



Fiche : Variables aléatoires réelles

FICHE • M08 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Une variable aléatoire réelle X est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'univers.
- $\{X = a\}$ désigne l'événement formé des issues dont l'image par X vaut a ; on définit de même $\{X \leq a\}$ ou $\{X > a\}$.
- La loi de probabilité de X donne $P(X = x_i)$ pour chaque valeur x_i , et la somme de ces probabilités vaut 1.
- L'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs de X pondérée par leurs probabilités.
- L'espérance s'interprète comme la valeur moyenne de X sur un très grand nombre de répétitions de l'expérience.
- Un jeu est équitable si l'espérance du gain algébrique est nulle, favorable si elle est positive, défavorable si elle est négative.
- La variance mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance ; elle est positive ou nulle.
- L'écart type est la racine carrée de la variance et s'exprime dans la même unité que X .
- La formule de König-Huygens donne $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- Ajouter une constante décale l'espérance sans changer la dispersion.
- Multiplier X par a multiplie l'espérance par a , la variance par a^2 et l'écart type par la valeur absolue de a .
- La variable centrée réduite $(X - E(X))/\sigma(X)$ a pour espérance 0 et pour écart type 1.
- Une variable de Bernoulli de paramètre p vaut 1 avec la probabilité p et 0 sinon ; son espérance est p et sa variance $p(1 - p)$.
- Un échantillon de taille n est obtenu en répétant n fois l'expérience de façon indépendante ; sa moyenne fluctue d'un échantillon à l'autre.
- Pour n assez grand, environ 95 % des moyennes d'échantillons sont à une distance au plus $2\sigma/\sqrt{n}$ de l'espérance μ .



- Pour diviser par 2 la largeur de l'intervalle de fluctuation, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4.

Formules et définitions à connaître

Grandeur	Formule	Unité	Condition
Loi	$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$	sans unité	toujours
Espérance	$E(X) = \sum p_i x_i$	celle de X	toujours
Variance	$V(X) = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$	carré de celle de X	$\mu = E(X)$
Écart type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$	celle de X	toujours
Affine (espérance)	$E(aX + b) = aE(X) + b$	celle de X	a, b réels
Affine (variance)	$V(aX + b) = a^2 V(X)$	carré de celle de X	a, b réels
Bernoulli	$E(X) = p, V(X) = p(1 - p)$	sans unité	X vaut 0 ou 1
Fluctuation	intervalle $\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n}$	celle de X	n assez grand, environ 95 %

- Écart type d'une transformation affine : $\sigma(aX + b) = (\text{valeur absolue de } a) \times \sigma(X)$.

Pièges à éviter

- Oublier de vérifier que la somme des probabilités vaut 1.



- Oublier de retrancher la mise dans un gain algébrique.
- Confondre $E(X^2)$ et $(E(X))^2$.
- Écrire $V(aX + b) = aV(X) + b$: la constante disparaît et a est élevé au carré.
- Donner un écart type négatif : on prend la valeur absolue de a .
- Confondre la taille n d'un échantillon et le nombre d'échantillons simulés.

Je me teste

1. Que vaut la somme des probabilités d'une loi ? $\rightarrow 1$.
2. Espérance d'un dé équilibré ? $\rightarrow 3,5$.
3. Variance d'un dé équilibré ? $\rightarrow 35/12$, environ 2,92.
4. Formule de König-Huygens ? $\rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
5. $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$: $V(3X - 2)$? $\rightarrow 36$.
6. Même X : $\sigma(-X + 10)$? $\rightarrow 2$.
7. Espérance et variance d'une Bernoulli de paramètre p ? $\rightarrow p$ et $p(1 - p)$.
8. Quand un jeu est-il équitale ? $\rightarrow$ Quand l'espérance du gain algébrique est nulle.
9. Pour $p = 0,5$ et $n = 100$, que vaut $2\sigma/\sqrt{n}$? $\rightarrow 0,1$.
10. Unité de la variance d'un gain en euros ? $\rightarrow$ Des euros au carré.