

Raisonnement par récurrence et limites de suites

COURS • M09 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	8
Vers le PASS	8
Exercices	9
Corrigés	10

Ce que tu dois savoir faire

- Rédiger une démonstration par récurrence complète : initialisation, hérédité, conclusion.
- Démontrer l'inégalité de Bernoulli et l'utiliser pour minorer une puissance.
- Reconnaître une suite convergente, divergente vers l'infini ou sans limite, à partir des définitions.
- Calculer une limite à l'aide des opérations sur les limites et lever une forme indéterminée.
- Utiliser les théorèmes de comparaison et le théorème des gendarmes.
- Établir qu'une suite monotone et bornée converge, puis déterminer sa limite.
- Déterminer la limite d'une suite géométrique (q^n) selon la valeur de q .
- Calculer la somme des termes d'une suite géométrique et sa limite.
- Combiner récurrence, monotonie et limites dans l'étude d'une suite définie par récurrence.

Cours

1. Le principe de récurrence

Beaucoup de propriétés portent sur tous les entiers naturels : « pour tout n , $u_n \leq 5$ », « pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ ». On ne peut pas les vérifier une par une, il y en a une infinité. Le raisonnement par récurrence permet de les établir en deux étapes seulement.

Principe de récurrence. Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n , et n_0 un entier. Si :

- **initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

L'image habituelle est celle des dominos : le premier tombe (initialisation), et chaque domino qui tombe fait tomber le suivant (hérédité). Tous les dominos finissent par tomber. Ce principe est un axiome de la construction des entiers : on ne le démontre pas, on l'utilise.

Rédiger une récurrence

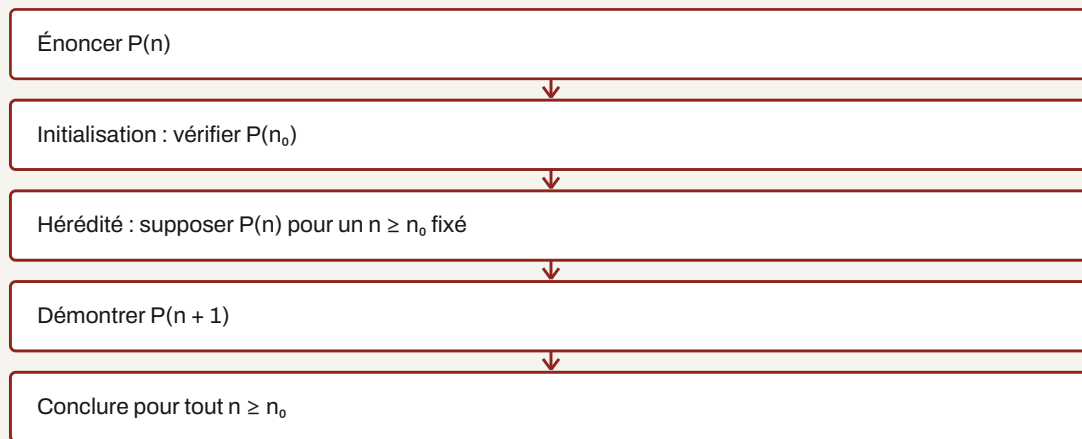


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Dans l'hérédité, la phrase « supposons $P(n)$ vraie » s'appelle l'**hypothèse de récurrence**. On ne suppose pas que la propriété est vraie pour tout n (ce serait supposer ce qu'on veut démontrer) : on fixe un entier n quelconque pour lequel elle est vraie, et on montre qu'elle se transmet au rang suivant.

Exemple. Montrons que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

- Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $1 \times 2/2 = 1$. $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$. Alors $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n/2 + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$. C'est exactement $P(n + 1)$.
- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exemple avec une suite définie par récurrence. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On conjecture $u_n = 2^n - 1$ ($u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$). Initialisation : $2^0 - 1 = 0 = u_0$. Hérédité : si $u_n = 2^n - 1$, alors $u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. La formule est donc vraie pour tout n .

Les deux étapes sont indispensables. La propriété « 3 divise $4^n + 1$ » est héréditaire (si $4^n + 1 = 3k$, alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3 = 3(4k - 1)$) mais elle n'est jamais initialisée : $4^0 + 1 = 2$, et elle est fausse pour tout n ; à l'inverse, « $n^2 - n + 41$ est premier » est vraie de $n = 0$ à $n = 40$ mais pas héréditaire (pour $n = 41$, on obtient 41^2).

La récurrence sert à démontrer des égalités (formules explicites, sommes), des inégalités (encadrements, minoration) et des propriétés de monotonie ($u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n).

2. L'inégalité de Bernoulli

Propriété (inégalité de Bernoulli). Pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n : $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration par récurrence. Fixons $a > 0$ et notons $P(n)$: $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

- Initialisation : $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : supposons $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour un entier n . Comme $1 + a > 0$, on peut multiplier les deux membres par $1 + a$ sans changer le sens : $(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2$.

Or $na^2 \geq 0$, donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$. $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout n .

Le point clé est le signe de $1+a$: multiplier une inégalité par un nombre négatif en change le sens. L'inégalité reste d'ailleurs vraie pour $-1 \leq a \leq 0$ avec la même preuve, puisque $1+a \geq 0$.

L'intérêt de Bernoulli est de comparer une croissance géométrique, difficile à manipuler, à une croissance affine, facile : $1,01^n \geq 1 + 0,01n$, et le membre de droite dépasse n'importe quel nombre pour n assez grand. C'est l'outil qui permet de démontrer que q^n tend vers $+\infty$ quand $q > 1$ (partie 7).

3. Limite d'une suite

On s'intéresse au comportement des termes u_n quand n devient très grand.

Limite finie. On dit que la suite (u_n) **converge** vers le réel ℓ (ou admet ℓ pour limite) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim u_n = \ell$ (sous-entendu quand n tend vers $+\infty$).

Autrement dit, aussi petite que soit la marge $\varepsilon > 0$ choisie, on a $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ dès que n est assez grand. Le rang à partir duquel cela se produit dépend en général de ε .

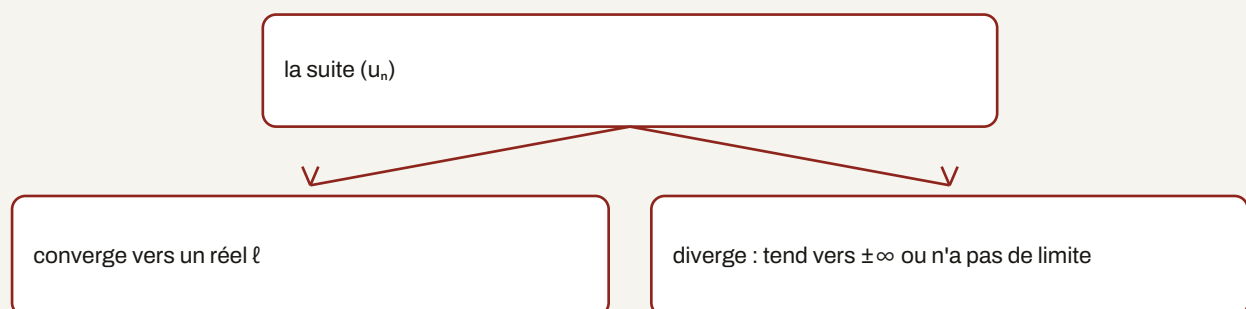
Propriété. Si une suite converge, sa limite est unique. (Deux intervalles ouverts disjoints autour de deux limites différentes ne peuvent pas contenir tous deux tous les termes à partir d'un certain rang.)

Limite infinie. La suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang : les termes finissent par dépasser définitivement n'importe quel seuil A . De même, (u_n) tend vers $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty ; A[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Exemple. $u_n = n^2$. Pour $A > 0$ donné, $n^2 > A$ dès que $n > \sqrt{A}$. Donc $\lim n^2 = +\infty$.

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. Il y a deux cas bien distincts : la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien elle n'a pas de limite du tout. Ainsi $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 : aucun intervalle de largeur inférieure à 2 ne contient tous ses termes à partir d'un rang, et elle ne tend pas vers l'infini. Elle n'a pas de limite.

Comportement d'une suite quand n tend vers $+\infty$



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Suites de référence (à connaître) :

Suite	Limite
$n, n^2, n^3, \sqrt{n}$	$+\infty$
$1/n, 1/n^2, 1/n^3, 1/\sqrt{n}$	0
$(-1)^n$	pas de limite
suite constante égale à c	c

Propriété. Une suite convergente est bornée. En effet, à partir d'un rang N , tous les termes sont dans $]\ell - 1; \ell + 1[$, et il ne reste qu'un nombre fini de termes avant N : le plus grand et le plus petit d'entre eux complètent l'encadrement. La réciproque est fautive : $(-1)^n$ est bornée mais diverge.

4. Opérations sur les limites

Les règles suivantes s'appliquent à deux suites (u_n) et (v_n) ayant chacune une limite (finie ou infinie). ℓ et ℓ' désignent des réels. « FI » signifie **forme indéterminée** : les règles ne permettent pas de conclure directement, il faut transformer l'expression.

Somme.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ (règle des signes)	FI	$\pm\infty$ (règle des signes)

Quotient.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0 (avec signe constant)	ℓ'	0	$\pm\infty$
$\lim (u_n/v_n)$	ℓ/ℓ'	0	$\pm\infty$ (règle des signes)	$\pm\infty$ (règle des signes)	FI	FI

Les quatre formes indéterminées sont donc : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$. Elles ne signifient pas que la limite n'existe pas : elles signifient que le résultat dépend de la façon dont chaque terme tend vers sa limite. Par exemple $n^2 - n$ et $n - n^2$ sont toutes deux de la forme $\infty - \infty$, mais la première tend vers $+\infty$ et la seconde vers $-\infty$.

Lever une indétermination. Trois techniques couvrent la plupart des cas.

- **Factoriser par le terme dominant.** Pour un polynôme ou un quotient de polynômes en n , on met en facteur la plus grande puissance. Exemple : $u_n = n^2 - 5n = n^2(1 - 5/n)$. Comme $1 - 5/n$ tend vers 1 et n^2 vers $+\infty$, $\lim u_n = +\infty$. Pour un quotient, $v_n = (2n + 1)/(3n - 4) = n(2 + 1/n) / (n(3 - 4/n)) = (2 + 1/n)/(3 - 4/n)$, qui tend vers $2/3$.
- **Multiplier par la quantité conjuguée** quand des racines carrées créent un $\infty - \infty$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = ((n+1) - n) / (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, qui tend vers 0.
- **Simplifier** une expression avant de passer à la limite (développer, réduire au même dénominateur).

Pour un polynôme en n , la limite en $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré ; pour un quotient de polynômes, c'est la limite du quotient des termes de plus haut degré. Ce raccourci se justifie toujours par la factorisation précédente, qu'il faut écrire sur une copie.

5. Théorèmes de comparaison et des gendarmes

Quand une suite n'est pas une simple combinaison de suites de référence (présence de $(-1)^n$, de sinus, de cosinus), on l'encadre.

Théorème de comparaison (limites infinies). Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.

Démonstration du premier point. Soit A un réel. Comme v_n tend vers $+\infty$, il existe un rang N_1 à partir duquel $v_n > A$. Par hypothèse, il existe un rang N_2 à partir duquel $u_n \geq v_n$. Pour n supérieur à N_1 et N_2 , on a $u_n \geq v_n > A$. Tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient donc tous les termes u_n à partir d'un certain rang : u_n tend vers $+\infty$.

Théorème des gendarmes (admis). Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

Exemple. $u_n = (-1)^n/n$ pour $n \geq 1$. On a $-1/n \leq u_n \leq 1/n$, et les deux suites qui encadrent tendent vers 0. Donc $\lim u_n = 0$.

Passage à la limite dans une inégalité. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$. Attention : une inégalité stricte devient large à la limite. Par exemple $1/n > 0$ pour tout $n \geq 1$, mais $\lim 1/n = 0$.

6. Suites monotones bornées

Rappels : (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n ; **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geq m$ pour tout n ; **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone (admis).

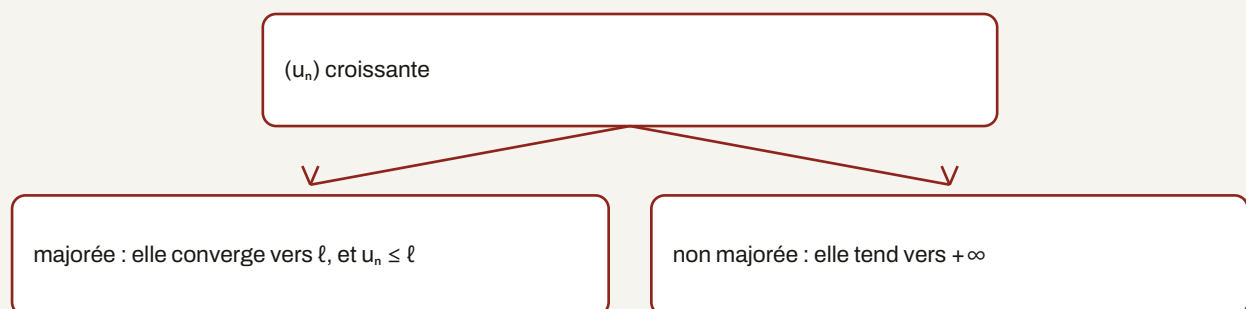
- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Ce théorème assure l'existence d'une limite sans la donner. On la détermine ensuite par un autre moyen (formule explicite, équation vérifiée par la limite). Il ne dit pas non plus que la limite est égale au majorant trouvé : la suite $1 - 1/n$ est croissante, majorée par 1, mais converge vers 1.

Propriété. Si (u_n) est croissante et converge vers ℓ , alors $u_n \leq \ell$ pour tout n . En effet, si un terme u_p dépassait ℓ , tous les termes suivants seraient supérieurs ou égaux à $u_p > \ell$, et l'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_p[$ ne contiendrait aucun terme à partir du rang p : contradiction.

Théorème. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. **Démonstration :** soit A un réel. La suite n'étant pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe un rang N tel que $u_N > A$. La suite étant croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$. Donc $\lim u_n = +\infty$. De même, une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Suite croissante



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Lorsque (u_n) converge vers ℓ et que l'expression $f(u_n)$ se traite par les opérations sur les limites, on passe à la limite des deux côtés de l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme (u_{n+1}) a la même limite que (u_n) , on obtient une équation dont ℓ est solution. Par exemple, si $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ et si (u_n) converge vers ℓ , alors $0,5u_n + 3$ tend vers $0,5\ell + 3$ et l'unicité de la limite donne $\ell = 0,5\ell + 3$, d'où $\ell = 6$. Le chapitre sur la continuité généralise cette méthode.

7. Limites des suites géométriques

Théorème. Soit q un réel.

- Si $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, $q^n = 1$ pour tout n , donc $\lim q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration du cas $q > 1$. Posons $a = q - 1 > 0$. Par l'inégalité de Bernoulli, $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$. Or $\lim (1 + na) = +\infty$ car $a > 0$. Par le théorème de comparaison, $\lim q^n = +\infty$.

Justification du cas $-1 < q < 1$. Si $q = 0$, c'est immédiat. Sinon, posons $Q = 1/|q| > 1$. Alors $|q|^n = 1/Q^n$ et Q^n tend vers $+\infty$, donc $|q|^n$ tend vers 0. Comme $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$, les gendarmes donnent $\lim q^n = 0$.

Cas $q \leq -1$. Les termes alternent de signe : $q^{2k} \geq 1$ et $q^{2k+1} \leq -1$. Aucun intervalle de longueur inférieure à 2 ne peut contenir tous les termes à partir d'un rang, et la suite ne tend pas vers l'infini.

Conséquence pour une suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$ (avec $u_0 \neq 0$) : elle tend vers 0 si $|q| < 1$; elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (selon le signe de u_0) si $q > 1$.

Somme des termes. Pour $q \neq 1$ et tout entier n : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$.

Démonstration : si $S = 1 + q + \dots + q^n$, alors $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$, et $S - qS = 1 - q^{n+1}$, d'où $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$.

Limite de la somme. Si $-1 < q < 1$, q^{n+1} tend vers 0, donc $1 + q + \dots + q^n$ tend vers $1/(1 - q)$. Exemple : $1 + 1/2 + 1/4 + \dots + (1/2)^n$ tend vers $1/(1 - 1/2) = 2$. Si $q \geq 1$, la somme tend vers $+\infty$.

Résumé utile : une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = a u_n + b$ ($a \neq 1$) se ramène à une suite géométrique en posant $v_n = u_n - \ell$, où ℓ est la solution de $\ell = a\ell + b$. On a alors $v_{n+1} = a v_n$, donc $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$, et la limite se lit sur a^n .

Exemples résolus

Exemple 1 : une suite arithmético-géométrique étudiée de deux façons

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

a) Montrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$. b) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite. c) On pose $v_n = u_n - 6$. Montrer que (v_n) est géométrique et retrouver la limite.

Résolution.

a) Notons $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$. Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5$. On a bien $0 \leq 1 \leq 3,5 \leq 6$. Hérédité : supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ pour un entier n . En multipliant par $0,5 > 0$: $0 \leq 0,5u_n \leq 0,5u_{n+1} \leq 3$. En ajoutant 3 : $3 \leq 0,5u_n + 3 \leq 0,5u_{n+1} + 3 \leq 6$, c'est-à-dire $3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$. A fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$: $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

b) La suite est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par 6, donc elle converge vers un réel ℓ . Comme u_{n+1} tend vers ℓ et $0,5u_n + 3$ vers $0,5\ell + 3$, l'unicité de la limite donne $\ell = 0,5\ell + 3$, soit $0,5\ell = 3$ et $\ell = 6$.

c) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = 1 - 6 = -5$. Donc $v_n = -5 \times 0,5^n$ et $u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$. Comme $-1 < 0,5 < 1$, $0,5^n$ tend vers 0, et u_n tend vers 6. Les deux méthodes concordent.

Exemple 2 : lever des formes indéterminées

Déterminer la limite de $a_n = (3n^2 - 5n + 1)/(2n^2 + 7)$, puis celle de $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et de $c_n = 2^n - 3^n$.

Résolution.

a_n est de la forme ∞/∞ . Pour $n \geq 1$, on factorise par n^2 : $a_n = n^2(3 - 5/n + 1/n^2) / (n^2(2 + 7/n^2)) = (3 - 5/n + 1/n^2)/(2 + 7/n^2)$. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 2, donc $\lim a_n = 3/2$.

b_n est de la forme $\infty - \infty$. On multiplie et divise par la quantité conjuguée : $b_n = ((n+1) - n)/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim b_n = 0$.

c_n est de la forme $\infty - \infty$. On factorise par le terme qui croît le plus vite : $c_n = 3^n((2/3)^n - 1)$. Comme $0 < 2/3 < 1$, $(2/3)^n$ tend vers 0, donc $(2/3)^n - 1$ tend vers -1. Et 3^n tend vers $+\infty$ car $3 > 1$. Par produit, $\lim c_n = -\infty$.

Exemple 3 : gendarmes, comparaison et somme géométrique

a) Déterminer la limite de $u_n = (3n + \sin n)/(n + 2)$. b) Déterminer la limite de $w_n = n^2 + (-1)^n n$. c) Déterminer la limite de $S_n = 1 + 1/3 + 1/3^2 + \dots + 1/3^n$.

Résolution.

- a) Pour tout n , $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $3n - 1 \leq 3n + \sin n \leq 3n + 1$. En divisant par $n + 2 > 0$: $(3n - 1)/(n + 2) \leq u_n \leq (3n + 1)/(n + 2)$. Par factorisation par n , les deux suites qui encadrent tendent vers $3/1 = 3$. D'après le théorème des gendarmes, **$\lim u_n = 3$** .
- b) Pour tout n , $(-1)^n n \geq -n$, donc $w_n \geq n^2 - n = n(n - 1)$. Or $n(n - 1)$ tend vers $+\infty$ (produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$). Par comparaison, **$\lim w_n = +\infty$** .
- c) S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $q = 1/3$ et de premier terme 1. Donc $S_n = (1 - (1/3)^{n+1})/(1 - 1/3) = (3/2)(1 - (1/3)^{n+1})$. Comme $-1 < 1/3 < 1$, $(1/3)^{n+1}$ tend vers 0, et **$\lim S_n = 3/2$** .

Méthodes et pièges

- Pour une récurrence, écris toujours la propriété $P(n)$ en toutes lettres, puis les trois parties avec leur titre. Dans l'hérédité, pars de l'hypothèse $P(n)$ et arrive à $P(n + 1)$, jamais l'inverse.
- Ne suppose jamais « $P(n)$ vraie pour tout n » dans l'hérédité : tu fixes UN entier n .
- Quand tu multiplies une inégalité dans une hérédité, vérifie le signe du facteur. C'est exactement l'argument $1 + a > 0$ de Bernoulli.
- Pour montrer qu'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone, une récurrence sur « $u_n \leq u_{n+1}$ » est souvent plus simple que le calcul de $u_{n+1} - u_n$.
- Avant d'appliquer une règle d'opération, identifie la forme. Si c'est une forme indéterminée, transforme : terme dominant, quantité conjuguée, simplification.
- Avec $(-1)^n$, $\sin n$ ou $\cos n$, pense encadrement : gendarmes pour une limite finie, comparaison pour une limite infinie.
- « Croissante et majorée par M » donne une convergence, pas une limite égale à M . Tu dois calculer la limite autrement.
- Une inégalité stricte devient large en passant à la limite : $u_n < 2$ pour tout n donne seulement $\lim u_n \leq 2$.
- Pour q^n , regarde d'abord q : supérieur à 1, entre -1 et 1, ou inférieur ou égal à -1. Ne confonds pas q^n avec nq .
- Pour une somme géométrique, compte bien les termes : $1 + q + \dots + q^n$ en contient $n + 1$, d'où l'exposant $n + 1$ dans la formule.

Vers le PASS

En PASS, les suites géométriques et les sommes géométriques réapparaissent dès qu'un phénomène se répète à intervalles réguliers avec une proportion constante : élimination d'un médicament administré à doses répétées (la quantité présente dans l'organisme tend vers un plateau, exactement la limite d'une suite arithmético-géométrique), décroissance radioactive observée à pas de temps fixe, croissance d'une population bactérienne par divisions successives. Le passage du discret au continu conduit à l'exponentielle et au logarithme, qui servent à lire des demi-vies et des échelles logarithmiques (pH, décibels). Le raisonnement par récurrence, lui, entraîne à la rigueur logique attendue dans les QCM de type « vrai ou faux » où une seule hypothèse oubliée rend une affirmation fausse.

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

- Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
- Détermine la limite de chacune des suites suivantes : a) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$; b) $v_n = (5 - 2n)/(n + 3)$; c) $w_n = 3 + 2/\sqrt{n}$ ($n \geq 1$) ; d) $z_n = n - \sqrt{n}$.
- Détermine la limite de : a) $a_n = 4 \times 0,7^n$; b) $b_n = -2 \times 1,05^n$; c) $c_n = (4^n - 1)/(4^n + 2)$; d) $d_n = (-0,9)^n + 5$.
- a) Détermine la limite de $u_n = (\cos n)/n$ pour $n \geq 1$. b) Détermine la limite de $v_n = n + (-1)^n$.
- a) À l'aide de l'inégalité de Bernoulli, montre que pour tout entier n , $1,01^n \geq 1 + 0,01n$. b) En déduire que $1,01^n \geq 100$ pour tout $n \geq 9\,900$.

Niveau 2 : type bac

- Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$.
a) Montre par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$. b) Justifie que (u_n) converge. c) On pose $v_n = u_n - 10$. Montre que (v_n) est géométrique, puis exprime u_n en fonction de n et donne la limite de (u_n) . d) À l'aide de la calculatrice, détermine le plus petit entier n tel que $u_n > 9,9$.
- a) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
b) En déduire que pour $n \geq 4$, $0 < n/2^n \leq 1/n$, puis la limite de $n/2^n$.
- Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2$.
a) Montre que (S_n) est croissante. b) Démontre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - 1/n$. c) En déduire que (S_n) converge et donne un majorant de sa limite.
- Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$.
a) Montre par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n . b) Montre que (u_n) est décroissante. c) En déduire que (u_n) converge, puis que sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell/(1 + \ell)$. Détermine ℓ . d) Démontre par récurrence que $u_n = 1/(n + 1)$ pour tout n , et vérifie la cohérence avec c).

Niveau 3 : vers le PASS

- Un patient reçoit chaque jour à heure fixe une injection de 2 mg d'un médicament. En 24 heures, l'organisme élimine 30 % de la quantité présente. On note q_n la quantité (en mg) présente juste après la n -ième injection, avec $q_1 = 2$.
a) Justifie que $q_{n+1} = 0,7q_n + 2$. b) Montre que $q_n = 2(1 + 0,7 + 0,7^2 + \dots + 0,7^{n-1})$, puis que $q_n = (20/3)(1 - 0,7^n)$. c) Détermine la limite de (q_n) et interprète-la. d) À partir de quelle injection la quantité présente juste après l'injection dépasse-t-elle 6 mg ?
- Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse et justifie (démonstration ou contre-exemple).
a) Une suite croissante tend vers $+\infty$. b) Une suite bornée est convergente. c) Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang. d) Une suite convergente est bornée. e) Si $0 < u_n < 1/n$ pour tout $n \geq 1$, alors (u_n) converge vers 0.
- a) Soit $q > 1$. Rappelle comment l'inégalité de Bernoulli prouve que q^n tend vers $+\infty$.

b) Avec $q = 1,02$, trouve à l'aide de Bernoulli un entier N tel que $1,02^n \geq 1\,000$ pour tout $n \geq N$. c) Le plus petit entier n tel que $1,02^n \geq 1\,000$ vaut 349 (calculatrice). Compare avec b) et commente.

13. a) Démontre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.

b) On note T_n cette somme. Détermine la limite de T_n/n^4 .

Corrigés

1. Notons $P(n) : 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche se réduit à 1 et $1^2 = 1$. $P(1)$ est vraie. Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Le terme suivant de la somme est $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$. Donc $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. $P(n + 1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout $n \geq 1$, la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 .**

2. a) Forme $\infty - \infty$. $u_n = n^2(2 - 3/n + 1/n^2)$ pour $n \geq 1$; la parenthèse tend vers 2 et n^2 vers $+\infty$, donc **$\lim u_n = +\infty$.**

b) Forme ∞/∞ . $v_n = n(5/n - 2)/(n(1 + 3/n)) = (5/n - 2)/(1 + 3/n)$, qui tend vers $-2/1$. **$\lim v_n = -2$.** c) $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, donc $2/\sqrt{n}$ tend vers 0 et **$\lim w_n = 3$.** d) Forme $\infty - \infty$. Pour $n \geq 1$, $z_n = n(1 - 1/\sqrt{n})$. La parenthèse tend vers 1, n tend vers $+\infty$, donc **$\lim z_n = +\infty$.**

3. a) $-1 < 0,7 < 1$, donc $0,7^n$ tend vers 0 et **$\lim a_n = 0$.**

b) $1,05 > 1$, donc $1,05^n$ tend vers $+\infty$; multiplié par $-2 < 0$: **$\lim b_n = -\infty$.** c) Forme ∞/∞ . On divise numérateur et dénominateur par 4^n : $c_n = (1 - (1/4)^n)/(1 + 2(1/4)^n)$. Comme $(1/4)^n$ tend vers 0, **$\lim c_n = 1$.** d) $-1 < -0,9 < 1$, donc $(-0,9)^n$ tend vers 0 et **$\lim d_n = 5$.**

4. a) Pour $n \geq 1$, $-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $-1/n \leq u_n \leq 1/n$. Les deux suites qui encadrent tendent vers 0 ; par le théorème des gendarmes, **$\lim u_n = 0$.**

b) Pour tout n , $(-1)^n \geq -1$, donc $v_n \geq n - 1$. Or $n - 1$ tend vers $+\infty$. Par comparaison, **$\lim v_n = +\infty$.**

5. a) L'inégalité de Bernoulli $(1 + a)^n \geq 1 + na$, valable pour $a > 0$, appliquée à $a = 0,01$ donne **$1,01^n \geq 1 + 0,01n$.**

b) Pour $n \geq 9\,900$, $0,01n \geq 99$, donc $1 + 0,01n \geq 100$. Avec a) : **$1,01^n \geq 100$ pour tout $n \geq 9\,900$.** (Ce rang n'est pas le plus petit possible, mais il suffit.)

6. a) $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

Initialisation : $u_0 = 0$, $u_1 = 0,8 \times 0 + 2 = 2$; $0 \leq 0 \leq 2 \leq 10$. Vrai. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, en multipliant par $0,8 > 0$: $0 \leq 0,8u_n \leq 0,8u_{n+1} \leq 8$, puis en ajoutant 2 : $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$. $P(n + 1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.** b) (u_n) est croissante et majorée par 10 : d'après le théorème de convergence monotone, **elle converge.** c) $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,8u_n - 8 = 0,8(u_n - 10) = 0,8v_n$: (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = -10$. Donc $v_n = -10 \times 0,8^n$ et **$u_n = 10 - 10 \times 0,8^n$.** Comme $-1 < 0,8 < 1$, $0,8^n$ tend vers 0 et **$\lim u_n = 10$.** d) $u_n > 9,9$ équivaut à $10 \times 0,8^n < 0,1$, soit $0,8^n < 0,01$. La calculatrice donne $0,8^{20} \approx 0,0115$ (trop grand) et $0,8^{21} \approx 0,0092$. La suite $(0,8^n)$ étant décroissante, **le plus petit entier est $n = 21$.**

7. a) $P(n) : 2^n \geq n^2$, pour $n \geq 4$.

Initialisation : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Vrai. Hérédité : soit $n \geq 4$ avec $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Il suffit de montrer $2n^2 \geq (n + 1)^2$, c'est-à-dire $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, soit $(n - 1)^2 \geq 2$. Pour $n \geq 4$, $(n - 1)^2 \geq 9 \geq 2$. Donc $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$. $P(n + 1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.** b) Pour $n \geq 4$, $2^n \geq n^2 > 0$, donc $0 < 1/2^n \leq 1/n^2$, et en multipliant par $n > 0$: $0 < n/2^n \leq n/n^2 = 1/n$. Comme $1/n$ tend vers 0, le théorème des

gendarmes donne $\lim n/2^n = 0$.

8. a) $S_{n+1} - S_n = 1/(n+1)^2 > 0$, donc (S_n) est croissante.

b) $P(n) : S_n \leq 2 - 1/n$. Initialisation : $S_1 = 1$ et $2 - 1/1 = 1$. Vrai. Hérédité : si $S_n \leq 2 - 1/n$, alors $S_{n+1} = S_n + 1/(n+1)^2 \leq 2 - 1/n + 1/(n+1)^2$. Il reste à montrer que $2 - 1/n + 1/(n+1)^2 \leq 2 - 1/(n+1)$, c'est-à-dire $1/(n+1)^2 \leq 1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1))$. Or $n(n+1) < (n+1)^2$, donc $1/(n(n+1)) > 1/(n+1)^2$. L'inégalité est vraie, donc $S_{n+1} \leq 2 - 1/(n+1)$. Conclusion : **pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - 1/n$** . c) Pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 2 - 1/n < 2$: (S_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge, vers une limite inférieure ou égale à 2 (passage à la limite dans une inégalité).

9. a) $P(n) : u_n > 0$. Initialisation : $u_0 = 1 > 0$. Hérédité : si $u_n > 0$, alors $1 + u_n > 0$ et $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$ est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $u_{n+1} > 0$. **Pour tout n , $u_n > 0$** .

b) $u_{n+1} - u_n = u_n/(1 + u_n) - u_n = (u_n - u_n - u_n^2)/(1 + u_n) = -u_n^2/(1 + u_n)$. Comme $u_n > 0$, ce nombre est strictement négatif : (u_n) est décroissante. c) (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. Comme $1 + \ell \neq 0$, les opérations sur les limites donnent $u_n/(1 + u_n) \rightarrow \ell/(1 + \ell)$, et l'unicité de la limite donne $\ell = \ell/(1 + \ell)$. Alors $\ell(1 + \ell) = \ell$, soit $\ell^2 = 0$. $\ell = 0$. d) $P(n) : u_n = 1/(n+1)$. Initialisation : $u_0 = 1 = 1/1$. Hérédité : si $u_n = 1/(n+1)$, alors $u_{n+1} = (1/(n+1)) / (1 + 1/(n+1)) = (1/(n+1)) / ((n+2)/(n+1)) = 1/(n+2)$. Donc **$u_n = 1/(n+1)$ pour tout n** , et cette suite tend bien vers 0.

10. a) Juste avant la $(n+1)$ -ième injection, il reste 70 % de q_n , soit $0,7q_n$; l'injection ajoute 2 mg. Donc **$q_{n+1} = 0,7q_n + 2$** .

b) Récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1 : 2 \times 1 = 2 = q_1$. Si $q_n = 2(1 + 0,7 + \dots + 0,7^{n-1})$, alors $q_{n+1} = 0,7 \times 2(1 + \dots + 0,7^{n-1}) + 2 = 2(0,7 + \dots + 0,7^n) + 2 = 2(1 + 0,7 + \dots + 0,7^n)$. La formule est héréditaire. La somme entre parenthèses compte n termes de raison 0,7 : elle vaut $(1 - 0,7^n)/(1 - 0,7) = (1 - 0,7^n)/0,3$. Donc $q_n = (2/0,3)(1 - 0,7^n) = (20/3)(1 - 0,7^n)$. c) 0,7ⁿ tend vers 0, donc **$\lim q_n = 20/3 \approx 6,67$ mg**. La quantité juste après injection se stabilise vers un plateau d'environ 6,67 mg : l'élimination quotidienne (30 % de 20/3, soit 2 mg) compense alors exactement la dose injectée. d) $q_n \geq 6$ équivaut à $1 - 0,7^n \geq 0,9$, soit $0,7^n \leq 0,1$. La calculatrice donne $0,7^6 \approx 0,118$ et $0,7^7 \approx 0,082$. C'est à partir de la 7^e injection ($q_7 \approx 6,12$ mg).

11. a) **Faux**. $u_n = 1 - 1/(n+1)$ est croissante mais tend vers 1.

b) **Faux**. $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 mais n'a pas de limite. c) **Faux**. $u_n = n + 2(-1)^n$ vérifie $u_n \geq n - 2$, donc tend vers $+\infty$ par comparaison, mais $u_{2k} = 2k + 2$ et $u_{2k+1} = 2k - 1$: on a $u_{2k+1} < u_{2k}$ pour tout k , la suite n'est croissante à partir d'aucun rang. d) **Vrai**. Si u_n tend vers ℓ , à partir d'un rang N tous les termes sont dans $]\ell - 1 ; \ell + 1[$; les termes $u_0, \dots, u_{(N-1)}$ sont en nombre fini, donc la suite entière est encadrée par le plus petit et le plus grand de ces nombres et de $\ell - 1, \ell + 1$. e) **Vrai**. 0 et $1/n$ tendent vers 0 ; le théorème des gendarmes donne $\lim u_n = 0$.

12. a) On écrit $q = 1 + a$ avec $a = q - 1 > 0$. Bernoulli donne $q^n \geq 1 + na$, et $1 + na$ tend vers $+\infty$; par comparaison, q^n tend vers $+\infty$.

b) Avec $a = 0,02 : 1,02^n \geq 1 + 0,02n$. On a $1 + 0,02n \geq 1\,000$ dès que $0,02n \geq 999$, soit $n \geq 49\,950$. **$N = 49\,950$ convient**. c) Le rang exact, 349, est environ 143 fois plus petit. Bernoulli remplace une croissance géométrique par une croissance affine, beaucoup plus lente : la minoration est juste mais très grossière. Elle sert à prouver l'existence d'un rang, pas à trouver le plus petit.

13. a) $P(n) : T_n = (n(n+1)/2)^2$.

Initialisation : $T_1 = 1$ et $(1 \times 2/2)^2 = 1$. Vrai. Hérédité : si $T_n = n^2(n+1)^2/4$, alors $T_{n+1} = n^2(n+1)^2/4 + (n+1)^3 = (n+1)^2(n^2/4 + n + 1) = (n+1)^2(n^2 + 4n + 4)/4 = (n+1)^2(n+2)^2/4 = ((n+1)(n+2)/2)^2$. $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : **pour tout $n \geq 1$, $1^3 + \dots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$** . b) $T_n/n^4 = n^2(n+1)^2/(4n^4) = (1/4) \times ((n+1)/n)^2 = (1/4)(1 + 1/n)^2$. Comme $1 + 1/n$ tend vers 1, **$\lim T_n/n^4 = 1/4$** .