

Variables aléatoires réelles

COURS • M08 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	6
Exercices	6
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Définir une variable aléatoire associée à une expérience et interpréter les événements $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$, $\{X > a\}$.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire et la présenter dans un tableau.
- Vérifier qu'un tableau définit bien une loi de probabilité et trouver une probabilité manquante.
- Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire.
- Interpréter l'espérance comme une moyenne à long terme, notamment pour juger si un jeu est équitable.
- Utiliser les formules $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$, et les démontrer.
- Reconnaître une variable de Bernoulli et connaître son espérance et sa variance.
- Simuler une variable aléatoire et un échantillon avec Python, et calculer la moyenne d'un échantillon.
- Observer la fluctuation de la moyenne d'échantillon et l'écart entre cette moyenne et l'espérance, à l'aide de $2\sigma/\sqrt{n}$.

Cours

1. Variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω , munie d'une loi de probabilité P .

Définition. Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction qui, à chaque issue de Ω , associe un nombre réel.

Malgré son nom, une variable aléatoire n'est ni une variable ni aléatoire au sens strict : c'est une **fonction** définie sur l'univers. Ce qui est aléatoire, c'est l'issue ; X traduit cette issue en un nombre (un gain, un nombre de succès, une somme, une mesure).

Exemple. On lance deux pièces équilibrées. $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$. La variable X qui compte le nombre de « pile » associe 2 à PP, 1 à PF et à FP, 0 à FF. Une autre variable G peut associer un gain à chaque issue : 5 € pour PP, 1 € pour une seule pile, 0 € pour FF.

Si x est un réel, on note $\{X = x\}$ l'événement formé des issues dont l'image par X vaut x . On définit de même $\{X \leq x\}$, $\{X > x\}$, $\{a \leq X \leq b\}$. Dans l'exemple, $\{X = 1\} = \{PF ; FP\}$ et $P(X = 1) = 2/4 = 1/2$.

2. Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ (distinctes).

Définition. La loi de probabilité de X est la donnée des probabilités $p_i = P(X = x_i)$ pour i allant de 1 à n . On la présente en général dans un tableau.

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Les événements $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_n\}$ forment une partition de Ω (chaque issue a une et une seule image). Par conséquent :

- chaque p_i est compris entre 0 et 1 ;
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Cette dernière égalité sert de contrôle systématique, et permet de trouver une probabilité manquante.

Déterminer une loi. On procède en trois temps : on liste les valeurs possibles de X ; pour chacune, on décrit l'événement $\{X = x_i\}$; on calcule sa probabilité (équiprobabilité, arbre, indépendance). On vérifie enfin que la somme vaut 1.

Déterminer la loi de X

1. Lister les valeurs possibles de X
2. Décrire chaque événement $\{X = x_i\}$
3. Calculer chaque probabilité (arbre, dénombrement)
4. Vérifier que la somme vaut 1

Les probabilités cumulées s'obtiennent par addition : $P(X \leq a)$ est la somme des p_i pour les $x_i \leq a$. Pour « au moins », on passe souvent par le contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

3. Espérance

Définition. L'espérance de X est le nombre

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n.$$

C'est la moyenne des valeurs de X , pondérée par leurs probabilités.

Interprétation. Si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois de façon indépendante, la moyenne des valeurs obtenues pour X se rapproche de $E(X)$. L'espérance est donc la **valeur moyenne à long terme** : pour un jeu, c'est le gain moyen par partie qu'on peut prévoir sur un grand nombre de parties. Elle n'est pas forcément une valeur que X peut prendre : pour un dé équilibré, $E(X) = 3,5$.

Jeu équitable. Si X est le gain algébrique d'un joueur (gain moins mise), le jeu est :

- **favorable** au joueur si $E(X) > 0$;
- **défavorable** si $E(X) < 0$;
- **équitable** si $E(X) = 0$.

Exemple. Pour un dé équilibré, $E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 3,5$.

4. Variance et écart type

L'espérance donne une position moyenne, mais pas la dispersion. Deux jeux de même espérance peuvent être très différents : gagner 0 € à coup sûr, ou gagner 100 € ou perdre 100 € avec la même probabilité. On mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance.

Définition. En notant $\mu = E(X)$, la **variance** de X est

$$V(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2.$$

L'**écart type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variance est la moyenne pondérée des carrés des écarts à l'espérance. Elle est toujours **positive ou nulle**, et nulle seulement si X est constante (prend une seule valeur avec probabilité 1). Comme on a élevé au carré, la variance s'exprime dans le **carré** de l'unité de X (des €² pour un gain) ; l'écart type, lui, a la **même unité** que X, ce qui le rend interprétable.

Formule de König-Huygens. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, où $E(X^2) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \dots + p_nx_n^2$.

Démonstration. En développant $(x_i - \mu)^2 = x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2$, on obtient $V(X) = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i$
 $\sum p_i = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2$. (Le symbole $\sum$ désigne la somme sur i allant de 1 à n.)

Cette formule est souvent plus rapide, surtout quand μ n'est pas entier. Mais attention : $E(X^2)$ n'est pas $(E(X))^2$.

Exemple. Dé équilibré : $E(X^2) = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 = 91/6$, donc $V(X) = 91/6 - 3,5^2 = 91/6 - 49/4 = 182/12 - 147/12 = 35/12 \approx 2,92$, et $\sigma(X) \approx 1,71$.

Indicateur	Formule	Unité	Rôle
Espérance $E(X)$	$\sum p_i x_i$	celle de X	position moyenne
Variance $V(X)$	$\sum p_i (x_i - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$	carré de celle de X	dispersion
Écart type $\sigma(X)$	$\sqrt{V(X)}$	celle de X	dispersion interprétable

5. Transformation affine : $aX + b$

Soient a et b deux réels. Si X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i , la variable $Y = aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les **mêmes** probabilités.

Propriétés. $E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2V(X)$; $\sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)$.

Démonstration. $E(aX + b) = \sum p_i(ax_i + b) = a \sum p_i x_i + b \sum p_i = aE(X) + b$, car la somme des p_i vaut 1. Ensuite, avec $\mu = E(X)$, l'espérance de Y est $a\mu + b$, et l'écart de chaque valeur à l'espérance vaut $(ax_i + b) - (a\mu + b) = a(x_i - \mu)$. Donc $V(Y) = \sum p_i a^2(x_i - \mu)^2 = a^2 V(X)$. Enfin $\sigma(Y) = \sqrt{a^2 V(X)} = |a| \times \sigma(X)$.

Ces résultats se comprennent bien :

- **ajouter une constante b** décale toutes les valeurs : l'espérance est décalée de b , mais la dispersion ne change pas ;
- **multiplier par a** dilate les écarts d'un facteur $|a|$: l'écart type est multiplié par $|a|$, la variance par a^2 .

Exemple. Une température X en degrés Celsius a pour espérance 20 et pour écart type 3. En degrés Fahrenheit, $Y = 1,8X + 32$. Alors $E(Y) = 1,8 \times 20 + 32 = 68$ et $\sigma(Y) = 1,8 \times 3 = 5,4$.

Variable centrée réduite. Si $\sigma(X) \neq 0$, la variable $Z = (X - E(X))/\sigma(X)$ vérifie $E(Z) = 0$ et $\sigma(Z) = 1$. Elle permet de comparer des variables d'unités ou d'échelles différentes.

6. Variable de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : le succès, de probabilité p , et l'échec, de probabilité $1 - p$. La variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Valeur	0	1
Probabilité	$1 - p$	p

On calcule $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$; $E(X^2) = p$ (car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$), donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Cette variable est l'outil de base pour modéliser une proportion : la moyenne de n valeurs de Bernoulli est la **fréquence** des succès.

7. Simulation et échantillons

Simuler une variable aléatoire. En Python, la fonction `random()` du module `random` renvoie un nombre aléatoire de $[0 ; 1[$, chaque sous-intervalle de longueur ℓ étant atteint avec probabilité ℓ . Pour simuler une variable de Bernoulli de paramètre p , il suffit de tester si `random() < p` :

```
from random import random

def bernoulli(p):
    if random() < p:
        return 1
    return 0
```

Pour une variable à plusieurs valeurs, on découpe $[0 ; 1[$ en intervalles de longueurs $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Échantillon. Un **échantillon de taille n** de la variable X est une liste de n valeurs obtenues en répétant n fois l'expérience de façon indépendante. Sa **moyenne** m est la moyenne de ces n valeurs.

```
def moyenne_echantillon(p, n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + bernoulli(p)
```

return s / n

Fluctuation d'échantillonnage. Deux échantillons de même taille donnent en général des moyennes différentes : c'est la fluctuation d'échantillonnage. En simulant un grand nombre d'échantillons, on observe que :

- les moyennes m se répartissent autour de l'espérance $\mu = E(X)$;
- plus n est grand, plus elles sont resserrées autour de μ (c'est l'idée de la **loi des grands nombres**) ;
- pour des échantillons de taille n assez grande, la proportion des échantillons pour lesquels l'écart $|m - \mu|$ est inférieur ou égal à $2\sigma/\sqrt{n}$ est proche de **0,95**, où σ est l'écart type de X .

Étudier la fluctuation par simulation

1. Simuler un échantillon de taille n et calculer m • 2. Répéter pour N échantillons • 3. Compter ceux où l'écart entre m et μ est au plus $2\sigma/\sqrt{n}$ • 4. Constaté une proportion proche de 0,95

Autrement dit, environ 95 % des moyennes d'échantillons tombent dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma/\sqrt{n} ; \mu + 2\sigma/\sqrt{n}]$. Le facteur $\sqrt{n}$ explique que, pour diviser par 2 la largeur de cet intervalle, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4. Ce constat expérimental sera démontré et précisé plus tard.

Exemple. Pour une variable de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$, $\sigma = \sqrt{(0,25)} = 0,5$. Pour $n = 100$, $2\sigma/\sqrt{n} = 2 \times 0,5/10 = 0,1$: environ 95 % des fréquences de pile observées sur 100 lancers d'une pièce équilibrée sont comprises entre 0,4 et 0,6.

Exemples résolus

Exemple 1 : un jeu de dé

Énoncé. On lance un dé équilibré. Si on obtient 6, on gagne 10 € ; si on obtient 4 ou 5, on gagne 2 € ; sinon, on perd 3 €. On note X le gain algébrique. a) Déterminer la loi de X . b) Calculer $E(X)$ et interpréter. c) Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Résolution. a) X prend les valeurs -3, 2 et 10. $P(X = 10) = 1/6$; $P(X = 2) = 2/6 = 1/3$; $P(X = -3) = 3/6 = 1/2$.

x	-3	2	10
$P(X = x)$	1/2	1/3	1/6

Contrôle : $3/6 + 2/6 + 1/6 = 1$. b) $E(X) = -3 \times 3/6 + 2 \times 2/6 + 10 \times 1/6 = (-9 + 4 + 10)/6 = 5/6 \approx 0,83$ €. Le jeu est favorable au joueur : sur un grand nombre de parties, il gagne en moyenne environ 0,83 € par partie. c) $E(X^2) = 9 \times 3/6 + 4 \times 2/6 + 100 \times 1/6 = (27 + 8 + 100)/6 = 135/6 = 22,5$. $V(X) = 22,5 - (5/6)^2 = 810/36 - 25/36 = 785/36 \approx 21,81$ €² et $\sigma(X) = \sqrt{785/6} \approx 4,67$ €.

Exemple 2 : nombre de succès sur deux tirages avec remise

Énoncé. Une urne contient 2 boules rouges et 3 bleues. On tire une boule, on la remet, puis on en tire une seconde. X est le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X , puis $E(X)$ et $V(X)$.

Résolution. Les tirages sont indépendants (avec remise) et, à chaque tirage, $P(\text{rouge}) = 2/5$. $P(X = 0) = (3/5)^2 = 9/25$; $P(X = 2) = (2/5)^2 = 4/25$; $P(X = 1) = 2/5 \times 3/5 + 3/5 \times 2/5 = 12/25$ (deux chemins). Contrôle : $9 +$

$12 + 4 = 25$. $E(X) = 0 \times 9/25 + 1 \times 12/25 + 2 \times 4/25 = 20/25 = 0,8$. $E(X^2) = 1 \times 12/25 + 4 \times 4/25 = 28/25$, donc $V(X) = 28/25 - (4/5)^2 = 28/25 - 16/25 = 12/25 = 0,48$. Remarque : X est la somme de deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,4 ; on retrouve $E(X) = 2 \times 0,4$ et $V(X) = 2 \times 0,4 \times 0,6$.

Exemple 3 : changement d'échelle

Énoncé. La note X d'un devoir a pour espérance 9 et pour écart type 4. Le professeur décide d'appliquer $Y = 0,5X + 6$. Calculer $E(Y)$, $\sigma(Y)$ et $V(Y)$.

Résolution. $E(Y) = 0,5 \times E(X) + 6 = 0,5 \times 9 + 6 = 10,5$. $\sigma(Y) = |0,5| \times \sigma(X) = 0,5 \times 4 = 2$; $V(Y) = 2^2 = 4$ (ou $0,5^2 \times 16 = 4$). La transformation a relevé la moyenne et resserré les notes autour d'elle.

Méthodes et pièges

- Commence toujours par la liste des valeurs possibles de X, puis calcule chaque probabilité, et termine par le contrôle « somme = 1 ».
- Pour un gain, pense à retrancher la mise : la variable « gain algébrique » prend des valeurs négatives.
- $E(X)$ est une moyenne à long terme, pas la valeur la plus probable ni forcément une valeur prise par X.
- Pour la variance, la formule $E(X^2) - (E(X))^2$ est souvent la plus rapide ; ne confonds pas $E(X^2)$ et $(E(X))^2$.
- Une variance négative signale une erreur de calcul : recommence.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$: la constante b disparaît et a est élevé au carré ; pour l'écart type, c'est $|a|$.
- Donne l'unité : l'écart type a l'unité de X, la variance son carré.
- Garde les fractions exactes dans les calculs intermédiaires pour éviter d'accumuler les arrondis.
- Pour une simulation, distingue la taille n d'un échantillon et le nombre N d'échantillons simulés.

Vers le PASS

En PASS, les variables aléatoires sont le langage de toute la biostatistique. La loi de Bernoulli devient la loi binomiale (nombre de succès sur n épreuves indépendantes), puis viennent la loi de Poisson et la loi normale, avec leurs espérances et variances. La propriété $V(aX + b) = a^2V(X)$ sert dans les changements d'unité et dans la propagation des incertitudes ; la variable centrée réduite est l'outil des tables de la loi normale. Surtout, le phénomène observé ici par simulation, l'intervalle $\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n}$ qui contient environ 95 % des moyennes d'échantillon, est le point de départ des **intervalles de confiance** et des **tests statistiques** qui servent à lire un essai clinique. Les QCM jouent souvent sur la confusion entre écart type et variance, et sur l'oubli du carré dans $V(aX)$.

Suite en PASS : Variables aléatoires et lois usuelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. La loi d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau : valeurs -2 ; 0 ; 1 ; 3 avec les probabilités respectives 0,1 ; 0,3 ; a ; 0,2.
a) Déterminer a. b) Calculer $P(X \geq 1)$ et $P(X < 1)$. c) Calculer $E(X)$.
2. X prend les valeurs 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,2 ; 0,5 et 0,3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

3. Une variable X vérifie $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de : a) $Y = 3X - 2$; b) $Z = -X + 10$; c) $W = (X - 5)/2$.
4. On lance un dé équilibré ; X vaut 1 si on obtient 6 et 0 sinon. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
5. On lance un dé équilibré ; X est le numéro obtenu. Calculer $E(X)$, $V(X)$ (valeur exacte) et $\sigma(X)$ (au centième).

Niveau 2 : type bac

6. Pour participer à un jeu, on paie m euros. On lance alors deux pièces équilibrées de façon indépendante. On reçoit 5 € si on obtient deux « pile », 1 € si on obtient un seul « pile » et rien sinon. On note G le gain algébrique (somme reçue moins m).
 - a) Pour $m = 2$, déterminer la loi de G et calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ? b) Pour quelle valeur de m le jeu est-il équitable ? c) Pour $m = 2$, calculer $\sigma(G)$ au centième.
7. Une urne contient 5 jetons : 2 portent le nombre 10 et 3 portent le nombre 0. On tire successivement et sans remise deux jetons ; X est la somme des deux nombres.
 - a) Déterminer la loi de X . b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
8. Un assureur propose un contrat annuel à 150 €. Pour un assuré, la probabilité d'un petit sinistre coûtant 1 000 € est 0,05, celle d'un gros sinistre coûtant 10 000 € est 0,005, et sinon il n'y a aucun sinistre (au plus un sinistre par an). On note C le coût annuel pour l'assureur et $G = 150 - C$ son gain.
 - a) Déterminer la loi de G . b) Calculer $E(C)$, puis $E(G)$. c) Calculer $\sigma(C)$ et en déduire $\sigma(G)$. d) Quel prix minimal du contrat assure à l'assureur un gain moyen d'au moins 40 € par assuré ?
9. Une variable X prend les valeurs 0, 1 et 2, avec $P(X = 0) = a$, $P(X = 1) = 2a$ et $P(X = 2) = b$. On sait que $E(X) = 1,2$.
 - a) Écrire deux équations vérifiées par a et b , puis les résoudre. b) Calculer $V(X)$.

Niveau 3 : vers le PASS

10. Dans une grande population, la proportion de personnes porteuses d'un certain caractère est $p = 0,3$. On prélève au hasard un échantillon de 100 personnes (assimilé à 100 tirages indépendants) et on calcule la fréquence f des porteurs.
 - a) Quelle variable de Bernoulli X modélise une personne tirée ? Donner $E(X)$ et $\sigma(X)$ (au millième). b) Calculer $2\sigma/\sqrt{n}$ pour $n = 100$ et donner l'intervalle dans lequel on s'attend à trouver f dans environ 95 % des échantillons. c) Un échantillon donne $f = 0,41$. Est-ce surprenant ? Sur 200 échantillons simulés, combien environ devraient donner une fréquence hors de l'intervalle ? d) Quelle taille d'échantillon faudrait-il pour que $2\sigma/\sqrt{n}$ soit au plus égal à 0,03 ?
11. Soit X une variable prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$, d'espérance μ .
 - a) Démontrer que $V(X) = E(X^2) - \mu^2$. b) Démontrer que, pour tous réels a et b , $V(aX + b) = a^2V(X)$. c) En déduire que si $\sigma(X) \neq 0$, la variable $Z = (X - \mu)/\sigma(X)$ a pour espérance 0 et pour écart type 1.
12. La note X d'une épreuve a pour espérance 11 et pour écart type 4.
 - a) On pose $Y = 0,75X + 5$. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. b) Déterminer les réels $a > 0$ et b tels que la variable $aX + b$ ait pour espérance 12 et pour écart type 2. c) Une note de 15 correspond à quelle valeur de la variable centrée réduite de X ? Et à quelle note après la transformation de la question b) ?

13. Pour dépister une infection rare, on mélange les prélèvements de 5 personnes et on teste le mélange. Si le test du mélange est négatif, les 5 personnes sont déclarées non infectées (1 seul test). S'il est positif, on teste ensuite chacune des 5 personnes (6 tests au total). Chaque personne est infectée avec la probabilité p , indépendamment des autres, et le test est supposé parfait. On note X le nombre de tests réalisés pour un groupe.

a) Montrer que $P(X = 1) = (1 - p)^5$ et donner la loi de X . b) Pour $p = 0,02$, calculer $E(X)$ au millièm, puis le nombre moyen de tests par personne. Comparer avec un test individuel. c) Calculer $\sigma(X)$ au centièm pour $p = 0,02$. d) Reprendre b) avec $p = 0,2$. Que peut-on conclure sur l'intérêt de la méthode ?

Corrigés

1. a) La somme des probabilités vaut 1 : $0,1 + 0,3 + a + 0,2 = 1$, donc $a = 0,4$.

b) $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0,4 + 0,2 = 0,6$. $P(X < 1) = 1 - 0,6 = 0,4$. c) $E(X) = -2 \times 0,1 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = -0,2 + 0 + 0,4 + 0,6 = 0,8$.

2. $E(X) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 3 \times 0,3 = 0,2 + 1 + 0,9 = 2,1$.

$E(X^2) = 1 \times 0,2 + 4 \times 0,5 + 9 \times 0,3 = 0,2 + 2 + 2,7 = 4,9$. $V(X) = 4,9 - 2,1^2 = 4,9 - 4,41 = 0,49$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,49} = 0,7$.

3. On utilise $E(aX + b) = aE(X) + b$, $V(aX + b) = a^2V(X)$, $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$, avec $\sigma(X) = 2$.

a) $Y = 3X - 2$: $E(Y) = 15 - 2 = 13$; $V(Y) = 9 \times 4 = 36$; $\sigma(Y) = 6$. b) $Z = -X + 10$: $E(Z) = -5 + 10 = 5$; $V(Z) = (-1)^2 \times 4 = 4$; $\sigma(Z) = |-1| \times 2 = 2$. c) $W = (1/2)X - 5/2$: $E(W) = 5/2 - 5/2 = 0$; $V(W) = (1/4) \times 4 = 1$; $\sigma(W) = 1$. W est la variable centrée réduite associée à X .

4. X prend la valeur 1 avec la probabilité $1/6$ et 0 avec la probabilité $5/6$: X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/6$.

$E(X) = 1/6$ et $V(X) = 1/6 \times 5/6 = 5/36$.

5. $E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6 = 3,5$.

$E(X^2) = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 = 91/6$. $V(X) = 91/6 - 49/4 = 182/12 - 147/12 = 35/12$ et $\sigma(X) = \sqrt{(35/12)} \approx 1,71$.

6. On note S la somme reçue. Avec deux pièces équilibrées indépendantes : $P(\text{deux pile}) = 1/4$, $P(\text{un seul pile}) = 1/2$, $P(\text{aucun pile}) = 1/4$.

a) Pour $m = 2$, $G = S - 2$ prend les valeurs 3 (probabilité $1/4$), -1 (probabilité $1/2$) et -2 (probabilité $1/4$). $E(G) = 3/4 - 1/2 - 2/4 = 0,75 - 0,5 - 0,5 = -0,25$ €. Comme $E(G) < 0$, le jeu est défavorable au joueur. b) $E(S) = 5 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 0 \times 1/4 = 1,75$ et $E(G) = E(S) - m = 1,75 - m$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$: $m = 1,75$ €. c) $G = S - 2$, donc $\sigma(G) = \sigma(S)$. $E(S^2) = 25 \times 1/4 + 1 \times 1/2 = 6,75$. $V(S) = 6,75 - 1,75^2 = 6,75 - 3,0625 = 3,6875$. $\sigma(G) = \sqrt{3,6875} \approx 1,92$ €.

7. a) $X = 20$ si les deux jetons portent 10 : $P(X = 20) = 2/5 \times 1/4 = 1/10$.

$X = 0$ si les deux portent 0 : $P(X = 0) = 3/5 \times 2/4 = 3/10$. $X = 10$ sinon : $P(X = 10) = 1 - 1/10 - 3/10 = 6/10$. (Contrôle par l'arbre : $2/5 \times 3/4 + 3/5 \times 2/4 = 6/20 + 6/20 = 6/10$.) b) $E(X) = 0 \times 0,3 + 10 \times 0,6 + 20 \times 0,1 = 8$. $E(X^2) = 100 \times 0,6 + 400 \times 0,1 = 100$. $V(X) = 100 - 64 = 36$ et $\sigma(X) = 6$.

8. a) $G = 150 - C$:

Valeur de G (€)	150	-850	-9 850
Probabilité	0,945	0,05	0,005

Contrôle : $0,945 + 0,05 + 0,005 = 1$. b) $E(C) = 0 \times 0,945 + 1\,000 \times 0,05 + 10\,000 \times 0,005 = 50 + 50 = 100$ €. $E(G) = 150 - E(C) = 50$ € par assuré en moyenne. c) $E(C^2) = 1\,000^2 \times 0,05 + 10\,000^2 \times 0,005 = 50\,000 + 500\,000 = 550\,000$. $V(C) = 550\,000 - 100^2 = 540\,000$ (en €²). $\sigma(C) = \sqrt{540\,000} \approx 734,85$ €. $G = -C + 150$, donc $\sigma(G) = |-1| \times \sigma(C) \approx 734,85$ €. Le gain moyen est faible devant la dispersion : c'est le grand nombre d'assurés qui rend l'activité prévisible. d) Avec un prix q , $E(G) = q - 100$. On veut $q - 100 \geq 40$, soit $q \geq 140$ €.

9. a) Somme des probabilités : $a + 2a + b = 1$, soit $3a + b = 1$.

Espérance : $0 \times a + 1 \times 2a + 2 \times b = 1,2$, soit $2a + 2b = 1,2$, donc $a + b = 0,6$. En soustrayant : $2a = 0,4$, donc $a = 0,2$ et $b = 0,4$. Loi : $P(X = 0) = 0,2$, $P(X = 1) = 0,4$, $P(X = 2) = 0,4$. b) $E(X^2) = 1 \times 0,4 + 4 \times 0,4 = 2$. $V(X) = 2 - 1,2^2 = 2 - 1,44 = 0,56$.

10. a) X vaut 1 si la personne est porteuse (probabilité 0,3) et 0 sinon : X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,3. $E(X) = 0,3$; $V(X) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$; $\sigma(X) = \sqrt{0,21} \approx 0,458$.

b) $2\sigma/\sqrt{n} = 2 \times 0,458/\sqrt{100} \approx 0,0917$, soit environ 0,092. On s'attend à trouver f dans $[0,3 - 0,092 ; 0,3 + 0,092] \approx [0,208 ; 0,392]$ pour environ 95 % des échantillons. c) 0,41 est en dehors de cet intervalle : c'est assez surprenant, ce type d'écart ne se produit que dans environ 5 % des échantillons. Sur 200 échantillons, on attend environ $5\% \times 200 = 10$ échantillons hors de l'intervalle. d) On veut $2 \times \sqrt{0,21}/\sqrt{n} \leq 0,03$, soit $\sqrt{n} \geq 2\sqrt{0,21}/0,03 \approx 30,55$, donc $n \geq 30,55^2 \approx 933,3$. Il faut $n \geq 934$. Remarque : passer d'une demi-largeur 0,092 à 0,03 (environ 3 fois plus petite) demande environ 9 fois plus de personnes, à cause de $\sqrt{n}$.

11. a) $(x - \mu)^2 = x^2 - 2\mu x + \mu^2$. En multipliant par p et en sommant :

$V(X) = \sum p x^2 - 2\mu \sum p x + \mu^2 \sum p = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2$. b) $Y = aX + b$ prend les valeurs $ax + b$ avec les probabilités p , et $E(Y) = \sum p(ax + b) = a\mu + b$. Chaque écart vaut $(ax + b) - (a\mu + b) = a(x - \mu)$. Donc $V(Y) = \sum p a^2(x - \mu)^2 = a^2 \sum p(x - \mu)^2 = a^2 V(X)$. c) $Z = (1/\sigma)X - \mu/\sigma$ avec $\sigma = \sigma(X)$. $E(Z) = \mu/\sigma - \mu/\sigma = 0$ et $\sigma(Z) = (1/\sigma) \times \sigma = 1$.

12. a) $E(Y) = 0,75 \times 11 + 5 = 8,25 + 5 = 13,25$; $\sigma(Y) = 0,75 \times 4 = 3$.

b) $\sigma(aX + b) = a \times 4 = 2$ (car $a > 0$), donc $a = 0,5$. Puis $E(aX + b) = 0,5 \times 11 + b = 12$, donc $b = 12 - 5,5 = 6,5$. c) Variable centrée réduite : $(15 - 11)/4 = 1$ (la note est un écart type au-dessus de la moyenne). Après la transformation b) : $0,5 \times 15 + 6,5 = 14$, qui vaut bien $12 + 1 \times 2$, un écart type au-dessus de la nouvelle moyenne.

13. a) Le test du mélange est négatif si et seulement si aucune des 5 personnes n'est infectée. Par indépendance, la probabilité vaut $(1 - p) \times (1 - p) \times \dots \times (1 - p) = (1 - p)^5$. Donc $P(X = 1) = (1 - p)^5$ et $P(X = 6) = 1 - (1 - p)^5$.

b) Pour $p = 0,02$: $P(X = 1) = 0,98^5 \approx 0,9039$ et $P(X = 6) \approx 0,0961$. $E(X) = 1 \times 0,98^5 + 6 \times (1 - 0,98^5) = 6 - 5 \times 0,98^5 \approx 6 - 4,5196 = 1,480$. Par personne : $1,480/5 \approx 0,296$ test, contre 1 test par personne en individuel : on économise environ 70 % des tests. c) $X = 1 + 5B$, où B vaut 1 si le mélange est positif (Bernoulli de paramètre $q = 1 - 0,98^5 \approx 0,0961$). Donc $V(X) = 25 \times q(1 - q) \approx 25 \times 0,0961 \times 0,9039 \approx 2,171$ et $\sigma(X) \approx 1,47$. d) Pour $p = 0,2$: $0,8^5 = 0,32768$, $E(X) = 6 - 5 \times 0,32768 = 6 - 1,6384 = 4,3616$, soit environ 0,872 test par personne. L'économie n'est plus que d'environ 13 %. La méthode des mélanges est très intéressante quand l'infection est rare, et perd son intérêt quand elle devient fréquente, car le mélange est alors souvent positif.