



Fiche : Compléments sur la dérivation et convexité

FICHE • M12 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- La dérivée d'une composée est $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$: on dérive la fonction extérieure appliquée à $u(x)$, puis on multiplie par $u'(x)$.
- La dérivée de $\exp(u)$ est $u' \exp(u)$; elle a toujours le signe de u' .
- La dérivée seconde f'' est la dérivée de f' ; elle mesure l'évolution de la pente, comme une accélération.
- f est convexe sur I si sa courbe est sous chacune de ses cordes, concave si elle est au-dessus.
- Pour f dérivable : f convexe équivaut à f' croissante, et à une courbe au-dessus de toutes ses tangentes.
- Pour f deux fois dérivable : f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$, concave si et seulement si $f'' \leq 0$.
- x^2 , $\exp$ et $1/x$ sur $]0 ; +\infty[$ sont convexes ; $\sqrt{x}$ est concave ; x^3 est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente, c'est-à-dire où la convexité change.
- Si f' s'annule en a en changeant de signe, le point d'abscisse a est un point d'inflexion.
- En un point d'inflexion, f' atteint un extremum local : la variation de f y est la plus rapide.
- La convexité de $\exp$ donne $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout x ; la concavité de $\sqrt{\cdot}$ donne $\sqrt{x} \leq (x + 1)/2$ pour tout $x \geq 0$.
- Pour f convexe, $f((a + b)/2) \leq (f(a) + f(b))/2$; l'inégalité s'inverse pour f concave.
- Une fonction convexe dont la dérivée s'annule en a atteint son minimum en a .



Formules et définitions à connaître

Fonction	Dérivée	Condition
$g(u(x))$	$u'(x) g'(u(x))$	u dérivable sur I , g dérivable sur J contenant $u(I)$
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$	
u^n	$n u' u^{n-1}$	n entier ≥ 1
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$	$u > 0$
$1/u$	$-u'/u^2$	u ne s'annule pas
$f(ax + b)$	$a f'(ax + b)$	
Tangente en a	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$	f dérivable en a
Convexité	$f'' \geq 0$ sur I	f deux fois dérivable
Inégalité de corde	$f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + t f(b)$	f convexe, t dans $[0 ; 1]$

Pièges à éviter

- Oublier le facteur u' : la dérivée de $\exp(3x)$ est $3 \exp(3x)$.
- Confondre convexe et croissante : x^2 est convexe mais décroissante sur $]-\infty ; 0]$.



- Conclure à un point d'inflexion dès que $f''(a) = 0$: il faut un changement de signe (contre-exemple x^4).
- Mélanger le tableau de signes de f' (variations) et celui de f'' (convexité).
- Affirmer une position par rapport à une tangente sur un intervalle qui contient un point d'inflexion.
- Croire que le produit de deux fonctions convexes est convexe.

Je me teste

1. Dérivée de $\exp(-2x)$? $\rightarrow -2 \exp(-2x)$.
2. Dérivée de $(x^2 + 1)^3$? $\rightarrow 6x(x^2 + 1)^2$.
3. Dérivée de $\sqrt{5x + 1}$? $\rightarrow 5/(2\sqrt{5x + 1})$.
4. $f'(x) = (x - 3) \exp(x)$: où f est-elle convexe ? $\rightarrow$ Sur $[3 ; +\infty[$.
5. La fonction $\sqrt{}$ est-elle convexe ou concave ? $\rightarrow$ Concave sur $[0 ; +\infty[$.
6. Une courbe convexe est-elle au-dessus ou au-dessous de ses tangentes ? $\rightarrow$ Au-dessus.
7. $f(x) = x^4$ a-t-elle un point d'inflexion en 0 ? $\rightarrow$ Non, $f'' = 12x^2$ ne change pas de signe.
8. Abscisses des points d'inflexion de $\exp(-x^2/2)$? $\rightarrow -1$ et 1 .
9. Quelle inégalité donne la tangente en 0 à $\exp$? $\rightarrow \exp(x) \geq 1 + x$ pour tout réel x .
10. Que représente le point d'inflexion d'une courbe de croissance en S ? $\rightarrow$ L'instant où la croissance est la plus rapide.