

Compléments sur la dérivation et convexité

COURS • M12 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	6
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer la dérivée d'une fonction composée, en particulier de $\exp(u)$, u^n , $\sqrt{u}$, $1/u$ et $f(ax + b)$.
- Calculer une dérivée seconde et l'interpréter.
- Définir une fonction convexe ou concave par la position de sa courbe par rapport à ses sécantes.
- Étudier la convexité d'une fonction à l'aide du sens de variation de f' ou du signe de f'' .
- Déterminer la position d'une courbe par rapport à une tangente grâce à la convexité.
- Reconnaître et justifier un point d'inflexion.
- Établir des inégalités de convexité (tangentes, sécantes) et les utiliser.
- Interpréter la convexité dans un contexte (accélération d'une croissance, instant de décroissance la plus rapide).

Cours

1. Dérivée d'une fonction composée

Rappel. La composée de u suivie de g est la fonction $g \circ u$ définie par $(g \circ u)(x) = g(u(x))$. Par exemple, $x \mapsto \exp(-x^2)$ est la composée de $u(x) = -x^2$ suivie de $g = \exp$.

Théorème. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$. Alors $g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I : $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$.

On dérive la fonction extérieure en la laissant appliquée à $u(x)$, puis on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure.

Idee de la justification. Pour $h \neq 0$ petit, et lorsque $u(x + h) \neq u(x)$, on écrit le taux d'accroissement : $(g(u(x + h)) - g(u(x))) / h = [(g(u(x + h)) - g(u(x))) / (u(x + h) - u(x))] \times [(u(x + h) - u(x)) / h]$. Quand h tend vers 0, $u(x + h)$ tend vers $u(x)$ (u est continue car dérivable), donc le premier crochet tend vers $g'(u(x))$, et le second

vers $u'(x)$.

Cas particuliers à connaître (u dérivable sur I , avec les conditions indiquées) :

Fonction	Dérivée	Condition
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$	
u^n (n entier ≥ 1)	$n u' u^{n-1}$	
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$	$u > 0$ sur I
$1/u$	$-u'/u^2$	u ne s'annule pas sur I
$1/u^n = u^{-n}$	$-n u' / u^{n+1}$	u ne s'annule pas sur I
$f(ax + b)$	$a f'(ax + b)$	$ax + b$ dans l'intervalle de dérivabilité de f

Exemples.

- $f(x) = \exp(3x - 1)$: $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$, donc $f'(x) = 3 \exp(3x - 1)$.
- $f(x) = (x^2 + 1)^5$: $f'(x) = 5 \times 2x \times (x^2 + 1)^4 = 10x(x^2 + 1)^4$.
- $f(x) = \sqrt{1 - x}$ sur $]-\infty ; 1[$: $u'(x) = -1$, donc $f'(x) = -1/(2\sqrt{1 - x})$.
- $f(x) = \exp(-x^2/2)$: $u'(x) = -x$, donc $f'(x) = -x \exp(-x^2/2)$.

La dérivée de $\exp(u)$ a TOUJOURS le signe de u' , puisque l'exponentielle est strictement positive. Cela simplifie beaucoup les études de variations.

2. Dérivée seconde

Définition. Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I , on appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de f' , notée f'' . On dit alors que f est deux fois dérivable sur I .

Exemples. Pour $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6$. Pour $f(x) = \exp(2x)$: $f'(x) = 2 \exp(2x)$ et $f''(x) = 4 \exp(2x)$.

Interprétation. f' mesure la vitesse de variation de f ; f'' mesure la vitesse de variation de f' , c'est-à-dire la façon dont la pente évolue. En physique, si $x(t)$ est la position d'un mobile, $x'(t)$ est sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. Une croissance qui « accélère » correspond à f' croissante ($f'' \geq 0$) ; une croissance qui « ralentit » correspond à f' décroissante ($f'' \leq 0$), même si f continue d'augmenter.

3. Fonctions convexes et concaves

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe. Pour deux points A et B de C , le segment $[AB]$ s'appelle une **corde** (ou sécante).

Définition. f est **convexe** sur I si, pour tous points A et B de C d'abscisses dans I , la courbe est située **en dessous** de la corde $[AB]$ entre A et B . f est **concave** sur I si la courbe est située **au-dessus** de chacune de ses cordes.

Traduction algébrique : f est convexe sur I si, pour tous a et b de I et tout t de $[0 ; 1]$, $f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + t f(b)$. Le membre de gauche est l'ordonnée du point de la courbe, celui de droite l'ordonnée du point de la corde, à la même abscisse.

Exemples de référence.

- $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$: sa courbe, une parabole tournée vers le haut, est sous ses cordes.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- $x \mapsto x^3$ est concave sur $] -\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- Une fonction affine est à la fois convexe et concave : sa courbe est sa propre corde.

On remarque que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. Il suffit donc de bien connaître le cas convexe.

Image mentale

convexe : courbe « en creux », sous ses cordes, au-dessus de ses tangentes

concave : courbe « en dôme », au-dessus de ses cordes, sous ses tangentes

point d'inflexion : la courbe change de creux en dôme

Repères complémentaires, sans séquence causale

4. Caractérisations de la convexité

Pour une fonction dérivable, la définition par les cordes est peu pratique. On utilise les équivalences suivantes, admises.

Théorème (admis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I ;
- f' est croissante sur I ;
- la courbe de f est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur I .

Corollaire. Si f est deux fois dérivable sur I , alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I , et f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I .

C'est logique : $f'' \geq 0$ signifie que f' est croissante, donc que la pente de la tangente augmente quand on avance vers la droite. La courbe « tourne vers le haut ».

Vérification sur les exemples de référence.

- $(x^2)'' = 2 > 0$: convexe sur $\mathbb{R}$.
- $\exp'' = \exp > 0$: convexe sur $\mathbb{R}$.

- $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$, qui est décroissante sur $]0; +\infty[$: $\sqrt{}$ est concave.
- $(1/x)'' = 2/x^3$, positive sur $]0; +\infty[$, négative sur $]-\infty; 0[$.
- $(x^3)'' = 6x$: négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$.

Étudier la convexité de f

1. Calculer f' puis f'' • 2. Étudier le signe de f'' (ou le sens de variation de f') • 3. $f'' \geq 0$: convexe ; $f'' \leq 0$: concave • 4. Repérer les changements de signe : points d'inflexion

Position par rapport à une tangente. La tangente à C au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Si f est convexe sur I , alors pour tout x de I : $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$. Si f est concave, l'inégalité est inversée. On obtient ainsi des inégalités sans étudier de fonction auxiliaire.

5. Point d'inflexion

Définition. Soit f une fonction dérivable sur I et A un point de sa courbe d'abscisse a . On dit que A est un **point d'inflexion** si la courbe traverse sa tangente en A . De manière équivalente, la convexité de f change en a : f est convexe d'un côté de a et concave de l'autre.

Propriété. Si f est deux fois dérivable sur I et si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point de la courbe d'abscisse a est un point d'inflexion.

Exemple. $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 en changeant de signe. L'origine est un point d'inflexion ; la tangente en 0 est l'axe des abscisses, et la courbe passe de dessous à dessus.

Le changement de signe est indispensable. Pour $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ s'annule en 0 mais reste positive : f est convexe sur $\mathbb{R}$, et l'origine n'est PAS un point d'inflexion.

Interprétation. En un point d'inflexion, f' atteint un extremum local : c'est l'endroit où la croissance (ou la décroissance) est la plus rapide. Sur une courbe de croissance d'une population en S , le point d'inflexion marque l'instant où la population croît le plus vite, avant de ralentir vers son plafond.

6. Inégalités de convexité

La convexité fournit des inégalités classiques, de deux types.

Inégalités de tangente. Comme l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = x + 1$: pour tout réel x , $\exp(x) \geq 1 + x$. L'égalité n'a lieu qu'en $x = 0$.

Comme la racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$, sa courbe est en dessous de sa tangente en 1, d'équation $y = (x - 1)/2 + 1 = (x + 1)/2$: pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq (x + 1)/2$.

Application. Pour tout entier $n \geq 1$, en appliquant $\exp(x) \geq 1 + x$ à $x = 1/n$: $\exp(1/n) \geq 1 + 1/n$. Les deux membres étant positifs, on élève à la puissance n : $\exp(1) \geq (1 + 1/n)^n$. Donc $(1 + 1/n)^n \leq e$ pour tout $n \geq 1$.

Inégalités de corde. En prenant $t = 1/2$ dans la définition, une fonction convexe vérifie, pour tous a et b de I : $f((a + b)/2) \leq (f(a) + f(b))/2$. L'image de la moyenne est inférieure à la moyenne des images. Pour une fonction concave, c'est l'inverse.

- Avec $f = \exp$: $\exp((a + b)/2) \leq (\exp(a) + \exp(b))/2$.
- Avec $f = \sqrt{}$ (concave) : pour $a, b \geq 0$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})/2 \leq \sqrt{(a + b)/2}$.

Démonstration directe par une fonction auxiliaire. On peut toujours retrouver une inégalité de tangente en étudiant la différence. Pour $\exp(x) \geq 1 + x$, on pose $d(x) = \exp(x) - 1 - x$: $d'(x) = \exp(x) - 1$, négative sur $]-\infty ; 0]$, positive sur $[0 ; +\infty[$. d admet un minimum en 0, égal à $d(0) = 0$, donc $d(x) \geq 0$ pour tout x .

7. Synthèse : étude complète d'une fonction

Une étude de fonction de Terminale enchaîne désormais :

1. ensemble de définition et limites aux bornes (asymptotes) ;
2. dérivée f' (avec la formule de dérivation d'une composée si besoin), signe de f' , tableau de variations ;
3. dérivée seconde f'' , signe de f'' , intervalles de convexité et de concavité, points d'inflexion ;
4. tangentes remarquables et position de la courbe par rapport à elles.

Le tableau de f' renseigne sur les variations de f ; le tableau de f'' renseigne sur la convexité de f . Ne les mélange pas : une fonction peut être croissante et concave ($\sqrt{x}$), ou décroissante et convexe ($\exp(-x)$).

Exemples résolus

Exemple 1 : dériver des fonctions composées

Calculer la dérivée de : $f(x) = (3x^2 - 1)^4$; $g(x) = \exp(-x^2/2)$; $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; $k(x) = 1/(2x + 1)^3$ sur $]-1/2 ; +\infty[$.

Résolution.

$f = u^4$ avec $u(x) = 3x^2 - 1$, $u'(x) = 6x$. Donc $f'(x) = 4 \times 6x \times (3x^2 - 1)^3 = 24x(3x^2 - 1)^3$.

$g = \exp(u)$ avec $u(x) = -x^2/2$, $u'(x) = -x$. Donc $g'(x) = -x \exp(-x^2/2)$, du signe de $-x$.

$h = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, $u'(x) = 2x$. Donc $h'(x) = 2x/(2\sqrt{x^2 + 1}) = x/\sqrt{x^2 + 1}$.

$k = u^{-3}$ avec $u(x) = 2x + 1$, non nul sur $]-1/2 ; +\infty[$, $u'(x) = 2$. Donc $k'(x) = -3 \times 2 \times (2x + 1)^{-4} = -6/(2x + 1)^4$.

Exemple 2 : convexité, point d'inflexion et tangente

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$. a) Étudier la convexité de f . b) Montrer que la courbe admet un point d'inflexion A et donner l'équation de la tangente T en A. c) Étudier la position de la courbe par rapport à T.

Résolution.

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$. $f''(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$ et $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. **f est concave sur $]-\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$.**

b) f'' s'annule en 1 en changeant de signe : le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, donc **A(1 ; 0)**. $f'(1) = 3 - 6 = -3$. La tangente a pour équation $y = -3(x - 1) + 0$, soit **T : $y = -3x + 3$** .

c) $f(x) - (-3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$. Ce nombre est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$: la courbe est sous T à gauche de A et au-dessus à droite. Elle traverse sa tangente, ce qui confirme le point d'inflexion, et c'est cohérent avec a) : sous la tangente là où f est concave, au-dessus là où elle est convexe.

Exemple 3 : la courbe en cloche

Soit $g(x) = \exp(-x^2/2)$ sur $\mathbb{R}$ (courbe utilisée en statistique pour la loi normale). a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. b) Étudier la convexité de g et déterminer ses points d'inflexion.

Résolution.

a) Par l'exemple 1, $g'(x) = -x \exp(-x^2/2)$. C'est un produit : avec $v(x) = -x$ ($v' = -1$) et $w(x) = \exp(-x^2/2)$ ($w' = -x \exp(-x^2/2)$) : $g''(x) = -1 \times \exp(-x^2/2) + (-x)(-x \exp(-x^2/2)) = (x^2 - 1) \exp(-x^2/2)$.

b) L'exponentielle étant strictement positive, $g''(x)$ a le signe de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$: positif sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, négatif sur $]-1 ; 1[$. **g est convexe sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, concave sur $]-1 ; 1[$.** g'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1 : la courbe a **deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1** , d'ordonnée $\exp(-1/2) \approx 0,607$. En statistique, ces abscisses correspondent à un écart type de part et d'autre de la moyenne.

Méthodes et pièges

- Pour dériver une composée, identifie d'abord la fonction intérieure u et écris u' . L'erreur la plus fréquente est d'oublier le facteur u' : la dérivée de $\exp(3x)$ est $3 \exp(3x)$, pas $\exp(3x)$.
- Pour $(ax + b)^n$, n'oublie pas le facteur a : la dérivée de $(2x - 5)^7$ est $14(2x - 5)^6$.
- Pour le signe de f' ou de f'' , mets en facteur les termes strictement positifs (exponentielle, carré non nul) et étudie le reste.
- Convexe signifie $f'' \geq 0$, pas $f \geq 0$ ni f croissante. Ne confonds pas le tableau de f' (variations) et celui de f'' (convexité).
- Un point d'inflexion exige que f'' change de signe, pas seulement qu'elle s'annule (contre-exemple x^4).
- Pour placer une courbe par rapport à une tangente, utilise la convexité : convexe, la courbe est au-dessus ; concave, en dessous. Si l'intervalle contient un point d'inflexion, la position change.
- Pour démontrer une inégalité du type $\exp(x) \geq 1 + x$, deux méthodes : la convexité (courbe au-dessus de la tangente) ou l'étude de la fonction différence.
- Une fonction convexe qui admet un point où $f'(a) = 0$ y atteint son minimum sur l'intervalle, puisque sa courbe est au-dessus de la tangente horizontale en ce point.

Vers le PASS

En PASS, la dérivée d'une composée est omniprésente : vitesse de décroissance d'une concentration $C_0 \exp(-kt)$, dont la dérivée vaut $-kC_0 \exp(-kt)$, sensibilité d'une grandeur à une variation de ses paramètres, calcul d'incertitudes. La dérivée seconde et la convexité servent à lire les courbes biologiques : le point d'inflexion d'une courbe de croissance en S (croissance logistique d'une population, courbe de saturation de l'hémoglobine en dioxygène) indique l'endroit où la variation est la plus rapide ; les points d'inflexion de la courbe en cloche sont à un écart type de la moyenne, ce qui relie l'analyse aux statistiques. Enfin, l'optimisation (chercher un maximum ou un minimum) repose sur le signe de la dérivée, et la convexité assure qu'un minimum local est global.

Suite en PASS : Fonctions, dérivées et optimisation

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Calcule la dérivée des fonctions suivantes, sur un intervalle où elles sont dérivables : a) $f(x) = (2x - 5)^7$; b) $g(x) = \exp(3x^2 + 1)$; c) $h(x) = \sqrt{4 - x}$ sur $]-\infty ; 4[$; d) $k(x) = 1/(x^2 + 1)^2$.
2. Soit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Calcule $f'(x)$, étudie la convexité de f et détermine les points d'inflexion de sa courbe.
3. On donne le sens de variation de la dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$: f' est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$. Que peux-tu dire de la convexité de f ? de la courbe au point d'abscisse 2 ?
4. a) Donne l'équation de la tangente à la courbe de $\exp$ en 0 et justifie que $\exp(x) \geq x + 1$ pour tout x . b) Donne l'équation de la tangente à la courbe de la racine carrée au point d'abscisse 4 et déduis-en une inégalité valable pour tout $x \geq 0$.
5. Soit $f(x) = x \exp(x)$. Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$, puis détermine le point d'inflexion de la courbe.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = \exp(-x) + x$ sur $\mathbb{R}$.
a) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f (sans les limites). b) Montre que f est convexe sur $\mathbb{R}$. c) Déduis-en que pour tout réel x , $\exp(-x) \geq 1 - x$. d) Donne l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 1 et précise la position de la courbe par rapport à T .
7. Soit $g(x) = 1/(1 + \exp(-x))$ sur $\mathbb{R}$ (fonction sigmoïde).
a) Montre que $g'(x) = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))^2$, puis que $g'(x) = g(x)(1 - g(x))$. b) Déduis-en que $g''(x) = g'(x)(1 - 2g(x))$. c) Étudie le signe de $1 - 2g(x)$, puis la convexité de g . Montre que la courbe a un point d'inflexion I que tu préciseras. d) Donne l'équation de la tangente en I .
8. a) En utilisant la concavité de la racine carrée, montre que pour tous $a, b \geq 0$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})/2 \leq \sqrt{(a + b)/2}$. Vérifie avec $a = 1$ et $b = 9$.
b) Montre que pour tous réels a et b , $(\exp(a) + \exp(b))/2 - \exp((a + b)/2) = (\exp(a/2) - \exp(b/2))^2/2$. Retrouve ainsi l'inégalité de convexité de l'exponentielle. c) Applique b) avec $a = 0$ et $b = 2$.
9. Dans un repère orthonormé (unité 1 m), un rectangle a un sommet à l'origine, deux côtés sur les axes et le sommet opposé $M(x ; \sqrt{4 - x^2})$ sur le quart de cercle de centre O et de rayon 2, avec $0 \leq x \leq 2$. Son aire est $A(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.
a) Montre que pour $0 \leq x < 2$, $A'(x) = (4 - 2x^2)/\sqrt{4 - x^2}$. b) Déduis-en la valeur de x qui rend l'aire maximale et cette aire maximale.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Après une prise orale, la concentration d'un médicament est $C(t) = 10t \exp(-t/2)$, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, t en heures, $t \geq 0$.
a) Calcule $C'(t)$ et détermine l'instant du pic de concentration et sa valeur. b) Montre que $C''(t) = 2,5(t - 4) \exp(-t/2)$. c) Étudie la convexité de C et détermine le point d'inflexion. Interprète-le en termes de vitesse d'élimination. d) Calcule $C'(4)$ et interprète.
11. Soit m un réel et $\sigma > 0$. On considère $f(x) = \exp(-(x - m)^2/(2\sigma^2))$.

a) Calcule $f'(x)$. b) Montre que $f'(x) = ((x - m)^2 - \sigma^2)/\sigma^4 \times f(x)$. c) Déduis-en les abscisses des points d'inflexion de la courbe de f . Que représentent m et σ graphiquement ?

12. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

a) Si $f'(a) = 0$, la courbe de f a un point d'inflexion d'abscisse a . b) Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. c) Si f est convexe et dérivable sur I et si $f'(a) = 0$, alors $f(a)$ est le minimum de f sur I . d) La somme de deux fonctions convexes deux fois dérivables est convexe. e) Le produit de deux fonctions convexes est convexe.

13. Soit n un entier, $n \geq 2$, et $h(x) = (1 + x)^n$ sur $] -1 ; +\infty[$.

a) Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$, puis montre que h est convexe sur $] -1 ; +\infty[$. b) Donne l'équation de la tangente à la courbe de h en 0. c) Déduis-en que pour tout $x > -1$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Quel résultat du chapitre sur les suites retrouves-tu ?

Corrigés

1. a) $u(x) = 2x - 5$, $u' = 2$: $f'(x) = 7 \times 2 \times (2x - 5)^6 = 14(2x - 5)^6$.

b) $u(x) = 3x^2 + 1$, $u'(x) = 6x$: $g'(x) = 6x \exp(3x^2 + 1)$. c) $u(x) = 4 - x > 0$ sur $]-\infty ; 4[$, $u' = -1$: $h'(x) = -1/(2\sqrt{4 - x})$. d) $k = u^{-2}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $k'(x) = -2 \times 2x \times (x^2 + 1)^{-3} = -4x/(x^2 + 1)^3$.

2. $f'(x) = 4x^3 - 12x$ et $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$. f' est positive sur $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; +\infty[$, négative sur $]-1 ; 1[$. **f est convexe sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, concave sur $]-1 ; 1[$.** f' s'annule en changeant de signe en -1 et 1 ; $f(-1) = f(1) = 1 - 6 + 1 = -4$. **Points d'inflexion $(-1 ; -4)$ et $(1 ; -4)$.**

3. f est dérivable et f' est décroissante sur $]-\infty ; 2]$: **f est concave sur $]-\infty ; 2]$.** f' est croissante sur $[2 ; +\infty[$: **f est convexe sur $[2 ; +\infty[$.** La convexité change en 2 : **le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion** (et f' y atteint son minimum).

4. a) $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = 1$: la tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$. L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde $\exp$ est positive), donc sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes : **$\exp(x) \geq x + 1$ pour tout réel x .**

b) $\sqrt{4} = 2$ et $(\sqrt{\cdot})'(4) = 1/(2\sqrt{4}) = 1/4$. Tangente : $y = (1/4)(x - 4) + 2$, soit **$y = x/4 + 1$** . La racine carrée étant concave sur $[0 ; +\infty[$, sa courbe est sous ses tangentes : **$\sqrt{x} \leq x/4 + 1$ pour tout $x \geq 0$** (égalité en $x = 4$; vérification en $x = 16$: $4 \leq 5$).

5. $f'(x) = \exp(x) + x \exp(x) = (x + 1) \exp(x)$; $f''(x) = \exp(x) + (x + 1) \exp(x) = (x + 2) \exp(x)$. f' a le signe de $x + 2$: négative pour $x < -2$, positive pour $x > -2$. f est concave sur $]-\infty ; -2]$, convexe sur $[-2 ; +\infty[$. $f(-2) = -2e^{-2} \approx -0,271$. **Point d'inflexion $(-2 ; -2e^{-2})$.**

6. a) $f'(x) = -\exp(-x) + 1 = 1 - \exp(-x)$. $f'(x) \geq 0$ équivaut à $\exp(-x) \leq 1$, soit $-x \leq 0$, soit $x \geq 0$ (l'exponentielle est strictement croissante et $\exp(0) = 1$). **f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum $f(0) = 1$.**

b) $f''(x) = \exp(-x) > 0$ pour tout x : **f est convexe sur $\mathbb{R}$.** c) La tangente en 0 est horizontale ($f'(0) = 0$) d'équation $y = 1$. f étant convexe, sa courbe est au-dessus : $f(x) \geq 1$, soit $\exp(-x) + x \geq 1$, donc **$\exp(-x) \geq 1 - x$ pour tout x .** d) $f(1) = e^{-1} + 1$ et $f'(1) = 1 - e^{-1}$. $T : y = (1 - e^{-1})(x - 1) + 1 + e^{-1}$, soit **$y = (1 - e^{-1})x + 2e^{-1}$** (environ $y = 0,632x + 0,736$). f étant convexe sur $\mathbb{R}$, **la courbe est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.**

7. a) $g = 1/u$ avec $u(x) = 1 + \exp(-x)$, $u'(x) = -\exp(-x)$. $g'(x) = -u'(x)/u(x)^2 = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))^2$. Par ailleurs $1 - g(x) = (1 + \exp(-x) - 1)/(1 + \exp(-x)) = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))$, donc $g(x)(1 - g(x)) = \exp(-x)/(1 + \exp(-x))^2 = g'(x)$. **Égalité vérifiée.**

b) $g' = g - g^2$. En dérivant : $g'' = g' - 2g g' = g'(1 - 2g)$. c) $1 - 2g(x) \geq 0$ équivaut à $g(x) \leq 1/2$, soit $1 + \exp(-x) \geq 2$, soit $\exp(-x) \geq 1$, soit $x \leq 0$. Comme $g'(x) > 0$, $g''(x)$ a le signe de $1 - 2g(x)$: **g est convexe sur $]-\infty ; 0]$ et concave sur $[0 ; +\infty[$** . g'' s'annule en 0 en changeant de signe, et $g(0) = 1/2$: **$I(0 ; 1/2)$ est un point d'inflexion**. d) $g'(0) = 1/(1 + 1)^2 = 1/4$. Tangente en I : $y = x/4 + 1/2$. C'est en I que la sigmoïde croît le plus vite.

8. a) La racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$: l'image de la moyenne est supérieure à la moyenne des images. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})/2 \leq \sqrt{(a + b)/2}$. Vérification : $(1 + 3)/2 = 2$ et $\sqrt{5} \approx 2,236$. On a bien $2 \leq 2,236$.

b) Posons $A = \exp(a/2)$ et $B = \exp(b/2)$. Alors $A^2 = \exp(a)$, $B^2 = \exp(b)$ et $AB = \exp((a + b)/2)$. $(A - B)^2/2 = (A^2 + B^2 - 2AB)/2 = (\exp(a) + \exp(b))/2 - \exp((a + b)/2)$. Un carré étant positif ou nul, **$\exp((a + b)/2) \leq (\exp(a) + \exp(b))/2$** , l'inégalité de corde de l'exponentielle convexe. c) Avec $a = 0$, $b = 2$: **$e \leq (1 + e^2)/2$** , ce qui équivaut à $e^2 - 2e + 1 \geq 0$, soit $(e - 1)^2 \geq 0$: vrai (numériquement $2,718 \leq 4,195$).

9. a) A est le produit de x et de $\sqrt{4 - x^2}$. Pour $0 \leq x < 2$, $4 - x^2 > 0$ et $(\sqrt{4 - x^2})' = -2x/(2\sqrt{4 - x^2}) = -x/\sqrt{4 - x^2}$. Donc $A'(x) = \sqrt{4 - x^2} + x \times (-x/\sqrt{4 - x^2}) = ((4 - x^2) - x^2)/\sqrt{4 - x^2} = (4 - 2x^2)/\sqrt{4 - x^2}$.

b) Le dénominateur est strictement positif ; $A'(x)$ a le signe de $4 - 2x^2 = 2(2 - x^2)$, positif pour $0 \leq x < \sqrt{2}$, négatif pour $\sqrt{2} < x < 2$. A est croissante puis décroissante : maximum en $x = \sqrt{2} \approx 1,41$ m, avec $A(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ m². Le rectangle optimal est un carré de côté $\sqrt{2}$ m.

10. a) $C'(t) = 10 \exp(-t/2) + 10t \times (-1/2) \exp(-t/2) = 10(1 - t/2) \exp(-t/2)$, du signe de $1 - t/2$: positive pour $t < 2$, négative pour $t > 2$. Pic à $t = 2$ h, avec $C(2) = 20 e^{-1} \approx 7,36$ mg·L⁻¹.

b) $C'(t) = 10 \exp(-t/2) - 5t \exp(-t/2)$. En dérivant chaque terme : $C''(t) = -5 \exp(-t/2) - 5 \exp(-t/2) + 2,5t \exp(-t/2) = (2,5t - 10) \exp(-t/2) = 2,5(t - 4) \exp(-t/2)$. c) $C''(t)$ a le signe de $t - 4$: **C est concave sur $[0 ; 4]$ et convexe sur $[4 ; +\infty[$** . C'' s'annule en 4 en changeant de signe : **point d'inflexion $(4 ; 40e^{-2})$** , soit environ $(4 ; 5,41)$. C' est décroissante sur $[0 ; 4]$ et croissante ensuite : C' atteint son minimum en $t = 4$. C'est l'instant où la concentration diminue le plus vite. d) $C'(4) = 10(1 - 2) e^{-2} = -10e^{-2} \approx -1,35$ mg·L⁻¹·h⁻¹ : à 4 h, la concentration baisse d'environ 1,35 mg·L⁻¹ par heure, vitesse de baisse maximale. Après, la baisse ralentit.

11. a) $f = \exp(u)$ avec $u(x) = -(x - m)^2/(2\sigma^2)$, $u'(x) = -2(x - m)/(2\sigma^2) = -(x - m)/\sigma^2$. Donc $f'(x) = -((x - m)/\sigma^2) f(x)$.

b) f' est le produit de $v(x) = -(x - m)/\sigma^2$ ($v' = -1/\sigma^2$) et de f . $f''(x) = -f(x)/\sigma^2 + (-(x - m)/\sigma^2)(-(x - m)/\sigma^2) f(x) = (-1/\sigma^2 + (x - m)^2/\sigma^4) f(x) = ((x - m)^2 - \sigma^2)/\sigma^4 \times f(x)$. c) $f(x) > 0$ et $\sigma^4 > 0$: $f''(x)$ a le signe de $(x - m)^2 - \sigma^2 = (x - m - \sigma)(x - m + \sigma)$. Il change de signe en $x = m - \sigma$ et $x = m + \sigma$. **Les points d'inflexion ont pour abscisses $m - \sigma$ et $m + \sigma$** . La courbe en cloche est symétrique par rapport à la droite $x = m$ (son sommet), et σ est la distance entre l'axe de symétrie et chaque point d'inflexion : plus σ est grand, plus la cloche est étalée.

12. a) **Faux**. $f(x) = x^4$: $f'(0) = 0$ mais $f'' = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe ; f est convexe et il n'y a pas d'inflexion en 0.

b) **Faux**. $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais décroissante sur $]-\infty ; 0]$. c) **Vrai**. La courbe est au-dessus de sa tangente en a, d'équation $y = f(a)$ puisque $f'(a) = 0$: $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I. d) **Vrai**. Si $f' \geq 0$ et $g'' \geq 0$, alors $(f + g)'' = f'' + g'' \geq 0$. e) **Faux**. $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$ sont convexes (g affine), mais leur produit $-x^3$ a pour dérivée seconde $-6x$, positive pour $x < 0$ et négative pour $x > 0$: il n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

13. a) $h'(x) = n(1 + x)^{n-1}$ et $h''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}$. Sur $]-1 ; +\infty[$, $1 + x > 0$, donc $(1 + x)^{n-2} > 0$, et $n(n - 1) > 0$ pour $n \geq 2$. **$h'' > 0$: h est convexe sur $]-1 ; +\infty[$** .

b) $h(0) = 1$ et $h'(0) = n$: **$y = 1 + nx$** . c) h étant convexe, sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 : **$(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $x > -1$** . C'est l'inégalité de Bernoulli, démontrée par récurrence pour $x > 0$ dans le chapitre sur les suites, et obtenue ici par convexité sur un intervalle plus large (elle est vraie aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, avec égalité).