

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

COURS • M11 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Définir la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle, et l'interpréter graphiquement.
- Reconnaître les fonctions continues usuelles et justifier la continuité par opérations et composition.
- Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux en un point de raccord.
- Savoir qu'une fonction dérivable est continue, et que la réciproque est fausse.
- Utiliser l'image d'une suite convergente par une fonction continue.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence de solutions.
- Appliquer le corollaire (fonction continue strictement monotone) pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution.
- Encadrer une solution par balayage ou par dichotomie, et écrire l'algorithme de dichotomie.
- Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, monotonie, convergence, limite comme point fixe.

Cours

1. Fonction continue

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I . On dit que f est **continue en** a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout réel de I .

Graphiquement, une fonction continue sur un intervalle a une courbe qui se trace « sans lever le crayon » : pas de saut, pas de trou. Cette image est une intuition, pas une définition : c'est la limite qui fait foi.

Contre-exemple : la partie entière. La fonction E qui à x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x ($E(2,7) = 2$, $E(-0,5) = -1$) est constante sur chaque intervalle $[k ; k + 1[$. En un entier k , la limite à

gauche vaut $k - 1$ et $f(k) = k$: la courbe fait un saut. E n'est pas continue en k , mais elle est continue sur chaque intervalle $[k ; k + 1[$.

Fonctions continues usuelles (admis).

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- Les fonctions exponentielle, valeur absolue, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Opérations. La somme, le produit et le quotient (dénominateur non nul) de fonctions continues sont continus. La composée de deux fonctions continues est continue : si u est continue sur I et g continue sur un intervalle J contenant $u(I)$, alors $g \circ u$ est continue sur I . Ainsi $x \mapsto \exp(-x^2)$ ou $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Fonction définie par morceaux. Pour une fonction définie par deux expressions continues de part et d'autre d'un réel a , la seule question est le raccord en a : f est continue en a si et seulement si les limites à gauche et à droite en a sont égales à $f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ pour $x \leq 1$ et $f(x) = 2x - 1$ pour $x > 1$. À gauche, la limite en 1 vaut $1^2 = 1 = f(1)$; à droite, $2 \times 1 - 1 = 1$. Les deux coïncident : f est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$.

2. Continuité et dérivabilité

Théorème. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration. Pour $x \neq a$, écrivons $f(x) - f(a) = (x - a) \times (f(x) - f(a))/(x - a)$. Quand x tend vers a , le premier facteur tend vers 0 et le second vers le nombre dérivé $f'(a)$, réel. Par produit, $f(x) - f(a)$ tend vers $0 \times f'(a) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = f(a)$.

La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0 : le taux d'accroissement $|h|/h$ vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$, il n'a pas de limite. La courbe présente un point anguleux. De même, la racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 (le taux $\sqrt{h}/h = 1/\sqrt{h}$ tend vers $+\infty$: tangente verticale).

Hierarchie des régularités

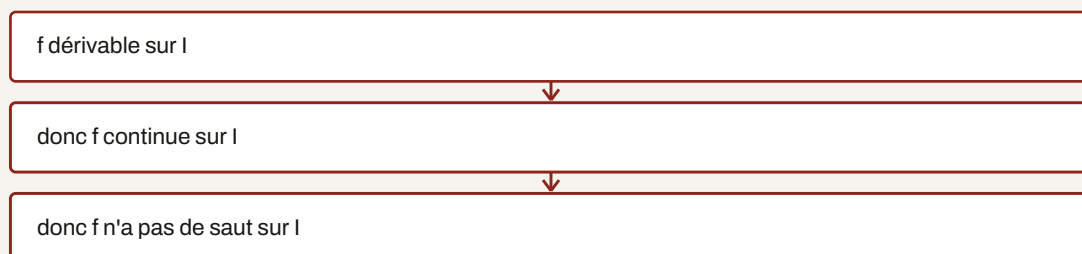


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Conséquence pratique : toute fonction dont on a calculé la dérivée sur un intervalle est continue sur cet intervalle. C'est ainsi qu'on justifie la continuité dans la plupart des exercices.

3. Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite de termes de I qui converge vers un réel a de I . Si f est continue en a , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

C'est une application directe du théorème de composition des limites : u_n tend vers a et $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a .

Exemple. $u_n = 2 + 1/n$ tend vers 2. La fonction exponentielle est continue en 2, donc $\exp(u_n)$ tend vers $\exp(2)$. La fonction $x \mapsto x^2 - 3x$ est continue en 2, donc $u_n^2 - 3u_n$ tend vers $4 - 6 = -2$.

Conséquence majeure : théorème du point fixe. Soit (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de I dans I . Si (u_n) converge vers un réel ℓ de I et si f est continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$: la limite est un point fixe de f .

Démonstration. La suite (u_{n+1}) a la même limite ℓ que (u_n) . Par ailleurs, f étant continue en ℓ , $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, l'unicité de la limite donne $\ell = f(\ell)$.

Le théorème ne dit pas que la suite converge. Il dit : SI elle converge (ce qu'on établit d'abord, souvent par monotonie et bornes), ALORS sa limite est solution de $f(x) = x$. Si l'équation a plusieurs solutions, on choisit grâce aux encadrements obtenus.

4. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c dans $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, une fonction continue sur un intervalle ne « saute » aucune valeur : pour passer de $f(a)$ à $f(b)$, elle prend toutes les valeurs intermédiaires. L'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$, sans que le théorème en donne le nombre ni la valeur.

Cas particulier fréquent. Si f est continue sur $[a ; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.

Pourquoi la continuité est indispensable. La fonction partie entière vaut 0 en 0,5 et 1 en 1,5, mais ne prend jamais la valeur 0,7. Sans continuité, le théorème tombe.

Image d'un intervalle. On retient souvent la forme équivalente : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

5. Corollaire : existence et unicité d'une solution

Corollaire (théorème de la bijection). Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Justification. L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires. Pour l'unicité, si $c_1 < c_2$ étaient deux solutions, la stricte monotonie donnerait $f(c_1) < f(c_2)$ ou $f(c_1) > f(c_2)$, donc $f(c_1) \neq f(c_2)$: impossible puisque les deux valent k .

Extension aux intervalles ouverts ou infinis. Le corollaire s'étend à un intervalle $]a ; b[$, avec a ou b éventuellement infinis, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f aux bornes. Par exemple, si f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} f(x) = -\infty$ et $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$, alors pour tout réel k , $f(x) = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Convention des tableaux de variations. Dans un tableau de variations, une flèche oblique indique que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle correspondant. On applique le

corollaire intervalle par intervalle, puis on additionne les solutions.

Prouver qu'une équation $f(x) = k$ a une unique solution

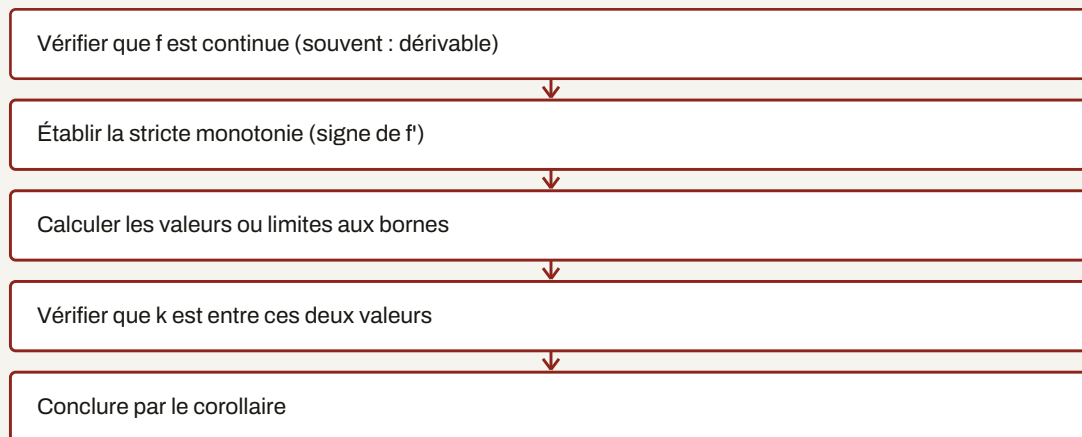


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

6. Encadrer une solution : balayage et dichotomie

Le corollaire assure l'existence d'une solution α , sans la donner. On l'encadre numériquement.

Balayage. On calcule f en des points régulièrement espacés (pas 0,1, puis 0,01) et on repère le changement de signe. Exemple : si $f(1,3) < 0 < f(1,4)$ et f est strictement croissante, alors $1,3 < \alpha < 1,4$.

Dichotomie. On part d'un intervalle $[a ; b]$ où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. On calcule le milieu $m = (a + b)/2$:

- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires ($f(a) \times f(m) \leq 0$), la solution est dans $[a ; m]$: on remplace b par m ;
- sinon, elle est dans $[m ; b]$: on remplace a par m .

On recommence jusqu'à ce que la longueur $b - a$ soit inférieure à la précision voulue e . À chaque étape, la longueur est divisée par 2 : après n étapes, elle vaut $(b - a)/2^n$. Pour obtenir une précision e en partant d'un intervalle de longueur 1, il faut $2^n \geq 1/e$; pour $e = 0,001$, il faut $n = 10$ étapes ($2^{10} = 1\,024$).

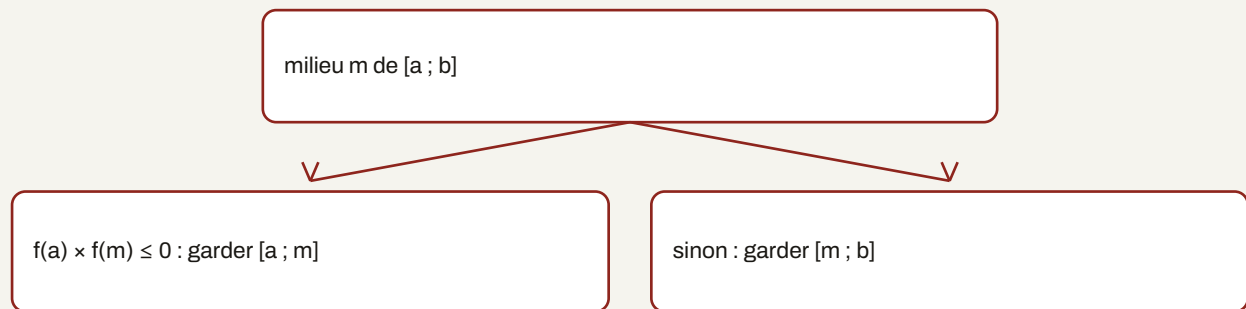
En Python :

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

La fonction renvoie un encadrement $[a ; b]$ de longueur au plus e contenant une solution. Elle suppose f continue sur $[a ; b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$ au départ.



Une étape de dichotomie



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

7. Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

On étudie une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant continue. La méthode type comporte quatre étapes.

Étape 1 : un intervalle stable. On cherche un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ (pour tout x de I , $f(x) \in I$). Si $u_0 \in I$, une récurrence immédiate montre que tous les termes sont dans I , donc la suite est bornée.

Étape 2 : la monotonie. Si f est croissante sur I , la suite est monotone : une récurrence montre que le sens de variation est donné par la comparaison de u_0 et u_1 . Si $u_0 \leq u_1$, alors en appliquant f croissante, $f(u_0) \leq f(u_1)$, soit $u_1 \leq u_2$, et ainsi de suite : la suite est croissante. Si $u_0 \geq u_1$, elle est décroissante. En pratique, on démontre souvent d'un seul coup une propriété du type $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq b$.

Étape 3 : la convergence. Monotone et bornée, la suite converge (théorème de convergence monotone).

Étape 4 : la limite. f étant continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. On résout cette équation et on choisit parmi les solutions celle qui est compatible avec les encadrements ($\ell \in I$, $\ell \geq u_0$ si la suite est croissante...).

Lecture graphique. On trace la courbe de f et la droite $y = x$. Partant de u_0 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe (ordonnée $u_1 = f(u_0)$), on rejoint horizontalement la droite $y = x$ (abscisse u_1), puis on remonte à la courbe, et ainsi de suite. On obtient un « escalier » qui converge vers l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe avec la droite $y = x$, c'est-à-dire un point fixe. Quand f est décroissante, le tracé tourne autour du point fixe en « escargot ».

Les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = x$.

Exemples résolus

Exemple 1 : existence, unicité et encadrement d'une solution

On considère l'équation (E) : $x^3 + x - 1 = 0$. Montrer qu'elle admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis encadrer α à 0,01 près par dichotomie.

Résolution.

Posons $f(x) = x^3 + x - 1$. f est un polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En $+\infty$, $f(x)$ a la limite de son terme dominant x^3 : $+\infty$; en $-\infty$: $-\infty$. Comme 0 est compris entre $-\infty$ et $+\infty$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires donne **une unique solution α dans $\mathbb{R}$** .

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc $\alpha \in]0 ; 1[$.

Dichotomie (on garde la moitié où f change de signe) :

Étape	a	b	m	f(m)	Nouvel intervalle
1	0	1	0,5	-0,375	[0,5 ; 1]
2	0,5	1	0,75	0,171875	[0,5 ; 0,75]
3	0,5	0,75	0,625	$\approx -0,1309$	[0,625 ; 0,75]
4	0,625	0,75	0,6875	$\approx 0,0125$	[0,625 ; 0,6875]
5	0,625	0,6875	0,65625	$\approx -0,0611$	[0,65625 ; 0,6875]
6	0,65625	0,6875	0,671875	$\approx -0,0248$	[0,671875 ; 0,6875]
7	0,671875	0,6875	0,6796875	$\approx -0,0063$	[0,6796875 ; 0,6875]

Après 7 étapes, la longueur vaut $1/2^7 = 1/128 \approx 0,0078 < 0,01$. **$0,679 < \alpha < 0,688$** . (La valeur approchée de α est 0,682.)

Exemple 2 : une suite récurrente convergente

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On note $f(x) = \sqrt{x + 6}$ sur $[0 ; 3]$.

a) Montrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Résolution.

a) f est croissante sur $[0 ; 3]$ (composée de $x \mapsto x + 6$ croissante et de la racine carrée croissante). $P(n)$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,449$: $0 \leq 0 \leq \sqrt{6} \leq 3$. Vrai. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$, f étant croissante sur $[0 ; 3]$, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$, soit $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$, et a fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. Vrai. Conclusion : pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

b) La suite est croissante et majorée par 3 : elle converge vers un réel ℓ , et en passant à la limite dans $0 \leq u_n \leq 3$, $\ell \in [0 ; 3]$. La fonction f est continue sur $[0 ; 3]$, donc $\ell = f(\ell)$: $\ell = \sqrt{\ell + 6}$. En élevant au carré (les deux membres sont positifs), $\ell^2 = \ell + 6$, soit $\ell^2 - \ell - 6 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 24 = 25$, les solutions sont $(1 + 5)/2 = 3$ et $(1 - 5)/2 = -2$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 3$.

Exemple 3 : une équation mêlant exponentielle et polynôme

Montrer que l'équation $\exp(x) + x = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, en donner un encadrement d'amplitude 0,01, puis en déduire le signe de $g(x) = \exp(x) + x$.

Résolution.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables), donc continue, et $g'(x) = \exp(x) + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En $-\infty$: $\exp(x)$ tend vers 0 et x vers $-\infty$, donc g tend vers $-\infty$. En $+\infty$: g tend vers $+\infty$ (somme). 0 est compris entre ces limites : par le corollaire, **l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.**

Balayage : $g(-1) = e^{-1} - 1 \approx -0,632 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$, donc $\alpha \in]-1 ; 0[$. Puis $g(-0,6) \approx -0,051$ et $g(-0,5) \approx 0,107$: $\alpha \in]-0,6 ; -0,5[$. Enfin $g(-0,57) \approx -0,0045$ et $g(-0,56) \approx 0,0112$: **$-0,57 < \alpha < -0,56$.**

Signe : g est strictement croissante et s'annule en α , donc **$g(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$, $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.** Ce type de résultat sert ensuite à étudier une fonction dont la dérivée a le signe de g .

Méthodes et pièges

- Pour prouver la continuité d'une fonction usuelle, cite le type de fonction (polynôme, quotient, composée) ou dis qu'elle est dérivable. Pour une fonction par morceaux, compare les limites à gauche et à droite au point de raccord.
- Le théorème des valeurs intermédiaires donne au moins une solution ; pour en avoir exactement une, il faut la stricte monotonie. Écris les trois hypothèses : continue, strictement monotone, k entre les bornes.
- Sur un tableau de variations à plusieurs flèches, applique le corollaire sur chaque intervalle et compte les solutions intervalle par intervalle.
- N'oublie pas la continuité : une fonction qui change de signe sans être continue peut ne jamais s'annuler ($1/x$ vaut -1 en -1 et 1 en 1).
- En dichotomie, garde toujours la moitié où le produit $f(a) \times f(m)$ est négatif ou nul ; la longueur est divisée par 2 à chaque étape.
- Pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, l'ordre est imposé : prouver la convergence d'abord, puis seulement écrire $\ell = f(\ell)$. Écrire $\ell = f(\ell)$ sans convergence prouvée ne démontre rien.
- Si $f(x) = x$ a plusieurs solutions, élimine celles qui sont incompatibles avec l'intervalle stable ou la monotonie.
- Une fonction continue n'est pas forcément dérivable : pense à la valeur absolue et à la racine carrée en 0.

Vers le PASS

En PASS, la continuité est le cadre implicite de presque tous les modèles : une concentration, une température ou une pression varient continûment dans le temps, et c'est ce qui autorise à dire qu'une concentration plasmatique passée de 2 à $6 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ a franchi le seuil de $4 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ à un instant précis. Les équations qui mêlent exponentielle et polynôme n'ont souvent pas de solution exacte : on les résout numériquement, et la dichotomie est la plus simple des méthodes itératives, avant les méthodes plus rapides comme celle de Newton. Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ décrivent les dynamiques de population en temps discret et les algorithmes de calcul approché, comme celui de Héron pour les racines carrées.

Suite en PASS : Systèmes linéaires et calcul numérique

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax + 3$ si $x > 1$. Détermine a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction f continue sur $[-3 ; 5]$ a le tableau de variations suivant : f croît de $f(-3) = -2$ à $f(0) = 4$, puis décroît de $f(0) = 4$ à $f(5) = 1$. Combien de solutions ont, sur $[-3 ; 5]$, les équations a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 2$; c) $f(x) = 5$? Justifie.
3. Montre que l'équation $x^3 + 2x - 5 = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ; 2]$, puis donne un encadrement de α d'amplitude 0,1, puis 0,01.
4. Soit $u_n = 2 + 1/n$ pour $n \geq 1$. Détermine la limite de : a) $\exp(u_n)$; b) $\sqrt{u_n + 7}$; c) $u_n^2 - 3u_n$.
5. Applique trois étapes de dichotomie à partir de $[1 ; 2]$ pour encadrer $\sqrt{2}$, solution positive de $x^2 - 2 = 0$. Donne l'encadrement obtenu et sa longueur.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
a) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variations avec les limites. b) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$. c) Encadre à 0,1 près la solution comprise entre -1 et 1.
7. Soit $f(x) = (2x + 1)/(x + 1)$ sur $[0 ; +\infty[$ et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Montre que $f(x) = 2 - 1/(x + 1)$ et que f est croissante sur $[0 ; +\infty[$. b) Montre par récurrence que pour tout n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$. c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
8. On considère la fonction Python dichotomie du cours.
a) On l'applique avec $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 0,001$. Combien de passages dans la boucle sont effectués ? b) On l'applique à $f(x) = \exp(x) - 2$. Justifie qu'il existe une unique solution dans $[0 ; 1]$. c) Le programme renvoie (0,6923828125 ; 0,693359375). Que peux-tu en déduire ?
9. Soit $g(x) = \exp(x) - x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
a) Étudie les variations de g et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$. b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < 0 < \beta$. c) Donne un encadrement d'amplitude 0,1 de α et de β . d) Déduis-en le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Une population d'insectes, exprimée en fraction de la capacité maximale du milieu, suit le modèle $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$, avec $u_0 = 0,1$. On note $f(x) = 2x(1 - x)$.
a) Montre que f est croissante sur $[0 ; 1/2]$ et que $f([0,1 ; 1/2]) \subset [0,1 ; 1/2]$. b) Montre que pour tout n , $0,1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1/2$. c) Déduis-en que (u_n) converge et détermine sa limite. Interprète.
11. Après une prise orale, la concentration d'un médicament est modélisée par $C(t) = 8t \exp(-0,5t)$, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, t en heures, $t \geq 0$. Le médicament est efficace quand $C(t) \geq 4 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

a) Montre que $C'(t) = 4(2 - t) \exp(-0,5t)$ et dresse le tableau de variations de C sur $[0 ; +\infty[$ (on admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$). b) Montre que l'équation $C(t) = 4$ admet exactement deux solutions t_1 et t_2 , avec $t_1 < 2 < t_2$. c) Donne t_1 et t_2 à $0,1$ près par défaut, puis une estimation de la durée d'efficacité.

12. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

a) Si f est continue sur $[a ; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution dans $[a ; b]$. b) Si f est dérivable sur I , elle est continue sur I . c) Si f est continue sur I , elle est dérivable sur I . d) Si (u_n) converge vers ℓ , avec $u_{n+1} = f(u_n)$ et f continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$. e) Si f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; 1]$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 0$, alors l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution dans $]0 ; 1]$.

13. Méthode de Héron. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$.

a) Montre que pour tout $x > 0$, $(x + 2/x)/2 - \sqrt{2} = (x - \sqrt{2})^2/(2x)$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$. b) Montre que $u_{n+1} - u_n = (2 - u_n^2)/(2u_n)$, puis que (u_n) est décroissante. c) Montre que (u_n) converge et que sa limite est $\sqrt{2}$. d) Calcule u_1 , u_2 et u_3 . Compare la vitesse de cette méthode avec celle de la dichotomie (exercice 5).

Corrigés

1. Sur $]-\infty ; 1]$ et sur $]1 ; +\infty[$, f est définie par des polynômes, donc continue. Il reste le point 1. On a $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, et la limite à gauche en 1 vaut 2. La limite à droite vaut $a \times 1 + 3 = a + 3$. f est continue en 1 si et seulement si $a + 3 = 2$, soit $a = -1$.

2. a) Sur $[-3 ; 0]$, f est continue et strictement croissante de -2 à 4 ; 0 est entre -2 et 4 , donc une unique solution sur $[-3 ; 0]$. Sur $[0 ; 5]$, f décroît de 4 à 1 : $f(x) \geq 1 > 0$, aucune solution. **Une solution.**

b) Sur $[-3 ; 0]$, 2 est entre -2 et 4 : une solution. Sur $[0 ; 5]$, 2 est entre 1 et 4 et f est continue strictement décroissante: une solution. **Deux solutions.** c) Le maximum de f sur $[-3 ; 5]$ est $4 < 5$. **Aucune solution.**

3. Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$, polynôme donc continu et dérivable, de dérivée $3x^2 + 2 > 0$: f est strictement croissante sur $[1 ; 2]$. $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$. Par le corollaire, $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[1 ; 2]$.

Balayage au pas $0,1$: $f(1,3) = 2,197 + 2,6 - 5 = -0,203 < 0$ et $f(1,4) = 2,744 + 2,8 - 5 = 0,544 > 0$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$. Pas $0,01$: $f(1,32) = 2,299968 + 2,64 - 5 \approx -0,060 < 0$ et $f(1,33) = 2,352637 + 2,66 - 5 \approx 0,013 > 0$, donc $1,32 < \alpha < 1,33$.

4. u_n tend vers 2.

a) $\exp$ est continue en 2: $\exp(u_n)$ tend vers $\exp(2) = e^2$. b) $x \mapsto \sqrt{x+7}$ est continue en 2: $\sqrt{u_n+7}$ tend vers $\sqrt{9} = 3$. c) $x \mapsto x^2 - 3x$ est continue en 2: $u_n^2 - 3u_n$ tend vers $4 - 6 = -2$.

5. On pose $f(x) = x^2 - 2$, continue; $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 2 > 0$.

Étape 1: $m = 1,5$, $f(1,5) = 0,25 > 0$, on garde $[1 ; 1,5]$. Étape 2: $m = 1,25$, $f(1,25) = 1,5625 - 2 = -0,4375 < 0$, on garde $[1,25 ; 1,5]$. Étape 3: $m = 1,375$, $f(1,375) = 1,890625 - 2 \approx -0,109 < 0$, on garde $[1,375 ; 1,5]$. **$1,375 < \sqrt{2} < 1,5$, intervalle de longueur $0,125 = 1/2^3$.**

6. a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$: positive sur $]-\infty ; -1]$, négative sur $[-1 ; 1]$, positive sur $[1 ; +\infty[$. $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Limites: $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$ (terme dominant x^3). **f croît de $-\infty$ à 3 sur $]-\infty ; -1]$, décroît de 3 à -1 sur $[-1 ; 1]$, croît de -1 à $+\infty$ sur $[1 ; +\infty[$.**

b) f est continue (polynôme) et strictement monotone sur chacun des trois intervalles. Sur $]-\infty ; -1]$, 0 est entre $-\infty$ et 3: une solution. Sur $[-1 ; 1]$, 0 est entre 3 et -1 : une solution. Sur $[1 ; +\infty[$, 0 est entre -1 et

$+\infty$: une solution. **Exactement trois solutions.** c) $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$, f décroissante. $f(0,3) = 0,027 - 0,9 + 1 = 0,127 > 0$ et $f(0,4) = 0,064 - 1,2 + 1 = -0,136 < 0$. **La solution est entre 0,3 et 0,4.**

7. a) $2 - 1/(x+1) = (2(x+1) - 1)/(x+1) = (2x+1)/(x+1) = f(x)$. Sur $[0; +\infty[$, $f'(x) = 1/(x+1)^2 > 0$: **f est strictement croissante.**

b) $P(n) : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$. Initialisation : $u_0 = 1$, $u_1 = 3/2 : 1 \leq 1 \leq 1,5 \leq 2$. Hérédité : si $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, f croissante donne $f(1) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(2)$, avec $f(1) = 1,5$ et $f(2) = 5/3 \approx 1,67$. Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$. **La propriété est vraie pour tout n.** c) (u_n) est croissante et majorée par 2, donc converge vers $\ell \in [1; 2]$. f est continue sur $[0; +\infty[$, donc $\ell = f(\ell) : \ell(\ell+1) = 2\ell+1$, soit $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Discriminant 5, solutions $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ et $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0,618$. Comme $\ell \geq 1$, $\ell = (1 + \sqrt{5})/2$ (le nombre d'or).

8. a) Après k passages, la longueur vaut $1/2^k$. La boucle continue tant que $1/2^k > 0,001$, c'est-à-dire $2^k < 1\,000$. Or $2^9 = 512 < 1\,000$ et $2^{10} = 1\,024 > 1\,000$. **10 passages.**

b) f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ (dérivée $\exp(x) > 0$), $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ et $f(1) = e - 2 \approx 0,718 > 0$. Par le corollaire, **une unique solution dans $[0; 1]$.** c) La solution α de $\exp(x) = 2$ vérifie **0,6923** $< \alpha < 0,6934$, encadrement de longueur $1/1\,024 \approx 0,00098$. On a donc $\alpha \approx 0,693$ à 10^{-3} près. (Ce nombre est $\ln 2$.)

9. a) $g'(x) = \exp(x) - 1$: négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$. g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, de minimum $g(0) = 1 - 0 - 2 = -1$. En $-\infty : \exp(x)$ tend vers 0 et $-x - 2$ vers $+\infty$, donc **g tend vers $+\infty$.** En $+\infty : g(x) = x(\exp(x)/x - 1 - 2/x)$, et $\exp(x)/x$ tend vers $+\infty$ (croissances comparées), donc **g tend vers $+\infty$.**

b) Sur $]-\infty; 0]$, g est continue, strictement décroissante de $+\infty$ à -1 : 0 est atteint une seule fois, en $\alpha < 0$. Sur $[0; +\infty[$, g est continue, strictement croissante de -1 à $+\infty$: une seule solution $\beta > 0$. **Exactement deux solutions.** c) $g(-1,9) \approx 0,1496 + 1,9 - 2 \approx 0,050 > 0$ et $g(-1,8) \approx 0,1653 + 1,8 - 2 \approx -0,035 < 0$: **$-1,9 < \alpha < -1,8$.** $g(1,1) \approx 3,004 - 3,1 \approx -0,096 < 0$ et $g(1,2) \approx 3,320 - 3,2 \approx 0,120 > 0$: **$1,1 < \beta < 1,2$.** d) Par les variations : **$g(x) > 0$ sur $]-\infty; \alpha[$ et sur $]\beta; +\infty[$, $g(x) < 0$ sur $]\alpha; \beta[$, g s'annule en α et β .**

10. a) $f(x) = 2x - 2x^2$, $f'(x) = 2 - 4x \geq 0$ pour $x \leq 1/2$: **f est croissante sur $[0; 1/2]$.** Donc pour $x \in [0,1; 1/2]$, $f(0,1) \leq f(x) \leq f(1/2)$, avec $f(0,1) = 0,18$ et $f(1/2) = 1/2$. Ainsi $f(x) \in [0,18; 0,5] \subset [0,1; 0,5]$.

b) Initialisation : $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,18 : 0,1 \leq 0,1 \leq 0,18 \leq 0,5$. Hérédité : si $0,1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1/2$, f croissante sur $[0; 1/2]$ donne $f(0,1) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1/2)$, soit $0,18 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,5$, donc $0,1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,5$. **Vrai pour tout n.** c) Croissante et majorée par $1/2$, (u_n) converge vers $\ell \in [0,1; 0,5]$. f est continue (polynôme), donc $\ell = 2\ell(1 - \ell)$, soit $\ell(2\ell - 1) = 0 : \ell = 0$ ou $\ell = 1/2$. Comme $\ell \geq 0,1$, $\ell = 1/2$: la population se stabilise à la moitié de la capacité maximale du milieu.

11. a) C est un produit : $C'(t) = 8 \exp(-0,5t) + 8t \times (-0,5) \exp(-0,5t) = \exp(-0,5t)(8 - 4t) = 4(2 - t) \exp(-0,5t)$. L'exponentielle étant strictement positive, $C'(t)$ a le signe de $2 - t$: C est strictement croissante sur $[0; 2]$ et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$. $C(0) = 0$, $C(2) = 16 e^{-1} \approx 5,89$, limite 0 en $+\infty$.

b) Sur $[0 ; 2]$, C est continue (dérivable), strictement croissante de 0 à 5,89 ; 4 est entre ces valeurs : une unique solution t_1 . Sur $[2 ; +\infty[$, C est continue strictement décroissante de 5,89 vers 0 (limite) ; 4 est entre 0 et 5,89 : une unique solution t_2 . Comme $C(2) \neq 4$, $t_1 < 2 < t_2$ et il y a exactement deux solutions.

c) $C(0,7) \approx 3,946 < 4$ et $C(0,8) \approx 4,290 > 4$: $t_1 \approx 0,7$ h (par défaut). $C(4,3) \approx 4,007 > 4$ et $C(4,4) \approx 3,900 < 4$: $t_2 \approx 4,3$ h (par défaut). Le médicament est efficace entre t_1 et t_2 , soit environ 3,6 heures (entre 3,5 et 3,7 h compte tenu des encadrements).

12. a) **Faux.** $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (exercice 6) vérifie $f(-2) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$, mais s'annule trois fois sur $[-2 ; 2]$. Il faut la stricte monotonie pour l'unicité.

b) **Vrai**, théorème du cours (démontré par le taux d'accroissement). c) **Faux.** $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0. d) **Vrai**, c'est le théorème du point fixe : u_{n+1} tend vers ℓ et $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$ par continuité. e) **Vrai.** Corollaire étendu à $]0 ; 1]$: f est continue et strictement décroissante, ses valeurs vont de $+\infty$ (limite en 0) à 0 ; 5 est compris entre 0 et $+\infty$, d'où une unique solution.

13. a) $(x + 2/x)/2 - \sqrt{2} = (x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x)/(2x) = (x - \sqrt{2})^2/(2x)$. Pour $x > 0$, ce nombre est positif ou nul. Par récurrence : $u_0 = 2 \geq \sqrt{2} > 0$; si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$ (somme de positifs) et $u_{n+1} - \sqrt{2} = (u_n - \sqrt{2})^2/(2u_n) \geq 0$. **Donc $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n .**

b) $u_{n+1} - u_n = (u_n + 2/u_n)/2 - u_n = (2/u_n - u_n)/2 = (2 - u_n^2)/(2u_n)$. Comme $u_n \geq \sqrt{2}$, $u_n^2 \geq 2$, donc le numérateur est négatif ou nul et le dénominateur positif : (u_n) est décroissante. c) Décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, (u_n) converge vers $\ell \geq \sqrt{2} > 0$. La fonction $f(x) = (x + 2/x)/2$ est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc $\ell = (\ell + 2/\ell)/2$, soit $2\ell = \ell + 2/\ell$, $\ell = 2/\ell$, $\ell^2 = 2$. Comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{2}$. d) $u_1 = (2 + 1)/2 = 1,5$; $u_2 = (1,5 + 2/1,5)/2 = (1,5 + 1,333...)/2 \approx 1,416667$; $u_3 = (1,416667 + 2/1,416667)/2 \approx (1,416667 + 1,411765)/2 \approx 1,414216$. Or $\sqrt{2} \approx 1,414214$: après 3 étapes, l'erreur est d'environ 2×10^{-6} , contre une incertitude de 0,125 pour 3 étapes de dichotomie. **La méthode de Héron converge beaucoup plus vite** : le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque étape.