

Limites de fonctions

COURS • M10 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$ et en un réel a , y compris à gauche et à droite.
- Interpréter graphiquement une limite : asymptote horizontale, asymptote verticale.
- Connaître les limites des fonctions de référence (puissances, inverse, racine carrée, exponentielle).
- Calculer une limite par somme, produit et quotient, et repérer une forme indéterminée.
- Lever une forme indéterminée : terme dominant, factorisation, quantité conjuguée, taux d'accroissement.
- Déterminer la limite d'une fonction composée.
- Utiliser les théorèmes de comparaison et des gendarmes pour les fonctions.
- Utiliser les croissances comparées de l'exponentielle et des puissances de x .
- Interpréter une limite dans un contexte (plateau, saturation, élimination).

Cours

1. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

On s'intéresse au comportement de $f(x)$ quand x devient très grand en valeur absolue. Les définitions prolongent celles des suites, la variable réelle x remplaçant l'entier n .

Limite infinie en $+\infty$. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$. On définit de même une limite $-\infty$, et les limites en $-\infty$.

Limite finie en $+\infty$. On dit que f tend vers le réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On note $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = \ell$.

Interprétation graphique. Si $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$ (ou en $-\infty$) : la courbe s'en rapproche autant qu'on veut quand x s'éloigne. La courbe peut couper son asymptote horizontale, ce qui n'a rien de contradictoire.

Limites de référence en $+\infty$ (n entier naturel non nul) :

Fonction	Limite en $+\infty$	Limite en $-\infty$
x^n	$+\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair
$1/x^n$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	(non définie)
$1/\sqrt{x}$	0	(non définie)
$\exp(x)$	$+\infty$	0

Une fonction peut aussi n'avoir aucune limite en $+\infty$: c'est le cas de $x \mapsto \sin x$ ou $\cos x$, qui oscillent indéfiniment entre -1 et 1.

2. Limite en un réel a

Soit a un réel qui appartient à l'ensemble de définition de f ou qui en est une borne (par exemple $a = 0$ pour $x \mapsto 1/x$).

Limite infinie en a. f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle $]a; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim_{(x \rightarrow a)} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a (éventuellement d'un seul côté), la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe de f.

Limite à gauche, limite à droite. Il arrive que le comportement diffère de part et d'autre de a. On note $\lim_{(x \rightarrow a, x < a)} f(x)$, ou $\lim_{(x \rightarrow a^-)} f(x)$, la limite à gauche, et $\lim_{(x \rightarrow a^+)} f(x)$ la limite à droite. L'exemple type est la fonction inverse : $\lim_{(x \rightarrow 0^-)} 1/x = -\infty$ et $\lim_{(x \rightarrow 0^+)} 1/x = +\infty$. La droite $x = 0$ est asymptote verticale, mais $1/x$ n'a pas de limite en 0 au sens global, puisque les deux limites latérales diffèrent.

Pour la fonction $x \mapsto 1/x^2$, les deux limites latérales en 0 valent $+\infty$: on écrit simplement $\lim_{(x \rightarrow 0)} 1/x^2 = +\infty$.

Limite finie en a. f tend vers ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de ℓ dès que x est assez proche de a. Pour les fonctions usuelles (polynômes, quotients de polynômes, racine carrée, exponentielle) définies en a, la limite en a est simplement $f(a)$: ces fonctions sont continues, notion étudiée au chapitre suivant. Le travail ne commence que lorsque a est une borne où f n'est pas définie.

Le signe du dénominateur. Quand un quotient a un numérateur qui tend vers un réel non nul et un dénominateur qui tend vers 0, la limite est infinie et son signe dépend du signe du dénominateur au voisinage de a. On dresse alors un tableau de signes du dénominateur. C'est l'origine des notations 0^+ et 0^- .

Exemple. $f(x) = (x + 1)/(x - 2)$. Quand x tend vers 2, le numérateur tend vers 3. Si $x < 2$, $x - 2 < 0$ et tend vers 0 : on note $x - 2 \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{(x \rightarrow 2^-)} f(x) = -\infty$. Si $x > 2$: $\lim_{(x \rightarrow 2^+)} f(x) = +\infty$. La droite $x = 2$ est asymptote verticale.

Trois asymptotes à repérer

horizontale $y = \ell$: $f(x)$ tend vers ℓ en $\pm\infty$

verticale $x = a$: $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ en a

oblique $y = mx + p$: $f(x) - (mx + p)$ tend vers 0 en $\pm\infty$

Repères complémentaires, sans séquence causale

Asymptote oblique (complément). Si $f(x) - (mx + p)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote oblique à la courbe. L'énoncé donne en général l'équation de la droite ou une écriture de $f(x)$ qui la fait apparaître ; le signe de $f(x) - (mx + p)$ donne la position de la courbe par rapport à la droite.

3. Opérations sur les limites

Les tableaux établis pour les suites restent valables pour les fonctions, en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un réel a , à condition que toutes les limites soient prises au même endroit.

- Somme : $\ell + \ell'$; $\ell + (+\infty) = +\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) + (-\infty)$ est une forme indéterminée.
- Produit : $\ell \times \ell'$; $\ell \times (\pm\infty) = \pm\infty$ selon la règle des signes si $\ell \neq 0$; $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$; $0 \times (\pm\infty)$ est une forme indéterminée.
- Quotient : ℓ/ℓ' si $\ell' \neq 0$; $\ell/(\pm\infty) = 0$; $\ell/0 = \pm\infty$ si $\ell \neq 0$, avec le signe du dénominateur ; $(\pm\infty)/\ell' = \pm\infty$; ∞/∞ et $0/0$ sont des formes indéterminées.

Une forme indéterminée n'est pas une limite qui n'existe pas : c'est une situation où les règles ne suffisent pas et où il faut transformer l'expression.

Polynômes et fonctions rationnelles en l'infini. Un polynôme a la même limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que son terme de plus haut degré. Un quotient de polynômes a la même limite en $\pm\infty$ que le quotient de leurs termes de plus haut degré. Justification sur un exemple : pour $x \neq 0$, $-2x^3 + 5x - 1 = x^3(-2 + 5/x^2 - 1/x^3)$, et la parenthèse tend vers -2. Donc la limite en $+\infty$ est $-\infty$ et la limite en $-\infty$ est $+\infty$.

Attention : ce raccourci ne vaut qu'en l'infini. En un réel a , un polynôme a pour limite sa valeur en a , et pour un quotient il faut regarder numérateur et dénominateur séparément.

4. Lever une forme indéterminée

Quatre techniques couvrent l'essentiel des situations du programme.

a) Factoriser par le terme dominant (en l'infini). Exemple : $f(x) = (3x^2 + x)/(x^2 - 5)$. Pour $x \neq 0$, $f(x) = (3 + 1/x)/(1 - 5/x^2)$, qui tend vers 3 en $+\infty$ et en $-\infty$. Asymptote horizontale $y = 3$.

b) Factoriser et simplifier (forme $0/0$ en un réel a). Si le numérateur et le dénominateur s'annulent tous deux en a , ce sont deux polynômes divisibles par $(x - a)$. Exemple : $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ pour $x \neq 3$. On a $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, donc $f(x) = x + 3$ et $\lim_{(x \rightarrow 3)} f(x) = 6$. Il n'y a pas d'asymptote verticale en 3 : la courbe est une droite privée d'un point.

c) Quantité conjuguée (racines carrées). Exemple : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$, de la forme $\infty - \infty$. On écrit $f(x) = ((x+1) - x)/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = 1/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$, qui tend vers 0.

d) Reconnaître un taux d'accroissement (forme 0/0). Si f est dérivable en a , $(f(x) - f(a))/(x - a)$ tend vers $f'(a)$ quand x tend vers a . Comme $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$: $\lim_{(x \rightarrow 0)} (\exp(x) - 1)/x = 1$. Cette limite est au programme et sert très souvent.

5. Limite d'une fonction composée

Théorème. Soient a, b, c des réels ou $\pm\infty$. Si $\lim_{(x \rightarrow a)} u(x) = b$ et $\lim_{(X \rightarrow b)} g(X) = c$, alors $\lim_{(x \rightarrow a)} g(u(x)) = c$.

En pratique, on pose $X = u(x)$, on calcule la limite b de X , puis la limite de $g(X)$ quand X tend vers b .

Exemples.

- $f(x) = \exp(-x^2)$ en $+\infty$: $X = -x^2$ tend vers $-\infty$, et $\exp(X)$ tend vers 0 quand X tend vers $-\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(-x^2) = 0$.
- $f(x) = \sqrt{1 + 1/x}$ en $+\infty$: $X = 1 + 1/x$ tend vers 1, et $\sqrt{X}$ tend vers 1. Donc la limite vaut 1.
- $f(x) = \exp(1/x)$ en 0^+ : $X = 1/x$ tend vers $+\infty$, et $\exp(X)$ tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow 0^+)} \exp(1/x) = +\infty$. En 0^- , X tend vers $-\infty$ et la limite vaut 0.
- $f(x) = (\exp(2x) - 1)/x$ en 0 : $f(x) = 2 \times (\exp(2x) - 1)/(2x)$. Avec $X = 2x$, qui tend vers 0, $(\exp(X) - 1)/X$ tend vers 1. Donc $\lim_{(x \rightarrow 0)} f(x) = 2$.

Calculer la limite d'une composée $g(u(x))$

1. Repérer la fonction intérieure u et la fonction extérieure g
2. Calculer b , limite de $u(x)$
3. Calculer la limite de $g(X)$ quand X tend vers b
4. Conclure

Le même théorème s'applique à une suite : si u_n tend vers b et si $g(X)$ tend vers c quand X tend vers b , alors $g(u_n)$ tend vers c . Par exemple $\exp(-n)$ tend vers 0.

6. Théorèmes de comparaison

Les résultats établis pour les suites s'étendent aux fonctions. On les énonce en $+\infty$; ils s'adaptent en $-\infty$ et en un réel a .

Comparaison. Si $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand et si $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$. Si $f(x) \leq g(x)$ pour x assez grand et si $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = -\infty$.

Gendarmes. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et si g et h ont la même limite réelle ℓ en $+\infty$, alors $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = \ell$.

Exemples.

- $f(x) = x + \cos x$: pour tout x , $\cos x \geq -1$, donc $f(x) \geq x - 1$, qui tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = +\infty$.
- $f(x) = (\sin x)/x$ pour $x > 0$: $-1/x \leq f(x) \leq 1/x$, et les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = 0$. La droite $y = 0$ est asymptote horizontale, et la courbe la coupe une infinité de fois.

Ces théorèmes sont indispensables dès qu'une fonction trigonométrique ou un terme oscillant apparaît, car $\sin$ et $\cos$ n'ont pas de limite en l'infini.

7. Exponentielle et croissances comparées

Limites de l'exponentielle. $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} \exp(x) = 0$. La droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe de l'exponentielle.

Démonstration de la limite en $+\infty$. On sait que $\exp(x) \geq 1 + x$ pour tout réel x (la fonction $d(x) = \exp(x) - x - 1$ a pour dérivée $\exp(x) - 1$, négative sur $]-\infty ; 0]$ et positive sur $[0 ; +\infty[$, donc un minimum $d(0) = 0$). Comme $1 + x$ tend vers $+\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim \exp(x) = +\infty$. En $-\infty$, on écrit $\exp(x) = 1/\exp(-x)$: quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, $\exp(-x)$ aussi, et l'inverse tend vers 0.

Face à une forme indéterminée qui mélange exponentielle et puissance de x , l'exponentielle l'emporte toujours.

Théorème (croissances comparées). Pour tout entier naturel n :

- $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x)/x = +\infty$, et plus généralement $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x)/x^n = +\infty$;
- $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} x \exp(x) = 0$, et plus généralement $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} x^n \exp(x) = 0$;
- $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} x^n \exp(-x) = 0$.

Démonstration de $\exp(x)/x \rightarrow +\infty$. Étudions $g(x) = \exp(x) - x^2/2$ sur $[0 ; +\infty[$. On a $g'(x) = \exp(x) - x$. Or $\exp(x) \geq 1 + x > x$, donc $g'(x) > 0$: g est croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec $g(0) = 1$. Ainsi $g(x) \geq 1 > 0$, c'est-à-dire $\exp(x) > x^2/2$ pour $x \geq 0$. Pour $x > 0$, en divisant par x : $\exp(x)/x > x/2$. Comme $x/2$ tend vers $+\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} \exp(x)/x = +\infty$.

Démonstration de $x \exp(x) \rightarrow 0$ en $-\infty$. Posons $X = -x$, qui tend vers $+\infty$. Alors $x \exp(x) = -X \exp(-X) = -X/\exp(X) = -1/(\exp(X)/X)$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc l'expression tend vers 0.

Utilisation. Pour une forme indéterminée, on fait apparaître un quotient $\exp(x)/x^n$ ou un produit $x^n \exp(x)$ en factorisant.

- $f(x) = \exp(x) - x^3$ en $+\infty$ (forme $\infty - \infty$) : $f(x) = x^3(\exp(x)/x^3 - 1)$. La parenthèse tend vers $+\infty$, donc f tend vers $+\infty$.
- $f(x) = (x^2 + 1) \exp(-x)$ en $+\infty$: $f(x) = x^2 \exp(-x) + \exp(-x)$, somme de deux termes qui tendent vers 0. Limite 0.

Forme	Résultat	Où
$\exp(x)/x^n$	$+\infty$	en $+\infty$
$x^n/\exp(x) = x^n \exp(-x)$	0	en $+\infty$
$x^n \exp(x)$	0	en $-\infty$
$(\exp(x) - 1)/x$	1	en 0

Retenir : « l'exponentielle impose sa limite ». En $+\infty$, $\exp(x)$ l'emporte sur toute puissance de x ; en $-\infty$, $\exp(x)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de x ne tend vers l'infini.

Exemples résolus

Exemple 1 : étude complète des limites d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)/(x^2 - 1)$, définie sur $\mathbb{R}$ privé de -1 et 1 . Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes.

Résolution.

En $\pm\infty$: c'est une forme ∞/∞ . Pour $x \neq 0$, $f(x) = (2 - 3/x + 1/x^2)/(1 - 1/x^2)$, qui tend vers 2. **La droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.**

En 1 : le numérateur vaut $2 - 3 + 1 = 0$ et le dénominateur aussi : forme $0/0$. On factorise. Le trinôme $2x^2 - 3x + 1$ a pour racines 1 et $1/2$, donc $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - 1/2) = (x - 1)(2x - 1)$. Et $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, $f(x) = (2x - 1)/(x + 1)$. Donc $\lim_{(x \rightarrow 1)} f(x) = 1/2$: pas d'asymptote verticale en 1.

En -1 : avec l'écriture simplifiée, le numérateur $2x - 1$ tend vers -3 et le dénominateur $x + 1$ tend vers 0. Si $x < -1$, $x + 1 < 0$: le quotient de -3 par un nombre négatif tendant vers 0 tend vers $+\infty$. Si $x > -1$, $x + 1 > 0$ et le quotient tend vers $-\infty$. Donc $\lim_{(x \rightarrow -1^-)} f(x) = +\infty$ et $\lim_{(x \rightarrow -1^+)} f(x) = -\infty$. **La droite $x = -1$ est asymptote verticale.**

Exemple 2 : quantité conjuguée

Déterminer les limites de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Résolution.

En $-\infty$: $\sqrt{x^2 + 1}$ tend vers $+\infty$ (composée : $x^2 + 1$ tend vers $+\infty$ et $\sqrt{x}$ aussi) et $-x$ tend vers $+\infty$. Par somme, $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} f(x) = +\infty$. Il n'y a pas d'indétermination ici.

En $+\infty$: forme $\infty - \infty$. On multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + 1} + x$, strictement positive : $f(x) = ((x^2 + 1) - x^2)/(\sqrt{x^2 + 1} + x) = 1/(\sqrt{x^2 + 1} + x)$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = 0$: la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Exemple 3 : exponentielle et croissances comparées

Déterminer les limites suivantes. a) $f(x) = (2x + 1) \exp(-x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$. b) $g(x) = \exp(x) - x^3 + 4$ en $+\infty$. c) $h(x) = (\exp(3x) - 1)/x$ en 0.

Résolution.

a) En $+\infty$: forme $\infty \times 0$. On développe : $f(x) = 2x \exp(-x) + \exp(-x)$. Par croissances comparées, $x \exp(-x)$ tend vers 0, et $\exp(-x)$ tend vers 0 (composée). Donc $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = 0$. En $-\infty$: $2x + 1$ tend vers $-\infty$ et $\exp(-x)$ tend vers $+\infty$ (car $-x$ tend vers $+\infty$). Par produit, $\lim_{(x \rightarrow -\infty)} f(x) = -\infty$.

b) Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$, $g(x) = x^3(\exp(x)/x^3 - 1 + 4/x^3)$. Par croissances comparées, $\exp(x)/x^3$ tend vers $+\infty$, donc la parenthèse tend vers $+\infty$, et x^3 aussi. $\lim_{(x \rightarrow +\infty)} g(x) = +\infty$.

c) Forme $0/0$. On écrit $h(x) = 3 \times (\exp(3x) - 1)/(3x)$. Avec $X = 3x$, qui tend vers 0, $(\exp(X) - 1)/X$ tend vers 1. $\lim_{(x \rightarrow 0)} h(x) = 3$.

Méthodes et pièges

- Commence toujours par écrire la forme obtenue en appliquant les règles. Si elle n'est pas indéterminée, conclus directement : ne factorise pas pour rien.
- En l'infini, pour un polynôme ou un quotient de polynômes, factorise par le terme de plus haut degré et écris l'étape sur ta copie.
- En un réel a où le dénominateur s'annule, regarde d'abord le numérateur : s'il tend vers un réel non nul, la limite est infinie et tu étudies le signe du dénominateur de chaque côté ; s'il s'annule aussi, factorise par $(x - a)$.
- Une limite infinie en a donne une asymptote verticale $x = a$; une limite finie ℓ en $\pm\infty$ donne une asymptote horizontale $y = \ell$. Ne les confonds pas.
- Pour une composée, nomme la fonction intérieure $X = u(x)$ et calcule sa limite avant tout.
- Avec $\sin x$ ou $\cos x$, n'écris jamais leur limite en l'infini : encadre par -1 et 1 , puis utilise comparaison ou gendarmes.
- Avec l'exponentielle et une puissance de x , factorise pour faire apparaître $\exp(x)/x^n$ ou $x^n \exp(x)$, puis cite les croissances comparées.
- Piège classique : $\exp(-x)$ tend vers 0 en $+\infty$ mais vers $+\infty$ en $-\infty$. Vérifie le signe de l'exposant.
- La forme $0/0$ en 0 avec $\exp(x) - 1$ au numérateur se traite par le taux d'accroissement : $(\exp(x) - 1)/x$ tend vers 1 .

Vers le PASS

En PASS, les limites servent surtout à lire des modèles. Une cinétique enzymatique de Michaelis et Menten, $v = V_{\max} \times S/(K_m + S)$, tend vers $V_{\max}$ quand la concentration en substrat devient grande : c'est une asymptote horizontale, et elle traduit la saturation de l'enzyme. Une concentration plasmatique qui décroît comme $\exp(-kt)$ tend vers 0 sans jamais s'annuler. Les croissances comparées expliquent qu'une courbe du type $t \times \exp(-kt)$ finit toujours par redescendre. Enfin, la limite $(\exp(x) - 1)/x \rightarrow 1$ est la première pierre des approximations : pour x proche de 0 , $\exp(x)$ est proche de $1 + x$. Ces approximations au premier ordre servent à simplifier des modèles et à estimer la propagation des incertitudes sur une mesure.

Suite en PASS : Approximations et propagation des incertitudes

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Détermine les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de : a) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 1$; b) $g(x) = (4x^2 - 1)/(2x^2 + x + 3)$; c) $h(x) = (x + 5)/(x^2 + 1)$; d) $k(x) = (x^3 - 2)/(x + 1)$.
- a) Soit $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$. Détermine les limites de f à gauche et à droite en 3 et interprète graphiquement. b) Soit $g(x) = 1/(x - 2)^2$. Détermine la limite de g en 2 .
- Détermine les limites suivantes à l'aide du théorème de composition : a) $\exp(1/x)$ en $+\infty$, en 0^+ et en 0^- ; b) $\sqrt{4 + 1/x^2}$ en $+\infty$; c) $\exp(-x^2 + 3x)$ en $+\infty$.
- Détermine les limites suivantes : a) $\exp(x) - x$ en $+\infty$; b) $x^2 \exp(-x)$ en $+\infty$; c) $(x - 1) \exp(x)$ en $-\infty$; d) $\exp(x)/(x^3 + 1)$ en $+\infty$.

5. a) Détermine la limite de $(2 + \sin x)/x$ en $+\infty$. b) Détermine la limite de $x - \sin x$ en $-\infty$.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - 4)$, définie sur $\mathbb{R}$ privé de -2 et 2 .

a) Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. b) Factorise le numérateur et le dénominateur, puis détermine la limite de f en -2 . c) Détermine les limites de f à gauche et à droite en 2 . d) Donne les équations des asymptotes à la courbe de f .

7. Soit $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$, définie sur $]1; +\infty[$.

a) Détermine la limite de f en 1 . b) Montre que pour tout $x > 1$, $f(x) = x + 1 + 2/(x - 1)$. c) En déduire que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et précise leur position relative. d) Détermine la limite de f en $+\infty$.

8. a) Détermine la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$.

b) Détermine la limite en 0 de $g(x) = (\sqrt{x + 4} - 2)/x$.

9. Soit $f(x) = x - 1 + \exp(-x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

a) Détermine la limite de f en $+\infty$. b) Montre que pour tout x , $f(x) = \exp(-x)(1 + (x - 1) \exp(x))$, puis détermine la limite de f en $-\infty$. c) Montre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et précise leur position relative.

Niveau 3 : vers le PASS

10. La vitesse d'une réaction enzymatique en fonction de la concentration S (en $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$) du substrat est $v(S) = 120S/(4 + S)$, en $\mu\text{mol} \cdot \text{min}^{-1}$, pour $S \geq 0$.

a) Détermine la limite de v en $+\infty$. Interprète graphiquement et dans le contexte. b) Calcule $v(4)$ et compare-le à la limite. c) Pour quelle concentration la vitesse atteint-elle 90 % de sa limite ?

11. L'effectif d'une population de bactéries (en milliers) est modélisé par $P(t) = 1\,000/(1 + 9 \exp(-0,2t))$, t en heures, $t \geq 0$.

a) Calcule $P(0)$. b) Détermine la limite de P en $+\infty$ et interprète-la. c) Montre que pour tout $t \geq 0$, $1\,000 - P(t) = 9\,000 \exp(-0,2t)/(1 + 9 \exp(-0,2t))$, puis que $P(t) < 1\,000$.

12. Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie.

a) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, la courbe de f ne coupe jamais la droite $y = 2$. b) Si $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, la droite $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f . c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{100} \exp(-x) = 0$. d) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. e) La fonction $x \mapsto \cos x$ admet une limite en $+\infty$.

13. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)/x = +\infty$.

a) En posant $X = -x$, démontre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$. b) Vérifie que pour tout réel x , $x^2 \exp(-x) = 4 \times ((x/2) \exp(-x/2))^2$, puis démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp(-x) = 0$. c) Déduis-en la limite en $+\infty$ de $(x^2 + 3x) \exp(-x)$.

Corrigés

1. a) Terme dominant $-3x^3$: $f(x) = x^3(-3 + 2/x - 1/x^3)$ pour $x \neq 0$. En $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$ et la parenthèse vers -3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. En $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour $x \neq 0$, $g(x) = (4 - 1/x^2)/(2 + 1/x + 3/x^2)$, qui tend vers $4/2$. **Limite 2 en $+\infty$ et en $-\infty$.** c) Pour $x \neq 0$, $h(x) = x(1 + 5/x)/(x^2(1 + 1/x^2)) = (1/x) \times (1 + 5/x)/(1 + 1/x^2)$. $1/x$ tend vers 0 et le quotient vers 1. **Limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.** d) Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $k(x) = x^3(1 - 2/x^3)/(x(1 + 1/x)) = x^2 \times (1 - 2/x^3)/(1 + 1/x)$. x^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ comme en $-\infty$ et le quotient tend vers 1. **Limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.**

2. a) Le numérateur tend vers $2 \times 3 + 1 = 7$. Si $x < 3$, $x - 3 < 0$ et tend vers 0 : **$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$** . Si $x > 3$, $x - 3 > 0$: **$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$** . **La droite $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de f .**

b) $(x - 2)^2 > 0$ pour $x \neq 2$ et tend vers 0, donc $1/(x - 2)^2$ tend vers $+\infty$ des deux côtés : **$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$** , et la droite $x = 2$ est asymptote verticale.

3. a) En $+\infty$: $X = 1/x$ tend vers 0 et $\exp(X)$ tend vers $\exp(0) = 1$. **Limite 1.** En 0^+ : X tend vers $+\infty$, $\exp(X)$ aussi : **limite $+\infty$** . En 0^- : X tend vers $-\infty$ et $\exp(X)$ vers 0 : **limite 0**.

b) $X = 4 + 1/x^2$ tend vers 4 et $\sqrt{X}$ tend vers 2. **Limite 2.** c) $X = -x^2 + 3x = x^2(-1 + 3/x)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, et $\exp(X)$ tend vers 0. **Limite 0**.

4. a) Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$, $\exp(x) - x = x(\exp(x)/x - 1)$. Par croissances comparées, $\exp(x)/x$ tend vers $+\infty$, donc **la limite est $+\infty$** .

b) Par croissances comparées, **$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp(-x) = 0$** . c) $(x - 1) \exp(x) = x \exp(x) - \exp(x)$. En $-\infty$, $x \exp(x)$ tend vers 0 (croissances comparées) et $\exp(x)$ tend vers 0. **Limite 0**. d) Pour $x > 0$, $\exp(x)/(x^3 + 1) = (\exp(x)/x^3) \times x^3/(x^3 + 1)$. Le premier facteur tend vers $+\infty$ (croissances comparées), le second vers 1. **Limite $+\infty$** .

5. a) Pour tout x , $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$. Pour $x > 0$, $1/x \leq (2 + \sin x)/x \leq 3/x$. Les deux bornes tendent vers 0 en $+\infty$; par les gendarmes, **la limite est 0**.

b) $\sin x \geq -1$, donc $x - \sin x \leq x + 1$. Comme $x + 1$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$, par comparaison **$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sin x) = -\infty$** .

6. a) Pour $x \neq 0$, $f(x) = (1 + 1/x - 2/x^2)/(1 - 4/x^2)$, qui tend vers 1. **Limite 1 en $+\infty$ et en $-\infty$.**

b) $x^2 + x - 2$ a pour racines 1 et -2 : $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Et $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Pour $x \neq \pm 2$, $f(x) = (x - 1)/(x - 2)$. En -2 : $(-3)/(-4) = 3/4$. **$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3/4$** . c) En 2, $x - 1$ tend vers 1 et $x - 2$ vers 0. Si $x < 2$, $x - 2 < 0$: **$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$** ; si $x > 2$: **$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$** . d) **Asymptote horizontale $y = 1$ (en $\pm\infty$) et asymptote verticale $x = 2$** . Il n'y a pas d'asymptote en $x = -2$.

7. a) En 1^+ : le numérateur tend vers 2 et $x - 1$ tend vers 0 par valeurs positives. **$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$** : la droite $x = 1$ est asymptote verticale.

b) $x + 1 + 2/(x - 1) = ((x + 1)(x - 1) + 2)/(x - 1) = (x^2 - 1 + 2)/(x - 1) = (x^2 + 1)/(x - 1) = f(x)$. **Égalité vérifiée.** c) $f(x) - (x + 1) = 2/(x - 1)$, qui tend vers 0 en $+\infty$: **D est asymptote oblique**. Pour $x > 1$, $2/(x - 1) > 0$: **la courbe est au-dessus de D**. d) $x + 1$ tend vers $+\infty$ et $2/(x - 1)$ vers 0. **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$** .

8. a) Forme $\infty - \infty$. Pour $x > 0$: $f(x) = ((x^2 + 3x) - x^2)/(\sqrt{(x^2 + 3x)} + x) = 3x/(\sqrt{(x^2 + 3x)} + x)$. Comme $\sqrt{(x^2 + 3x)} = x\sqrt{(1 + 3/x)}$ pour $x > 0$, $f(x) = 3x/(x(\sqrt{(1 + 3/x)} + 1)) = 3/(\sqrt{(1 + 3/x)} + 1)$. Le dénominateur tend vers 2. **Limite 3/2**.

b) Forme 0/0. $g(x) = ((x + 4) - 4)/(x(\sqrt{(x + 4)} + 2)) = 1/(\sqrt{(x + 4)} + 2)$ pour $x \neq 0$. En 0, le dénominateur tend vers 4. **Limite 1/4**.

9. a) $x - 1$ tend vers $+\infty$ et $\exp(-x)$ vers 0. **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$** .

b) $\exp(-x)(1 + (x - 1) \exp(x)) = \exp(-x) + (x - 1) \exp(-x) \exp(x) = \exp(-x) + x - 1 = f(x)$. En $-\infty$: $(x - 1) \exp(x) = x \exp(x) - \exp(x)$ tend vers $0 - 0 = 0$ (croissances comparées), donc la parenthèse tend vers 1 ; $\exp(-x)$ tend vers $+\infty$. **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$** . c) $f(x) - (x - 1) = \exp(-x)$, qui tend vers 0 en $+\infty$: **la droite $y = x - 1$ est**

asymptote oblique en $+\infty$. Comme $\exp(-x) > 0$, la courbe est toujours au-dessus de cette droite.

10. a) Pour $S > 0$, $v(S) = 120/(4/S + 1)$, qui tend vers 120. **$\lim v = 120 \mu\text{mol}\cdot\text{min}^{-1}$** : la droite $v = 120$ est asymptote horizontale. Quand le substrat est très abondant, la vitesse plafonne : l'enzyme est saturée (c'est $V_{\max}$).

b) $v(4) = 480/8 = 60 \mu\text{mol}\cdot\text{min}^{-1}$, **la moitié de la limite** : la concentration $4 \text{ mmol}\cdot\text{L}^{-1}$ (la constante K_m) donne la demi-vitesse maximale. c) On résout $120S/(4 + S) = 108$ avec $S \geq 0$: $120S = 108(4 + S)$, soit $12S = 432$, donc **$S = 36 \text{ mmol}\cdot\text{L}^{-1}$** , neuf fois K_m . Atteindre 90 % de la vitesse maximale demande beaucoup plus de substrat que d'en atteindre 50 %.

11. a) $P(0) = 1\,000/(1 + 9) = 100$, **soit 100 000 bactéries**.

b) En $+\infty$, $-0,2t$ tend vers $-\infty$, donc $\exp(-0,2t)$ tend vers 0 et le dénominateur vers 1. **$\lim P = 1\,000$** : la population se stabilise vers 1 000 milliers, soit un million de bactéries (capacité maximale du milieu). La droite d'équation $y = 1\,000$ est asymptote horizontale. c) $1\,000 - P(t) = (1\,000(1 + 9 \exp(-0,2t)) - 1\,000)/(1 + 9 \exp(-0,2t)) = 9\,000 \exp(-0,2t)/(1 + 9 \exp(-0,2t))$. Ce quotient est strictement positif (exponentielle positive), donc **$P(t) < 1\,000$ pour tout $t \geq 0$** : la population reste sous son plafond sans jamais l'atteindre.

12. a) **Faux**. $f(x) = 2 + (\sin x)/x$ tend vers 2 en $+\infty$ (gendarmes) et $f(x) = 2$ pour tous les $x = k\pi$, k entier non nul.

b) **Faux**. Pour $x \neq 1$, $f(x) = (x - 1)(x + 1)/(x - 1) = x + 1$, qui tend vers 2 en 1 : limite finie, pas d'asymptote verticale. c) **Vrai**, par croissances comparées : $x^n \exp(-x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout entier n , ici $n = 100$. d) **Vrai**, c'est le théorème de comparaison : $g(x) \geq f(x)$ et f tend vers $+\infty$. e) **Faux**. $\cos x$ prend la valeur 1 en tous les $x = 2k\pi$ et la valeur -1 en tous les $x = (2k + 1)\pi$, aussi grands que l'on veut : elle ne se rapproche d'aucun réel et ne tend pas vers l'infini.

13. a) Quand x tend vers $-\infty$, $X = -x$ tend vers $+\infty$. $x \exp(x) = -X \exp(-X) = -X/\exp(X) = -1/(\exp(X)/X)$.

Comme $\exp(X)/X$ tend vers $+\infty$, son inverse tend vers 0 : **$\lim (x \rightarrow -\infty) x \exp(x) = 0$** .

b) $4 \times ((x/2) \exp(-x/2))^2 = 4 \times (x^2/4) \times \exp(-x) = x^2 \exp(-x)$. **Égalité vérifiée**. Posons $Y = x/2$, qui tend vers $+\infty$. $Y \exp(-Y) = Y/\exp(Y) = 1/(\exp(Y)/Y)$ tend vers 0. Donc $(Y \exp(-Y))^2$ tend vers 0 et **$x^2 \exp(-x)$ tend vers 0**. c) $(x^2 + 3x) \exp(-x) = x^2 \exp(-x) + 3 \times x \exp(-x)$. Le premier terme tend vers 0 par b), et $x \exp(-x) = 1/(\exp(x)/x)$ tend vers 0. **La limite est 0**.