



Fiche : Limites de fonctions

FICHE • M10 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Si $f(x)$ tend vers un réel ℓ en $+\infty$ ou en $-\infty$, la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe de f .
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a (d'un côté au moins), la droite $x = a$ est asymptote verticale.
- Si $f(x) - (mx + p)$ tend vers 0 en $\pm\infty$, la droite $y = mx + p$ est asymptote oblique ; le signe de cette différence donne la position de la courbe.
- Les limites à gauche et à droite en a peuvent différer : $1/x$ tend vers $-\infty$ en 0^- et vers $+\infty$ en 0^+ .
- Les règles d'opérations des suites valent pour les fonctions ; les formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$.
- En l'infini, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré, et un quotient de polynômes comme le quotient de ces termes.
- Quand un numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, la limite est infinie et son signe vient d'un tableau de signes du dénominateur.
- Une forme $0/0$ en a entre deux polynômes se lève en factorisant par $(x - a)$.
- Une différence de racines carrées se traite par la quantité conjuguée.
- Pour une composée $g(u(x))$, on calcule la limite b de $u(x)$, puis la limite de $g(X)$ quand X tend vers b .
- Comparaison : si $f \geq g$ et g tend vers $+\infty$, alors f tend vers $+\infty$; gendarmes : un encadrement par deux fonctions de même limite ℓ impose la limite ℓ .
- $\sin x$ et $\cos x$ n'ont pas de limite en l'infini : on les encadre entre -1 et 1.
- L'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$; la droite $y = 0$ est asymptote en $-\infty$.
- En cas d'indétermination, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x .



Formules et définitions à connaître

Limite	Valeur	Remarque
x^n en $+\infty$	$+\infty$	n entier non nul
x^n en $-\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair	
$1/x^n$ en $\pm\infty$	0	
$\sqrt{x}$ en $+\infty$	$+\infty$	
$\exp(x)$ en $+\infty$ / en $-\infty$	$+\infty$ / 0	
$\exp(x)/x^n$ en $+\infty$	$+\infty$	croissances comparées
$x^n \exp(-x)$ en $+\infty$	0	croissances comparées
$x^n \exp(x)$ en $-\infty$	0	croissances comparées
$(\exp(x) - 1)/x$ en 0	1	taux d'accroissement de exp en 0
Composée	$\lim g(u(x)) = c$ si $u(x) \rightarrow b$ et $g(X) \rightarrow c$	a, b, c réels ou infinis

Pièges à éviter

- Utiliser le raccourci du terme dominant en un réel a : il ne vaut qu'en l'infini.
- Conclure à une asymptote verticale dès que le dénominateur s'annule : si le numérateur s'annule aussi, la limite peut être finie.



- Oublier de distinguer la gauche et la droite quand le dénominateur change de signe.
- Écrire une limite pour $\sin x$ ou $\cos x$ en l'infini.
- Confondre $\exp(-x)$ en $+\infty$ (limite 0) et en $-\infty$ (limite $+\infty$).
- Croire qu'une courbe ne coupe jamais son asymptote horizontale.

Je me teste

1. Limite de $(5x^2 - 1)/(2x^2 + x)$ en $+\infty$? $\rightarrow 5/2$.
2. Limite de $1/(x - 4)$ en 4^+ ? $\rightarrow +\infty$, asymptote verticale $x = 4$.
3. Limite de $(x^2 - 25)/(x - 5)$ en 5 ? $\rightarrow 10$, après simplification par $(x - 5)$.
4. Limite de $\exp(-x^2)$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$, par composition.
5. Limite de $x^3 \exp(-x)$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$, par croissances comparées.
6. Limite de $\exp(x)/x^2$ en $+\infty$? $\rightarrow +\infty$.
7. Limite de $x \exp(x)$ en $-\infty$? $\rightarrow 0$.
8. Limite de $(\exp(x) - 1)/x$ en 0 ? $\rightarrow 1$.
9. Limite de $(\cos x)/x$ en $+\infty$? $\rightarrow 0$, par les gendarmes.
10. Que signifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ graphiquement ? $\rightarrow$ La droite $y = 3$ est asymptote horizontale en $+\infty$.