



Fiche : Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

FICHE • M11 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Une fonction f est continue en a si la limite de $f(x)$ quand x tend vers a vaut $f(a)$; elle est continue sur I si elle l'est en tout point de I .
- Polynômes, fonctions rationnelles (sur leur ensemble de définition), racine carrée, exponentielle, valeur absolue, sinus et cosinus sont continus ; sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues aussi.
- Une fonction définie par morceaux est continue au point de raccord si les limites à gauche et à droite y sont égales à la valeur de la fonction.
- Une fonction dérivable est continue ; la réciproque est fausse (valeur absolue en 0, racine carrée en 0).
- Si u_n tend vers a et si f est continue en a , alors $f(u_n)$ tend vers $f(a)$.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$: la limite est un point fixe.
- Théorème des valeurs intermédiaires : si f est continue sur $[a ; b]$, toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte au moins une fois sur $[a ; b]$.
- Corollaire : si f est de plus strictement monotone, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution sur $[a ; b]$; il s'étend aux intervalles ouverts ou infinis avec les limites aux bornes.
- Dans un tableau de variations, une flèche oblique signifie fonction continue et strictement monotone ; on compte les solutions intervalle par intervalle.
- La dichotomie divise par 2 la longueur de l'encadrement à chaque étape : après n étapes, elle vaut $(b - a)/2^n$.
- Pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, monotonie par récurrence (f croissante), convergence monotone, puis limite par $f(\ell) = \ell$.
- Les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de sa courbe avec la droite $y = x$.



Formules et définitions à connaître

Notion	Énoncé	Condition
Continuité en a	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	a dans l'intervalle de définition
Suite et continuité	$u_n \rightarrow a$ donne $f(u_n) \rightarrow f(a)$	f continue en a
Point fixe	$\ell = f(\ell)$	(u_n) converge vers ℓ , f continue en ℓ
Valeurs intermédiaires	il existe c dans $[a ; b]$ avec $f(c) = k$	f continue, k entre f(a) et f(b)
Corollaire	solution unique	f continue et strictement monotone
Dichotomie	longueur $(b - a)/2^n$ après n étapes	f continue, $f(a) \times f(b) \leq 0$
Nombre d'étapes	$2^n \geq (b - a)/e$	précision e

Pièges à éviter

- Conclure à une solution unique avec le seul théorème des valeurs intermédiaires : il faut la stricte monotonie.
- Oublier l'hypothèse de continuité : $1/x$ change de signe entre -1 et 1 sans jamais s'annuler.
- Écrire $\ell = f(\ell)$ avant d'avoir prouvé la convergence de la suite.
- Garder une solution de $f(\ell) = \ell$ incompatible avec l'intervalle stable ou le sens de variation.
- Croire qu'une fonction continue est dérivable.
- En dichotomie, garder la mauvaise moitié : on conserve celle où $f(a) \times f(m) \leq 0$.

Je me teste

1. Une fonction dérivable sur I est-elle continue sur I ? → Oui, toujours.
2. Une fonction continue en 0 est-elle dérivable en 0 ? → Pas forcément, par exemple $|x|$.
3. Si u_n tend vers 1, vers quoi tend $\exp(u_n)$? → Vers e, par continuité de exp.
4. Que permet d'affirmer le théorème des valeurs intermédiaires ? → Au moins une solution de $f(x) = k$ pour k entre f(a) et f(b), si f est continue.
5. Quelle hypothèse ajouter pour avoir une solution unique ? → La stricte monotonie de f.
6. Longueur de l'encadrement après 5 étapes de dichotomie sur $[0 ; 1]$? → $1/32$, soit 0,03125.
7. Combien d'étapes pour une précision de 0,001 sur $[0 ; 1]$? → 10, car $2^{10} = 1\,024$.
8. Si $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ converge, quelle est sa limite positive ? → 3, solution positive de $\ell^2 = \ell + 6$.
9. Graphiquement, qu'est-ce qu'un point fixe de f ? → L'abscisse d'une intersection de la courbe de f avec la droite $y = x$.
10. Pour f croissante, comment connaître le sens de variation de $u_{n+1} = f(u_n)$? → En comparant u_0 et u_1 .