêmes variations et les mêmes propriétés algébriques que $\ln$:

- $\log(ab) = \log a + \log b$; $\log(a/b) = \log a - \log b$; $\log(a^n) = n \log a$;
- **$\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, et $\log(10^n) = n$** pour tout entier n ;
- **$y = \log x$ équivaut à $x = 10^y$** (on note $10^y = e^{y \ln 10}$ pour un réel y quelconque).

Le logarithme décimal mesure l'**ordre de grandeur** d'un nombre : $\log(1\,000) = 3$, $\log(0,001) = -3$. Un nombre entier $N \geq 1$ qui s'écrit avec k chiffres vérifie $10^{k-1} \leq N < 10^k$, donc $k - 1 \leq \log N < k$: le nombre de chiffres de N est la partie entière de $\log N$, plus 1.

Une **échelle logarithmique** remplace une grandeur x par $\log x$: multiplier x par 10 revient à ajouter 1 à $\log x$. Elle sert à représenter des grandeurs qui s'étalent sur plusieurs ordres de grandeur (concentrations, intensités sonores, magnitudes).

8. Applications : pH, décibels, demi-vie

pH d'une solution aqueuse. Pour une solution diluée, on définit **$\text{pH} = -\log([H_3O^+]/c^\circ)$** , avec $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, ce qui revient à **$\text{pH} = -\log[H_3O^+]$** avec la concentration exprimée en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Réciproquement, **$[H_3O^+] = 10^{-\text{pH}} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$** .

Exemple. $[H_3O^+] = 2,5 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ donne $\text{pH} = -(\log 2,5 + \log 10^{-4}) = 4 - \log 2,5 \approx 4 - 0,398 \approx 3,60$.

Conséquence : diviser $[H_3O^+]$ par 10 augmente le pH d'une unité. Deux solutions dont les pH diffèrent de 2 ont des concentrations en ions oxonium dans un rapport $10^2 = 100$.

Niveau d'intensité sonore. Pour une intensité sonore I (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$), le niveau d'intensité sonore, en décibels (dB), est **$L = 10 \log(I/I_0)$** , avec $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (seuil d'audibilité).

Exemple. $I = 1,0 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ donne $L = 10 \log(10^7) = 70 \text{ dB}$.

Doubler l'intensité ajoute $10 \log 2 \approx 3,0 \text{ dB}$: deux sources identiques et indépendantes de 70 dB donnent environ 73 dB, et non 140 dB. Multiplier l'intensité par 10 ajoute 10 dB.

Demi-vie d'une décroissance exponentielle. Une grandeur qui décroît selon $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, avec $\lambda > 0$ (désintégrations radioactives, élimination d'un médicament, refroidissement de l'écart de température), est divisée par 2 au bout d'une durée constante appelée **demi-vie** $t_{1/2}$: $N(t_{1/2}) = N_0/2$ équivaut à $e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$, soit $-\lambda t_{1/2} = \ln(1/2) = -\ln 2$, donc

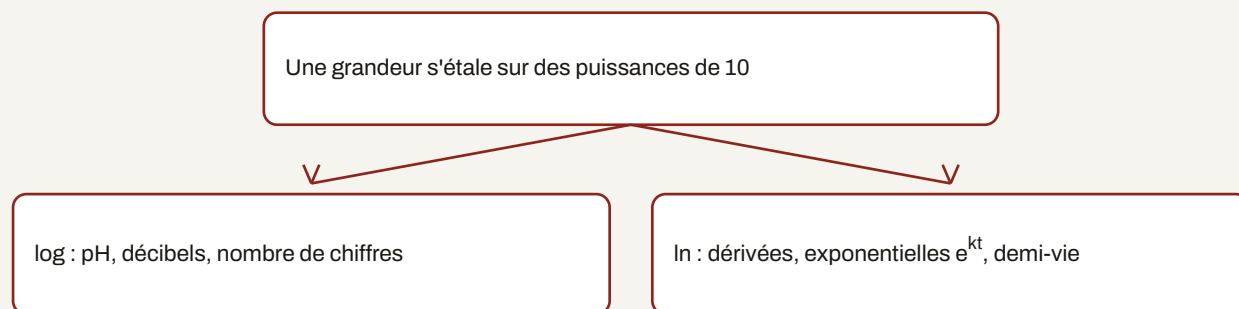
$$t_{1/2} = \ln 2 / \lambda.$$

Cette durée ne dépend pas de N_0 ni de l'instant de départ. Au bout de n demi-vies, il reste $N_0/2^n$.

Exemple (datation). Le carbone 14 a une demi-vie de 5 730 ans, donc $\lambda = \ln 2 / 5\,730 \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$. Un échantillon qui ne contient plus que 30 % de son carbone 14 initial vérifie $e^{-\lambda t} = 0,30$, soit $t =$

$$\ln(1/0,30)/\lambda = 5\,730 \times \ln(10/3)/\ln 2 \approx 9,95 \times 10^3 \text{ ans.}$$

Quel logarithme utiliser ?



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Exemples résolus

Exemple 1 : étude de la fonction $x \mapsto \ln x / x$

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x / x$. a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. b) Étudier les variations de f . c) Résoudre $f(x) = 0$ et donner le signe de f . d) En déduire la comparaison des nombres e^π et π^e .

Résolution. a) En 0 par valeurs positives : $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $1/x$ tend vers $+\infty$, donc le produit $\ln x \times (1/x)$ tend vers $-\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée. En $+\infty$: forme indéterminée levée par croissance comparée, $\lim f(x) = 0$. La courbe admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. b) f est un quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annule pas sur $]0 ; +\infty[$: $f'(x) = [(1/x) \times x - \ln x \times 1]/x^2 = (1 - \ln x)/x^2$. Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - \ln x$. Or $1 - \ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 1$, soit $x < e$. Donc f est strictement croissante sur $]0 ; e]$ et strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$, avec un **maximum** $f(e) = 1/e \approx 0,368$. c) $f(x) = 0$ équivaut à $\ln x = 0$, soit $x = 1$. f est négative sur $]0 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$ (signe de $\ln x$, puisque $x > 0$). d) On a $e < \pi$, et f est strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$, donc $f(\pi) < f(e)$, c'est-à-dire $\ln \pi / \pi < \ln e / e = 1/e$. On multiplie par $e\pi > 0$: $e \ln \pi < \pi$, soit $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante, $\pi^e < e^\pi$. (Numériquement, $\pi^e \approx 22,46$ et $e^\pi \approx 23,14$.)

Exemple 2 : équation et inéquation

Énoncé. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$. b) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $(\ln x)^2 - \ln x - 2 < 0$.

Résolution. a) Domaine : il faut $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $x > 2$. Sur $]2 ; +\infty[$, $\ln x + \ln(x - 2) = \ln(x(x - 2))$. L'équation équivaut à $\ln(x^2 - 2x) = \ln 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$. Le discriminant vaut $4 + 12 = 16$, les racines sont $(2 + 4)/2 = 3$ et $(2 - 4)/2 = -1$. Seule 3 appartient au domaine : $S = \{3\}$. Vérification : $\ln 3 + \ln 1 = \ln 3$. b) On pose $X = \ln x$. L'inéquation devient $X^2 - X - 2 < 0$. Les racines du trinôme sont 2 et -1 (somme 1, produit -2), et un trinôme de coefficient dominant positif est négatif strictement entre ses racines : $-1 < X < 2$. Donc $-1 < \ln x < 2$, et par croissance de $\exp$, $e^{-1} < x < e^2$. $S =]1/e ; e^2[$.

Exemple 3 : demi-vie d'un médicament

Énoncé. Après une injection intraveineuse, la concentration plasmatique d'un médicament est modélisée par $C(t) = C_0 e^{-kt}$, t en heures, C en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. On mesure $C_0 = 12 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et, trois heures plus tard, $C(3) = 7,5 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. a) Déterminer k . b) Calculer la demi-vie d'élimination. c) Au bout de combien de temps la concentration passe-t-elle sous $1,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$?

Résolution. a) $12 e^{-3k} = 7,5$ équivaut à $e^{-3k} = 7,5/12 = 0,625$, soit $-3k = \ln 0,625$, donc $k = -\ln(0,625)/3 = \ln(1,6)/3 \approx 0,470/3$, $k \approx 0,157 \text{ h}^{-1}$. b) $t_{1/2} = \ln 2 / k = 3 \ln 2 / \ln 1,6 \approx 0,6931 \times 3/0,4700 \approx 4,4 \text{ h}$. c) $C(t) < 1$ équivaut à $e^{-kt} < 1/12$, soit $-kt < -\ln 12$ ($\ln$ croissante), donc $t > \ln 12 / k \approx 2,485/0,1567 \approx 15,9$. La concentration passe sous $1,0 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$ au bout d'environ **15,9 h**.

Méthodes et pièges

- Pour toute équation ou inéquation, commence par écrire le domaine de validité : chaque $\ln$ doit porter sur une quantité strictement positive. Élimine à la fin les solutions hors domaine.
- Pour passer de $\ln A < \ln B$ à $A < B$, invoque explicitement la stricte croissance de $\ln$; pour passer de $A < B$ à $\ln A < \ln B$, vérifie que A et B sont strictement positifs.
- Quand tu divises une inégalité par $\ln q$ avec $0 < q < 1$, $\ln q$ est négatif : le sens de l'inégalité change. C'est l'erreur la plus fréquente dans les problèmes de seuil.
- N'écris jamais $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$, ni $\ln(a)/\ln(b) = \ln(a/b)$, ni $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(ab)$.
- $(\ln u)'$ vaut u'/u , pas $1/u$: n'oublie pas le facteur u' .
- Devant une forme indéterminée avec $\ln$, cherche à faire apparaître $\ln x / x$ ou $x \ln x$, éventuellement par factorisation ou changement de variable.
- Ne confonds pas $\ln$ et $\log$: pH et décibels utilisent $\log$, la demi-vie s'écrit avec $\ln 2$ parce que le modèle est en $e^{-\lambda t}$.
- Pour un seuil, donne un entier et vérifie-le en calculant le terme juste avant et juste après.

Vers le PASS

En PASS, le logarithme est partout où une grandeur varie sur plusieurs ordres de grandeur ou décroît de façon exponentielle. En chimie, il sert au calcul du pH des acides et des bases, à la relation de Henderson-Hasselbalch des solutions tampons ($\text{pH} = \text{pKa} + \log$ du rapport base sur acide) et à l'expression de l'enthalpie libre. En biophysique, l'équation de Nernst donne le potentiel d'équilibre d'un ion à partir du logarithme du rapport des concentrations de part et d'autre de la membrane. En pharmacocinétique, on trace $\ln C$ en fonction de t pour obtenir une droite dont la pente donne la constante d'élimination, puis la demi-vie et la clairance. En radioactivité, la loi de décroissance et la demi-vie servent en médecine nucléaire et en dosimétrie. Il faut savoir manipuler ces calculs sans calculatrice, avec $\ln 2 \approx 0,69$, $\ln 10 \approx 2,3$ et $\log 2 \approx 0,30$.

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Simplifier les nombres suivants : $A = \ln 8 + \ln 2 - \ln 4$; $B = \ln(e^3) - \ln(1/e)$; $C = e^{2 \ln 3}$; $D = \ln(\sqrt{e})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $e^x = 7$; b) $\ln x = -2$; c) $\ln(3x + 1) = 0$; d) $e^{2x-1} = 1$.
3. Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué : $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0 ; +\infty[$; $g(x) = \ln(x^2 + 3)$ sur $\mathbb{R}$; $h(x) = (\ln x)^2$ sur $]0 ; +\infty[$; $k(x) = \ln(1 - x)$ sur $] -\infty ; 1[$.
4. Déterminer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / \sqrt{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x + \ln x)$.
5. a) Calculer le pH d'une solution où $[H_3O^+] = 3,0 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. b) Calculer $[H_3O^+]$ dans une solution de pH 8,2.

Niveau 2 : type bac

6. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2 \ln x$.
 - a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b) Étudier les variations de f et en déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
 - c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse e .
7. Un stock de 500 unités diminue de 8 % chaque mois. On note u_n le stock au bout de n mois.
 - a) Exprimer u_n en fonction de n .
 - b) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 50$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
8. Le seuil d'audibilité vaut $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et $L = 10 \log(I/I_0)$.
 - a) Calculer le niveau sonore d'une source d'intensité $1,0 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
 - b) Quel est le niveau sonore produit par deux sources identiques de ce type fonctionnant ensemble ?
 - c) Quelle intensité correspond à un niveau de 85 dB ?
 - d) Combien de sources de 70 dB faut-il au minimum pour atteindre 85 dB ?
9. Résoudre :
 - a) $\ln(2x + 1) \geq \ln(x + 3)$; b) $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$; c) $\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln 6$.
10. L'iode 131, utilisé en médecine nucléaire, a une demi-vie de 8,02 jours. Le nombre de noyaux suit $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, t en jours.
 - a) Calculer λ .
 - b) Quel pourcentage des noyaux initiaux reste-t-il au bout de 30 jours ?
 - c) Au bout de combien de jours l'activité est-elle divisée par 100 ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.
 - a) Pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
 - b) Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.
 - c) La limite en $+\infty$ de $(\ln x)^3/x$ vaut 0.
 - d) L'équation $\ln x = x/e$ admet exactement une solution sur $]0 ; +\infty[$.
12. Un médicament a une demi-vie d'élimination de 6 h. Après une injection, la concentration vaut $C(t) = C_0 e^{-kt}$, avec $C_0 = 8 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Il est efficace tant que $C(t) \geq 2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
 - a) Calculer k .
 - b) Pendant combien de temps le médicament est-il efficace ?
 - c) On double la dose, donc $C_0 = 16 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. De combien de temps la durée d'efficacité augmente-t-elle ? Commenter.
 - d) Montrer que $\ln C(t)$ est une fonction affine de t et préciser sa pente.
13. a) Combien de chiffres le nombre 2^{2026} comporte-t-il en écriture décimale ? On donne $\log 2 \approx 0,301030$.
 - b) Déterminer le plus petit entier n tel que $3^{n-1} > 2^n$.

Corrigés

1. $A : \ln 8 + \ln 2 - \ln 4 = \ln(8 \times 2 / 4) = \ln 4 = 2 \ln 2$, donc $A = 2 \ln 2$.

$B : \ln(e^3) = 3$ et $\ln(1/e) = -1$, donc $B = 3 - (-1)$, $B = 4$. $C : 2 \ln 3 = \ln(3^2) = \ln 9$, donc $C = e^{\ln 9}$, $C = 9$. $D : \sqrt{e} = e^{1/2}$, donc $D = 1/2$.

2. a) $e^x = 7$ équivaut à $x = \ln 7$.

b) $\ln x = -2$ (avec $x > 0$) équivaut à $x = e^{-2}$. c) Domaine : $3x + 1 > 0$, soit $x > -1/3$. $\ln(3x + 1) = 0 = \ln 1$ équivaut à $3x + 1 = 1$, $x = 0$, qui est bien dans le domaine. d) $e^{2x-1} = 1 = e^0$ équivaut à $2x - 1 = 0$, $x = 1/2$.

3. $f'(x) = (1 \times \ln x + x \times 1/x) - 1 = \ln x + 1 - 1$, $f'(x) = \ln x$.

$g = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 3 > 0$ et $u'(x) = 2x$: $g'(x) = 2x/(x^2 + 3)$. $h = u^2$ avec $u = \ln x$: $h' = 2u'u$, $h'(x) = 2 \ln x / x$. $k = \ln(u)$ avec $u(x) = 1 - x > 0$ et $u'(x) = -1$: $k'(x) = -1/(1 - x)$, $k'(x) = 1/(x - 1)$.

4. a) Forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $\ln x - x = x(\ln x / x - 1)$. Par croissance comparée, $\ln x / x$ tend vers 0, donc la parenthèse tend vers -1 et x tend vers $+\infty$: **la limite est $-\infty$** .

b) $x^2 \ln x = x \times (x \ln x)$. Or $x \ln x$ tend vers 0 en 0^+ et x aussi : **la limite est 0**. c) On pose $X = \sqrt{x}$, qui tend vers $+\infty$. Alors $\ln x = \ln(X^2) = 2 \ln X$ et $\ln x / \sqrt{x} = 2 \ln X / X$, qui tend vers 0 : **la limite est 0**. d) Forme « $+\infty - \infty$ ». On écrit $1/x + \ln x = (1 + x \ln x)/x$. Le numérateur tend vers $1 + 0 = 1$ et le dénominateur vers 0 par valeurs positives : **la limite est $+\infty$** .

5. a) $\text{pH} = -\log(3,0 \times 10^{-5}) = -(\log 3,0 + \log 10^{-5}) = 5 - \log 3,0 \approx 5 - 0,477$, $\text{pH} \approx 4,52$.

b) $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-8,2} = 10^{0,8} \times 10^{-9} \approx 6,3 \times 10^{-9}$, $[\text{H}_3\text{O}^+] \approx 6,3 \times 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

6. a) En 0^+ : x^2 tend vers 0 et $-2 \ln x$ tend vers $+\infty$, donc **$\lim f = +\infty$** .

En $+\infty$: forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On factorise $f(x) = x^2(1 - 2 \ln x / x^2)$. Par croissance comparée, $\ln x / x^2$ tend vers 0, la parenthèse tend vers 1, donc **$\lim f = +\infty$** . b) $f'(x) = 2x - 2/x = 2(x^2 - 1)/x = 2(x - 1)(x + 1)/x$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x + 1 > 0$ et $x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$: négatif sur $]0 ; 1[$, positif sur $]1 ; +\infty[$. f est décroissante sur $]0 ; 1[$, croissante sur $]1 ; +\infty[$, de minimum $f(1) = 1 - 0 = 1$. Ainsi $f(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x > 0$: **f est strictement positive**. c) $f(e) = e^2 - 2$ et $f'(e) = 2e - 2/e$. Tangente : $y = (2e - 2/e)(x - e) + e^2 - 2$. En développant, $(2e - 2/e) \times e = 2e^2 - 2$, d'où $y = (2e - 2/e)x - 2e^2 + 2 + e^2 - 2$, soit $y = (2e - 2/e)x - e^2$.

7. a) Diminuer de 8 % revient à multiplier par 0,92. La suite est géométrique de premier terme 500 et de raison 0,92 : **$u_n = 500 \times 0,92^n$** .

b) $u_n < 50$ équivaut à $0,92^n < 0,1$, soit ($\ln$ croissante, deux membres positifs) $n \ln 0,92 < \ln 0,1$. Comme $\ln 0,92 < 0$, $n > \ln 0,1 / \ln 0,92 \approx (-2,3026)/(-0,0834) \approx 27,6$. **Le plus petit entier est $n = 28$** . Vérification : $u_{27} \approx 52,6$ et $u_{28} \approx 48,4$. c) Comme $0 < 0,92 < 1$, $0,92^n$ tend vers 0 : **la suite tend vers 0**.

8. a) $I/I_0 = 10^{-5}/10^{-12} = 10^7$, donc $L = 10 \times 7$, **$L = 70 \text{ dB}$** .

b) L'intensité double : $L = 10 \log(2 \times 10^7) = 10(\log 2 + 7) \approx 10 \times 7,301$, **$L \approx 73 \text{ dB}$** . c) $85 = 10 \log(I/I_0)$ équivaut à $I/I_0 = 10^{8,5}$, donc $I = 10^{-12} \times 10^{8,5} = 10^{-3,5}$, **$I \approx 3,2 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$** . d) N sources donnent N fois l'intensité, soit $L = 70 + 10 \log N$. On veut $70 + 10 \log N \geq 85$, soit $\log N \geq 1,5$, $N \geq 10^{1,5} \approx 31,6$. **Il faut au moins 32 sources**.

9. a) Domaine : $2x + 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > -1/2$. $\ln$ étant strictement croissante, l'inéquation équivaut à $2x + 1 \geq x + 3$, soit $x \geq 2$. Avec le domaine : **$S = [2 ; +\infty[$** .

b) On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 \leq 0$, soit $(X - 1)(X - 2) \leq 0$, donc $1 \leq X \leq 2$. Ainsi $1 \leq e^x \leq 2$, soit, par croissance de $\ln$, $0 \leq x \leq \ln 2$. **$S = [0 ; \ln 2]$** . c) Domaine : $x > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $x > 0$. L'inéquation s'écrit $\ln(x(x + 1)) \geq \ln 6$, soit $x^2 + x - 6 \geq 0$, c'est-à-dire $(x + 3)(x - 2) \geq 0$, vrai pour $x \leq -3$ ou $x \geq 2$. Avec $x > 0$: **$S = [2 ; +\infty[$** .

$[2; +\infty[$.

10. a) $\lambda = \ln 2 / t_{1/2} = 0,6931/8,02, \lambda \approx 8,64 \times 10^{-2} \text{ j}^{-1}$.

b) $N(30)/N_0 = e^{-30\lambda} = e^{-30 \ln 2 / 8,02} = 2^{-30/8,02} \approx 2^{-3,741} \approx e^{-2,593} \approx 0,075$. **Il reste environ 7,5 % des noyaux.**

c) L'activité est proportionnelle à N . $e^{-\lambda t} = 1/100$ équivaut à $t = \ln 100 / \lambda = 8,02 \times \ln 100 / \ln 2 \approx 8,02 \times 6,644, t \approx 53,3 \text{ jours}$.

11. a) **Vrai.** Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$. $g'(x) = 1 - 1/x = (x - 1)/x$, négatif sur $]0; 1[$ et positif sur $]1; +\infty[$. Le minimum est $g(1) = 0$, donc $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$. (C'est aussi la position de la courbe concave de $\ln$ sous sa tangente en 1.)

b) **Faux.** Contre-exemple : $a = b = 1$ donne $\ln 2 \approx 0,693$ à gauche et 0 à droite. c) **Vrai.** On pose $x = e^X$ avec X tendant vers $+\infty$: $(\ln x)^3/x = X^3/e^X$. Par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances, X^3/e^X tend vers 0. d) **Vrai.** La tangente à la courbe de $\ln$ en e a pour équation $y = (1/e)(x - e) + 1 = x/e$. La fonction $\ln$ étant concave, sa courbe est sous cette tangente : $\ln x \leq x/e$ pour tout $x > 0$. L'égalité a lieu en $x = e$ ($\ln e = 1 = e/e$). Pour montrer qu'elle n'a lieu qu'en e , on étudie $h(x) = x/e - \ln x$: $h'(x) = 1/e - 1/x$, négatif sur $]0; e[$, positif sur $]e; +\infty[$, donc h est strictement décroissante puis strictement croissante, de minimum $h(e) = 0$, et $h(x) > 0$ pour $x \neq e$. Une seule solution : $x = e$.

12. a) $k = \ln 2 / t_{1/2} = \ln 2 / 6, k \approx 0,116 \text{ h}^{-1}$.

b) $C(t) \geq 2$ équivaut à $e^{-kt} \geq 2/8 = 1/4$, soit $-kt \geq -\ln 4, t \leq \ln 4 / k = 2 \ln 2 \times 6 / \ln 2 = 12$. **Le médicament est efficace pendant 12 h** (deux demi-vies : $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). c) Avec $C_0 = 16$: $e^{-kt} \geq 2/16 = 1/8, t \leq \ln 8 / k = 3 \ln 2 \times 6 / \ln 2 = 18 \text{ h}$. **La durée augmente de 6 h seulement**, soit une demi-vie : doubler la dose ne double pas la durée d'action, elle ajoute une demi-vie. Pour prolonger l'effet, on répète plutôt les prises. d) $\ln C(t) = \ln C_0 + \ln(e^{-kt}) = \ln C_0 - kt$. C'est une **fonction affine de t, de pente $-k \approx -0,116 \text{ h}^{-1}$** et d'ordonnée à l'origine $\ln C_0$. En pratique, on trace $\ln C$ en fonction de t et la pente de la droite donne k .

13. a) $\log(2^{2026}) = 2026 \times \log 2 \approx 2026 \times 0,301030 \approx 609,89$. Donc $10^{609} \leq 2^{2026} < 10^{610}$, et le nombre de chiffres vaut $609 + 1$, **610 chiffres**.

b) Les deux membres sont positifs : $3^{n-1} > 2^n$ équivaut à $(n - 1) \ln 3 > n \ln 2$, soit $n(\ln 3 - \ln 2) > \ln 3$. Comme $\ln 3 - \ln 2 = \ln(3/2) > 0, n > \ln 3 / \ln(3/2) \approx 1,0986/0,4055 \approx 2,71$. **Le plus petit entier est $n = 3$.** Vérification : pour $n = 2, 3^1 = 3 < 4 = 2^2$; pour $n = 3, 3^2 = 9 > 8 = 2^3$.