



Fiche : Raisonnement par récurrence et limites de suites

FICHE • M09 • TERMINALE

Spécialité de terminale, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Une récurrence comporte trois parties : initialisation ($P(n_0)$ vraie), hérédité (si $P(n)$ est vraie pour un $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie), conclusion.
- Dans l'hérédité, on fixe un entier n pour lequel $P(n)$ est vraie : on ne suppose jamais la propriété vraie pour tout n .
- L'inégalité de Bernoulli affirme que $(1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $a > 0$ et tout entier n ; sa preuve par récurrence repose sur $1+a > 0$.
- Une suite converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous ses termes à partir d'un certain rang ; cette limite est unique.
- Une suite tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous ses termes à partir d'un certain rang.
- Une suite divergente tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite, comme $(-1)^n$.
- Une suite convergente est bornée, mais une suite bornée ne converge pas forcément.
- Les formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$; on les lève par factorisation du terme dominant, quantité conjuguée ou simplification.
- Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un rang et v_n tend vers $+\infty$, alors u_n tend vers $+\infty$ (comparaison).
- Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un rang et v_n, w_n tendent vers ℓ , alors u_n tend vers ℓ (gendarmes).
- Une suite croissante et majorée converge ; une suite décroissante et minorée converge ; une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Si une suite croissante converge vers ℓ , tous ses termes sont inférieurs ou égaux à ℓ .
- Pour $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente, on passe à la limite des deux côtés pour obtenir une équation vérifiée par ℓ .
- Une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ se ramène à une suite géométrique $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell = a\ell + b$.



Formules et définitions à connaître

Objet	Résultat	Condition
Bernoulli	$(1 + a)^n \geq 1 + na$	$a > 0$ (vrai aussi pour $a \geq -1$), n entier naturel
Limite de q^n	$+\infty$	$q > 1$
Limite de q^n	1	$q = 1$
Limite de q^n	0	$-1 < q < 1$
Limite de q^n	pas de limite	$q \leq -1$
Somme géométrique	$1 + q + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$	$q \neq 1$, $n + 1$ termes
Limite de la somme	$1/(1 - q)$	$-1 < q < 1$
Suites de référence	$n, n^2, \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$; $1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n}$ tendent vers 0	$n \geq 1$ pour les inverses
Somme des entiers	$1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$	$n \geq 1$

Pièges à éviter

- Oublier l'initialisation : une propriété héréditaire peut être fausse partout (« 3 divise $4^n + 1$ »).
- Multiplier une inégalité par un facteur sans vérifier qu'il est positif.



- Conclure qu'une suite croissante et majorée par M tend vers M : elle converge, mais sa limite peut être plus petite.
- Garder une inégalité stricte à la limite : $u_n < 2$ donne seulement $\lim u_n \leq 2$.
- Appliquer une règle d'opération à une forme indéterminée au lieu de transformer l'expression.
- Se tromper sur le nombre de termes d'une somme géométrique, donc sur l'exposant $n + 1$.

Je me teste

1. Quelles sont les deux étapes d'une récurrence avant la conclusion ? → L'initialisation et l'hérédité.
2. Énonce l'inégalité de Bernoulli. → Pour $a > 0$ et n entier, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
3. Limite de $0,99^n$? → 0, car $-1 < 0,99 < 1$.
4. Limite de $(-2)^n$? → Aucune limite, car $-2 \leq -1$.
5. Limite de $(2n^2 + 1)/(5n^2 - n)$? → $2/5$, en factorisant par n^2 .
6. Limite de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$? → 0, par la quantité conjuguée.
7. Limite de $(\sin n)/n$? → 0, par les gendarmes avec $-1/n$ et $1/n$.
8. Une suite décroissante minorée par 0 tend-elle vers 0 ? → Elle converge, mais pas forcément vers 0.
9. Valeur de $1 + 1/2 + \dots + (1/2)^n$ quand n tend vers $+\infty$? → Elle tend vers 2.
10. Si $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$ converge, quelle est sa limite ? → 6, solution de $\ell = 0,5\ell + 3$.