



Fiche : Fonction logarithme népérien

FICHE • M13 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Pour tout $a > 0$, $\ln a$ est l'unique réel x tel que $e^x = a$: $\ln$ est la fonction réciproque de $\exp$, définie sur $]0 ; +\infty[$.
- Pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$, et pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$; $\ln x$ est négatif sur $]0 ; 1[$ et positif sur $]1 ; +\infty[$.
- Les courbes de $\ln$ et de $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Le logarithme transforme les produits en sommes : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a > 0$ et $b > 0$.
- La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ avec $\ln'(x) = 1/x$; elle est strictement croissante.
- Si u est dérivable et strictement positive, $(\ln u)' = u'/u$, et $\ln(u)$ a les mêmes variations que u .
- $\ln$ tend vers $-\infty$ en 0 (asymptote verticale $x = 0$) et vers $+\infty$ en $+\infty$, mais très lentement.
- La fonction $\ln$ est concave : sa courbe est sous ses tangentes, d'où $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
- Croissances comparées : $\ln x / x$ tend vers 0 en $+\infty$ et $x \ln x$ tend vers 0 en 0 ; toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$.
- Pour résoudre une équation ou une inéquation, on écrit le domaine, on se ramène à $\ln A = \ln B$ ou $A < B$ par stricte croissance, puis on garde les solutions du domaine.
- Le logarithme décimal $\log x = \ln x / \ln 10$ vérifie $\log(10^n) = n$; il mesure l'ordre de grandeur d'un nombre.
- $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$ (en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$) et $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$; diviser $[\text{H}_3\text{O}^+]$ par 10 augmente le pH de 1.
- Le niveau sonore vaut $L = 10 \log(I/I_0)$ avec $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$; doubler l'intensité ajoute environ 3 dB.
- Pour une décroissance $N_0 e^{-\lambda t}$, la demi-vie vaut $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ et ne dépend pas de N_0 .



Formules et définitions à connaître

Grandeur	Formule	Condition
Définition	$y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$	$x > 0$
Produit	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$a > 0, b > 0$
Inverse, quotient	$\ln(1/a) = -\ln a$; $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$	$a > 0, b > 0$
Puissance, racine	$\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln(\sqrt[n]{a}) = (1/n) \ln a$	$a > 0, n$ entier
Dérivées	$\ln'(x) = 1/x$; $(\ln u)' = u'/u$	$x > 0$; $u > 0$
Limites	$\ln x$ tend vers $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$	
Croissances comparées	$\ln x / x \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+	
Taux en 1	$\ln(1+h)/h \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$	
Logarithme décimal	$\log x = \ln x / \ln 10$; $\log(10^n) = n$	$x > 0$
pH	$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$	solution diluée, c en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$
Décibels	$L = 10 \log(I/I_0)$, $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	L en dB
Demi-vie	$t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$	modèle $N_0 e^{-\lambda t}$

Pièges à éviter

- Oublier le domaine de validité : chaque $\ln$ doit porter sur une quantité strictement positive.



- Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$: cette formule est fausse.
- Diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$ sans changer le sens de l'inégalité, alors que $\ln q$ est négatif.
- Écrire $(\ln u)' = 1/u$ en oubliant le facteur u' .
- Écrire $\ln(x^2) = 2 \ln x$ pour x négatif : en réalité $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$.
- Confondre $\ln$ et $\log$: pH et décibels utilisent $\log$.

Je me teste

1. Que vaut $e^{\ln 5}$? $\rightarrow 5$.
2. Simplifier $\ln 12 - \ln 3$. $\rightarrow \ln 4$, soit $2 \ln 2$.
3. Dérivée de $\ln(x^2 + 1)$? $\rightarrow 2x/(x^2 + 1)$.
4. Limite de $\ln x / x$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$ (croissance comparée).
5. Limite de $x \ln x$ en 0^+ ? $\rightarrow 0$.
6. Solution de $\ln(x - 1) = 0$? $\rightarrow x = 2$.
7. Plus petit entier n tel que $0,5^n < 0,01$? $\rightarrow n = 7$ ($0,5^7 \approx 0,0078$).
8. pH si $[H_3O^+] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$? $\rightarrow \text{pH} = 3$.
9. Gain en dB quand l'intensité est multipliée par 10 ? $\rightarrow 10 \text{ dB}$.
10. Demi-vie si $\lambda = 0,1 \text{ h}^{-1}$? $\rightarrow t_{1/2} = \ln 2 / 0,1 \approx 6,9 \text{ h}$.