

Probabilités conditionnelles et indépendance

COURS • M07 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer une probabilité conditionnelle à partir de sa définition, d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre.
- Distinguer $P(A \cap B)$, $P(B | A)$ et $P(A | B)$, et identifier dans un énoncé laquelle est donnée ou demandée.
- Construire un arbre pondéré à partir d'un énoncé et le compléter avec les règles de somme.
- Calculer la probabilité d'un chemin par la formule des probabilités composées.
- Reconnaître une partition de l'univers et appliquer la formule des probabilités totales.
- Inverser un conditionnement : calculer $P(A | B)$ quand l'énoncé donne $P(B | A)$.
- Démontrer que deux événements sont indépendants, ou qu'ils ne le sont pas.
- Utiliser l'indépendance de A et B pour obtenir celle de $\bar{A}$ et B .
- Modéliser la succession de deux épreuves indépendantes et calculer la probabilité d'une issue par un produit.

Cours

1. Rappels : événements et probabilités

Une expérience aléatoire a un ensemble d'issues possibles, l'**univers** Ω . Un **événement** est une partie de Ω . Pour deux événements A et B :

- $A \cap B$ (« A et B ») est réalisé quand les deux le sont ;
- $A \cup B$ (« A ou B ») est réalisé quand au moins l'un des deux l'est ;
- $\bar{A}$, l'événement **contraire** de A (« non A »), est réalisé quand A ne l'est pas ;

- A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$: ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Une loi de probabilité P associe à chaque événement un nombre de $[0 ; 1]$, avec $P(\Omega) = 1$, et vérifie :

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles.

En situation d'**équiprobabilité** (toutes les issues ont la même probabilité), $P(A) = (\text{nombre d'issues de } A) / (\text{nombre total d'issues})$.

2. Probabilité conditionnelle

Une information modifie les probabilités. Si l'on sait qu'une carte tirée dans un jeu de 32 cartes est rouge, la probabilité que ce soit un cœur n'est plus $1/4$ mais $1/2$: on ne raisonne plus sur les 32 cartes, mais sur les 16 rouges. L'univers est « restreint » à l'événement connu.

Définition. Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité de B sachant A** est le nombre

$$P(B | A) = P(A \cap B) / P(A).$$

Dans les sujets de lycée, ce nombre est aussi noté P avec A en indice, devant (B) ; les deux notations désignent la même chose. On lit toujours « probabilité de B sachant A ». L'événement **après** la barre est celui qu'on **sait réalisé**.

Pourquoi cette formule ? En situation d'équiprobabilité, savoir que A est réalisé revient à ne garder que les issues de A. Parmi elles, celles qui réalisent B sont celles de $A \cap B$. Donc $P(B | A) = \text{card}(A \cap B) / \text{card}(A)$; en divisant numérateur et dénominateur par $\text{card}(\Omega)$, on retrouve $P(A \cap B) / P(A)$. La définition générale prolonge ce cas.

Propriétés. Pour A fixé (avec $P(A) \neq 0$), l'application $B \mapsto P(B | A)$ est une loi de probabilité. En particulier :

- $0 \leq P(B | A) \leq 1$;
- $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$;
- $P(A | A) = 1$.

Attention : en général $P(B | A) \neq P(A | B)$. La probabilité qu'une personne ayant de la fièvre ait la grippe n'est pas la probabilité qu'une personne grippée ait de la fièvre. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Formule des probabilités composées. Si $P(A) \neq 0$: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B | A)$.

C'est la formule qu'on utilise le plus : elle donne la probabilité que **deux** événements se réalisent, en enchaînant « A d'abord, puis B sachant A ».

Avec un tableau croisé d'effectifs. Quand les données sont des effectifs, une probabilité conditionnelle est une proportion **dans une ligne ou une colonne** : $P(B | A) = (\text{effectif de } A \cap B) / (\text{effectif total de } A)$. C'est souvent la lecture la plus sûre.

3. Arbres pondérés

Un **arbre pondéré** représente une expérience en plusieurs étapes. Chaque branche porte une probabilité :

- les branches issues de la **racine** portent des probabilités simples, $P(A)$ et $P(\bar{A})$;
- les branches de **second niveau** portent des probabilités **conditionnelles** : la branche qui va de A vers B porte $P(B | A)$.

Lire un arbre pondéré

1. Racine • 2. Premier niveau : $P(A)$ et $P(\bar{A})$ • 3. Second niveau : $P(B | A)$, $P(\bar{B} | A)$, $P(B | \bar{A})$, $P(\bar{B} | \bar{A})$ • 4. Chemin : produit des probabilités • 5. Événement : somme des chemins

Les règles de calcul :

- **Règle des nœuds** : la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1. Ainsi $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$.
- **Règle des chemins** : la probabilité d'un chemin (une suite de branches) est le **produit** des probabilités rencontrées. Le chemin A puis B a pour probabilité $P(A) \times P(B | A) = P(A \cap B)$.
- **Règle des événements** : la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.

Les quatre extrémités d'un arbre à deux niveaux correspondent aux événements $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, dont les probabilités ont pour somme 1. C'est un contrôle utile.

Construire l'arbre. On repère dans l'énoncé quelle information est donnée « sans condition » (elle va au premier niveau) et laquelle est donnée « parmi » ou « sachant » (elle va au second niveau). Une phrase du type « 3 % des pièces de la machine A sont défectueuses » se traduit par $P(D | A) = 0,03$, pas par $P(A \cap D) = 0,03$.

4. Formule des probabilités totales

Définition. Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$, tous de probabilité non nulle, forment une **partition** de l'univers Ω s'ils sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est Ω . Autrement dit, chaque issue appartient à **un et un seul** des A_i .

L'exemple le plus courant est la partition $\{A ; \bar{A}\}$. Une population répartie en trois groupes A, B, C sans recouvrement en est un autre.

Formule des probabilités totales. Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de Ω , alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$= P(A_1) \times P(B | A_1) + P(A_2) \times P(B | A_2) + \dots + P(A_n) \times P(B | A_n).$$

Justification. Les événements $A_1 \cap B, \dots, A_n \cap B$ sont deux à deux incompatibles (car les A_i le sont), et leur réunion est B (car toute issue de B est dans exactement un A_i). Les probabilités s'additionnent, puis on applique la formule des probabilités composées à chaque terme.

Sur un arbre, cette formule n'est rien d'autre que la règle des événements : on additionne tous les chemins qui aboutissent à B. Avec la partition $\{A ; \bar{A}\}$:

$$P(B) = P(A) \times P(B | A) + P(\bar{A}) \times P(B | \bar{A})$$

Inverser le conditionnement. L'énoncé donne souvent $P(B | A)$ (par exemple la probabilité qu'un test soit positif chez un malade) et demande $P(A | B)$ (la probabilité d'être malade quand le test est positif). On revient à la définition :

$$P(A | B) = P(A \cap B) / P(B) = P(A) \times P(B | A) / P(B),$$

où $P(B)$ se calcule par la formule des probabilités totales.

Inverser un conditionnement

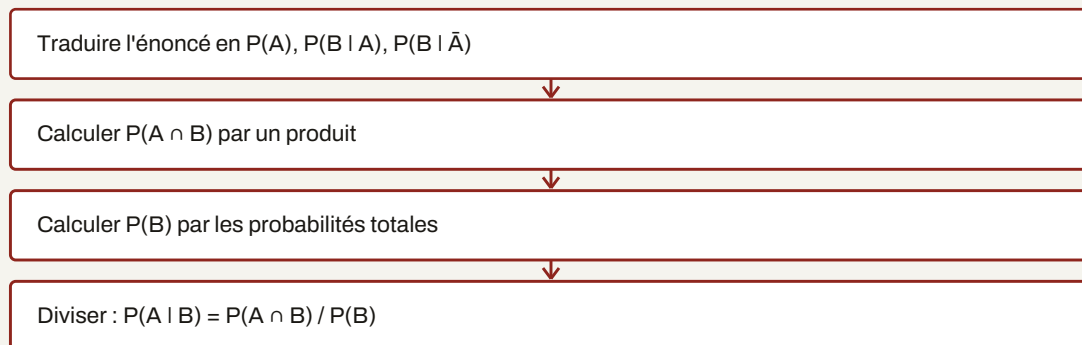


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

5. Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(B | A) = P(B)$.

En effet, si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ équivaut, en divisant par $P(A)$, à $P(A \cap B)/P(A) = P(B)$, c'est-à-dire $P(B | A) = P(B)$. C'est le sens intuitif : savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

Démontrer l'indépendance. On calcule séparément $P(A \cap B)$ et le produit $P(A) \times P(B)$, puis on compare. Égalité : indépendance. Différence, même petite : dépendance (dans le cadre du modèle choisi).

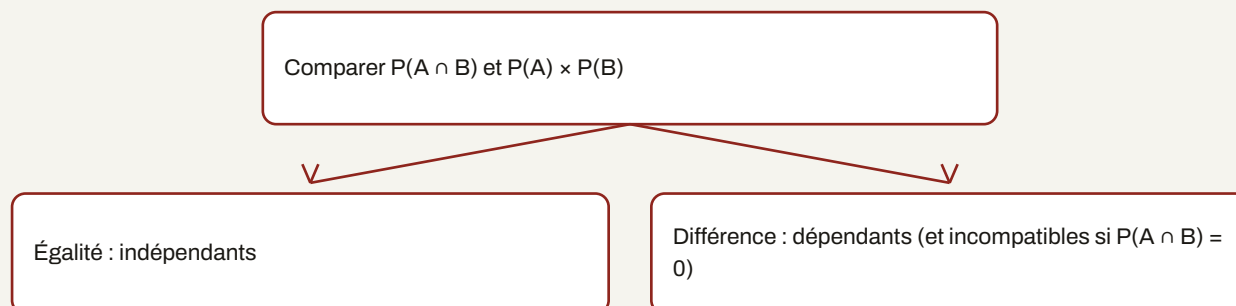
Propriété. Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants (et de même A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$).

Démonstration. $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B, donc $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \times (1 - P(A)) = P(\bar{A}) \times P(B)$. On applique ensuite le même raisonnement en échangeant les rôles pour obtenir les autres couples.

Indépendant n'est pas incompatible. Ce sont deux notions sans rapport, et même presque opposées : si A et B sont incompatibles avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = 0$ alors que $P(A) \times P(B) > 0$. Ils ne sont donc **pas** indépendants : savoir que A est réalisé apprend que B ne l'est pas.



A et B ont des probabilités non nulles



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Sur un arbre, A et B sont indépendants si et seulement si $P(B | A) = P(B | \bar{A})$ (avec $0 < P(A) < 1$) : les branches menant à B portent la même probabilité quel que soit le premier niveau.

6. Succession de deux épreuves indépendantes

On enchaîne deux expériences aléatoires dont les résultats ne s'influencent pas : lancer un dé puis lancer une pièce, tirer une boule **avec remise** puis en tirer une autre, interroger deux personnes choisies indépendamment dans une grande population.

L'univers de l'expérience globale est l'ensemble des **couples** $(x ; y)$, où x est une issue de la première épreuve et y une issue de la seconde. On dit que c'est le **produit** des deux univers.

Propriété (modélisation). Pour une succession de deux épreuves indépendantes, la probabilité du couple $(x ; y)$ est le produit des probabilités : $P((x ; y)) = P_1(x) \times P_2(y)$.

Sur l'arbre correspondant, les probabilités du second niveau sont les mêmes sur toutes les branches, quelle que soit l'issue de la première épreuve. On peut aussi présenter l'univers dans un **tableau à double entrée** quand les issues sont peu nombreuses.

Avec ou sans remise. Un tirage avec remise remet l'urne dans son état initial : les deux tirages sont indépendants. Sans remise, la composition de l'urne change après le premier tirage : la probabilité au second tirage **dépend** du premier, et il faut un arbre avec des probabilités conditionnelles différentes selon la branche.

Épreuve de Bernoulli. Une épreuve à deux issues, « succès » de probabilité p et « échec » de probabilité $1 - p$, est une épreuve de Bernoulli. Répéter deux fois de manière indépendante une telle épreuve donne : $P(\text{deux succès}) = p^2$, $P(\text{exactement un succès}) = 2p(1 - p)$, $P(\text{aucun succès}) = (1 - p)^2$. La somme vaut bien $p^2 + 2p(1 - p) + (1 - p)^2 = (p + 1 - p)^2 = 1$.

Exemples résolus

Exemple 1 : test de dépistage

Énoncé. Dans une population, 2 % des personnes sont porteuses d'une maladie. Un test est positif chez 95 % des porteurs et chez 3 % des non-porteurs. On choisit une personne au hasard. On note M : « la personne est porteuse » et T : « le test est positif ». a) Construire l'arbre pondéré. b) Calculer $P(T)$. c) Le test est positif : quelle est la probabilité que la personne soit porteuse ?

Résolution. a) Premier niveau : $P(M) = 0,02$ et $P(\bar{M}) = 0,98$. Second niveau : $P(T | M) = 0,95$, $P(T | \bar{M}) = 0,03$, $P(\bar{T} | M) = 0,05$, $P(\bar{T} | \bar{M}) = 0,97$. b) M et $\bar{M}$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M) \times P(T | M) + P(\bar{M}) \times P(T | \bar{M}) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,03 = 0,019 + 0,0294 = 0,0484$. c) $P(M | T) = P(M \cap T) / P(T) = 0,019 / 0,0484 \approx 0,393$. Interprétation : moins de 40 % des tests positifs correspondent à un porteur, parce que la maladie est rare et que les faux positifs, issus d'un groupe très nombreux, sont plus fréquents que les vrais positifs.

Exemple 2 : tableau croisé et indépendance

Énoncé. Dans un lycée de 500 élèves, 280 sont des filles. 150 filles et 90 garçons suivent la spécialité SVT. On choisit un élève au hasard ; F : « c'est une fille », S : « il suit SVT ». a) Calculer $P(S)$, $P(S | F)$ et $P(F | S)$. b) F et S sont-ils indépendants ?

Résolution. On complète le tableau : 220 garçons ; 240 élèves suivent SVT ; 130 filles et 130 garçons ne la suivent pas.

	S	S^c	Total
F	150	130	280
F^c	90	130	220
Total	240	260	500

a) $P(S) = 240/500 = 0,48$. $P(S | F) = 150/280 = 15/28 \approx 0,536$ (on reste dans la ligne des filles). $P(F | S) = 150/240 = 0,625$ (on reste dans la colonne SVT). b) $P(F \cap S) = 150/500 = 0,3$ et $P(F) \times P(S) = 0,56 \times 0,48 = 0,2688$. Comme $0,3 \neq 0,2688$, F et S ne sont pas indépendants. On le voit aussi avec $P(S | F) \approx 0,536 \neq P(S) = 0,48$.

Exemple 3 : deux épreuves indépendantes

Énoncé. On lance un dé équilibré à six faces, puis on tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 2 vertes. On note A : « le dé donne un nombre pair » et R : « la boule est rouge ». a) Calculer $P(A \cap R)$. b) Calculer la probabilité qu'un seul des deux événements A et R se réalise.

Résolution. Les deux épreuves sont indépendantes : $P(A) = 3/6 = 1/2$ et $P(R) = 3/5$, quelle que soit l'issue du dé. a) $P(A \cap R) = P(A) \times P(R) = 1/2 \times 3/5 = 3/10$. b) « Un seul » se réalise par deux chemins incompatibles : $A \cap \bar{R}$ ou $\bar{A} \cap R$. $P(A \cap \bar{R}) = 1/2 \times 2/5 = 1/5$ et $P(\bar{A} \cap R) = 1/2 \times 3/5 = 3/10$. La probabilité cherchée est $1/5 + 3/10 = 2/10 + 3/10 = 1/2$.

Méthodes et pièges

- Avant tout calcul, traduis chaque donnée de l'énoncé en notation : « parmi les A, x % sont B » donne $P(B | A)$, « x % sont A et B » donne $P(A \cap B)$.
- Ne confonds jamais $P(B | A)$ et $P(A | B)$: l'événement connu est celui écrit après la barre.
- Dans un arbre, le second niveau porte des probabilités conditionnelles ; vérifie que chaque nœud a des branches de somme 1.
- Pour calculer $P(B)$ quand B dépend d'un premier niveau, pense immédiatement à la formule des probabilités totales et additionne tous les chemins qui mènent à B.
- Pour un « sachant » inversé par rapport à l'arbre, reviens à la définition : $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$.
- Pour démontrer l'indépendance, calcule $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$ séparément et compare ; une intuition ne suffit pas.
- Ne confonds pas incompatibles ($P(A \cap B) = 0$) et indépendants ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$).
- Un tirage sans remise rend les tirages dépendants : les probabilités du second niveau changent selon la branche.
- Garde des valeurs exactes (fractions) le plus longtemps possible et arrondis seulement le résultat final.

Vers le PASS

En PASS, ce chapitre est au cœur de la biostatistique et de l'épidémiologie. La sensibilité d'un test est $P(T | M)$, sa spécificité $P(\bar{T} | \bar{M})$; la valeur prédictive positive $P(M | T)$ se calcule exactement comme dans l'exemple 1, et c'est le **théorème de Bayes** qui généralise cette inversion du conditionnement. On montre en PASS que la valeur prédictive dépend fortement de la prévalence, ce qui explique pourquoi un test très performant peut produire beaucoup de faux positifs dans une population où la maladie est rare. L'indépendance sert aussi en génétique (transmission de deux gènes indépendants) et pour construire les lois de probabilité discrètes. Les QCM testent sans relâche la confusion $P(A | B)$ et $P(B | A)$, et la confusion indépendance et incompatibilité.

Suite en PASS : Conditionnement, arbres et théorème de Bayes

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. On donne $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,1$. Calculer $P(B | A)$, $P(A | B)$ et $P(A \cup B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. On donne $P(A) = 0,3$, $P(B | A) = 0,6$ et $P(B | \bar{A}) = 0,2$.
a) Construire l'arbre pondéré complet. b) Calculer $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$ et $P(B)$. c) Calculer $P(A | B)$.
3. Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules. On note R_1 : « la première est rouge » et R_2 : « la seconde est rouge ».
a) Donner $P(R_1)$ et $P(R_2 | R_1)$. b) Calculer $P(R_1 \cap R_2)$. c) Calculer $P(R_2)$.
4. A et B sont deux événements indépendants avec $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,6$. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

5. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes (4 couleurs de 8 cartes, dont un roi par couleur). On note C : « la carte est un cœur » et K : « la carte est un roi ». Les événements C et K sont-ils indépendants ? Donner $P(K | C)$.

Niveau 2 : type bac

6. Un laboratoire analyse des échantillons venant de trois sites : 50 % viennent du site A, 30 % du site B et 20 % du site C. La proportion d'échantillons contaminés est de 2 % pour A, 4 % pour B et 5 % pour C. On choisit un échantillon au hasard ; on note K : « l'échantillon est contaminé ».
- a) Construire un arbre pondéré. b) Calculer $P(K)$. c) Un échantillon est contaminé. Quelle est la probabilité qu'il vienne du site A ? d) Un échantillon n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité qu'il vienne du site C ? (arrondir au millièème)
7. Dans une enquête portant sur 1 000 personnes, 600 sont vaccinées contre la grippe. Pendant l'hiver, 30 personnes vaccinées et 120 personnes non vaccinées ont eu la grippe. On choisit une personne au hasard ; V : « elle est vaccinée », G : « elle a eu la grippe ».
- a) Dresser le tableau croisé des effectifs. b) Calculer $P(G)$, $P(G | V)$ et $P(G | \bar{V})$. c) Calculer $P(V | G)$ et interpréter. d) Les événements V et G sont-ils indépendants ?
8. On lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité 0,6, puis un dé équilibré à six faces. Les deux lancers sont indépendants.
- a) Calculer la probabilité d'obtenir pile et 6. b) Calculer la probabilité d'obtenir face et un nombre supérieur ou égal à 5. c) Calculer la probabilité d'obtenir pile ou 6.
9. On donne $P(A) = 0,4$, $P(B | A) = 0,7$ et $P(B) = 0,52$.
- a) Calculer $P(A \cap B)$, puis $P(\bar{A} \cap B)$. b) En déduire $P(B | \bar{A})$. c) Calculer $P(A | B)$, valeur exacte puis arrondie au millièème. d) On garde $P(A) = 0,4$ et $P(B | A) = 0,7$, mais on note $x = P(B | \bar{A})$. Pour quelle valeur de x les événements A et B sont-ils indépendants ?

Niveau 3 : vers le PASS

10. Un test a une sensibilité de 0,9 ($P(T | M) = 0,9$) et une spécificité de 0,95 ($P(\bar{T} | \bar{M}) = 0,95$). On note $p = P(M)$ la prévalence, avec $0 < p < 1$.
- a) Exprimer $P(M | T)$ en fonction de p . b) Calculer $P(M | T)$ pour $p = 0,01$ et pour $p = 0,2$. c) À partir de quelle prévalence la probabilité d'être malade sachant le test positif dépasse-t-elle 0,5 ?
11. a) Démontrer que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants. b) Démontrer que deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants. c) Un événement A de probabilité 0,5 peut-il être indépendant de lui-même ? Pour quelles valeurs de $P(A)$ un événement est-il indépendant de lui-même ?
12. Pour un gène à deux allèles A (dominant) et a (récessif), deux parents hétérozygotes Aa ont des enfants. Chaque enfant reçoit au hasard et de façon indépendante un allèle de chaque parent, chacun avec la probabilité $1/2$, et les enfants sont indépendants entre eux.
- a) Calculer la probabilité qu'un enfant soit aa , puis qu'il soit Aa . b) Les parents ont deux enfants. Calculer la probabilité qu'au moins l'un des deux soit aa . c) Un enfant présente le phénotype dominant (il n'est pas aa). Quelle est la probabilité qu'il soit hétérozygote ? d) Cet enfant, de phénotype dominant, a plus tard un enfant avec une personne aa . Calculer la probabilité que cet enfant soit aa .

13. On dispose de deux urnes : U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire, U_2 contient 1 blanche et 3 noires. On lance une pièce équilibrée pour choisir l'urne, puis on tire une boule. On note B_1 : « la boule tirée est blanche ».

a) Calculer $P(B_1)$. b) La boule est blanche : quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ? c) On remet la boule dans la même urne et on tire à nouveau dans cette urne. On note B_2 : « la seconde boule est blanche ». Calculer $P(B_1 \cap B_2)$, puis $P(B_2 | B_1)$. d) Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? Expliquer pourquoi, alors que le tirage se fait avec remise.

Corrigés

1. $P(B | A) = P(A \cap B)/P(A) = 0,1/0,4 = 0,25$.

$P(A | B) = P(A \cap B)/P(B) = 0,1/0,5 = 0,2$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,1 = 0,8$. $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 \neq 0,1 = P(A \cap B)$: **A et B ne sont pas indépendants**.

2. a) Premier niveau : $P(A) = 0,3$ et $P(\bar{A}) = 0,7$. Second niveau : $P(B | A) = 0,6$ et $P(\bar{B} | A) = 0,4$; $P(B | \bar{A}) = 0,2$ et $P(\bar{B} | \bar{A}) = 0,8$ (règle des nœuds).

b) $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$. $P(\bar{A} \cap B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$. Probabilités totales : $P(B) = 0,18 + 0,14 = 0,32$. c) $P(A | B) = P(A \cap B)/P(B) = 0,18/0,32 = 0,5625$.

3. a) $P(R_1) = 4/10 = 0,4$. Après le tirage d'une rouge, il reste 3 rouges sur 9 boules : $P(R_2 | R_1) = 3/9 = 1/3$.

b) $P(R_1 \cap R_2) = 4/10 \times 3/9 = 12/90 = 2/15 \approx 0,133$. c) Si la première est noire (probabilité $6/10$), il reste 4 rouges sur 9 : $P(R_2 | \bar{R}_1) = 4/9$. Probabilités totales : $P(R_2) = 12/90 + 6/10 \times 4/9 = 12/90 + 24/90 = 36/90 = 0,4$. Remarque : on retrouve la même probabilité qu'au premier tirage, ce qui est logique quand on ne connaît pas le résultat du premier tirage.

4. Par indépendance, $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

$P(A \cup B) = 0,3 + 0,6 - 0,18 = 0,72$. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$. Contrôle : $\bar{A} \cap \bar{B}$ est le contraire de $A \cup B$, et $1 - 0,72 = 0,28$.

5. $P(C) = 8/32 = 1/4$, $P(K) = 4/32 = 1/8$ et $P(C \cap K) = 1/32$ (le roi de cœur).

$P(C) \times P(K) = 1/4 \times 1/8 = 1/32 = P(C \cap K)$: **C et K sont indépendants**. Donc $P(K | C) = P(K) = 1/8$ (un roi parmi les 8 cœurs).

6. a) Premier niveau : $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$, $P(C) = 0,2$. Second niveau : $P(K | A) = 0,02$, $P(K | B) = 0,04$, $P(K | C) = 0,05$, et les compléments $P(\bar{K} | A) = 0,98$, $P(\bar{K} | B) = 0,96$, $P(\bar{K} | C) = 0,95$.

b) A, B, C forment une partition. Probabilités totales : $P(K) = 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,010 + 0,012 + 0,010 = 0,032$. c) $P(A | K) = P(A \cap K)/P(K) = 0,010/0,032 = 0,3125$. d) $P(\bar{K}) = 1 - 0,032 = 0,968$ et $P(C \cap \bar{K}) = 0,2 \times 0,95 = 0,19$. $P(C | \bar{K}) = 0,19/0,968 \approx 0,196$.

7. a) 400 personnes ne sont pas vaccinées. Total grippe : $30 + 120 = 150$.

	G	$\bar{G}$	Total
V	30	570	600
$\bar{V}$	120	280	400
Total	150	850	1 000

b) $P(G) = 150/1\,000 = 0,15$. $P(G \mid V) = 30/600 = 0,05$. $P(G \mid \bar{V}) = 120/400 = 0,3$. c) $P(V \mid G) = 30/150 = 0,2$: parmi les personnes qui ont eu la grippe, 20 % étaient vaccinées. Ce nombre ne mesure pas l'efficacité du vaccin, qui se lit en comparant $P(G \mid V) = 0,05$ et $P(G \mid \bar{V}) = 0,3$. d) $P(G \mid V) = 0,05 \neq P(G) = 0,15$: **V et G ne sont pas indépendants.**

8. Par indépendance, on multiplie les probabilités.

a) $P(\text{pile et } 6) = 0,6 \times 1/6 = 0,1$. b) $P(\text{face}) = 0,4$ et $P(\text{nombre} \geq 5) = 2/6 = 1/3$. $P = 0,4 \times 1/3 = 2/15 \approx 0,133$. c) $P(\text{pile ou } 6) = P(\text{pile}) + P(6) - P(\text{pile et } 6) = 3/5 + 1/6 - 1/10 = 18/30 + 5/30 - 3/30 = 20/30 = 2/3$. Autre méthode : le contraire est « face et pas 6 », de probabilité $0,4 \times 5/6 = 1/3$, d'où $1 - 1/3 = 2/3$.

9. a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

$A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B : $P(\bar{A} \cap B) = 0,52 - 0,28 = 0,24$. b) $P(\bar{A}) = 0,6$ donc $P(B \mid \bar{A}) = 0,24/0,6 = 0,4$. c) $P(A \mid B) = 0,28/0,52 = 7/13 \approx 0,538$. d) $P(B) = 0,4 \times 0,7 + 0,6 \times x = 0,28 + 0,6x$. Comme $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(B \mid A) = P(B)$, soit $0,7 = 0,28 + 0,6x$, d'où $0,6x = 0,42$ et $x = 0,7$. On retrouve que l'indépendance équivaut à $P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A})$.

10. a) $P(M \cap T) = 0,9p$ et $P(\bar{M} \cap T) = (1 - p) \times (1 - 0,95) = 0,05(1 - p)$. Probabilités totales : $P(T) = 0,9p + 0,05 - 0,05p = 0,85p + 0,05$.

$P(M \mid T) = 0,9p / (0,85p + 0,05)$. b) $p = 0,01 : 0,009 / (0,0085 + 0,05) = 0,009/0,0585 \approx 0,154$. $p = 0,2 : 0,18 / (0,17 + 0,05) = 0,18/0,22 \approx 0,818$. Le même test est donc bien plus fiable, au sens de la valeur prédictive, dans une population où la maladie est fréquente. c) On résout $0,9p / (0,85p + 0,05) > 0,5$. Le dénominateur est positif, donc cela équivaut à $0,9p > 0,425p + 0,025$, soit $0,475p > 0,025$, soit $p > 0,025/0,475 = 1/19$. $p > 1/19 \approx 0,053$, c'est-à-dire une prévalence supérieure à environ 5,3 %.

11. a) L'événement $\bar{A} \cap \bar{B}$ est le contraire de $A \cup B$. En utilisant $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$. **$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.** b) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Si de plus $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $P(A) \times P(B) > 0$. Donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$: **ils ne sont pas indépendants.** c) A est indépendant de lui-même si $P(A \cap A) = P(A)^2$, soit $P(A) = P(A)^2$, c'est-à-dire $P(A)(1 - P(A)) = 0$. Donc **seulement si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$** . Pour $P(A) = 0,5$, on a $0,5 \neq 0,25$: **non**.

12. a) L'enfant est aa s'il reçoit a de chaque parent : $P(aa) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. Il est Aa s'il reçoit A du père et a de la mère, ou l'inverse : $P(Aa) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. (Et $P(AA) = 1/4$.)

b) Le contraire est « aucun enfant n'est aa », de probabilité $(3/4)^2 = 9/16$ par indépendance. Donc $P = 1 - 9/16 = 7/16 \approx 0,438$. c) On note D : « phénotype dominant » ; $P(D) = 1 - 1/4 = 3/4$. L'événement Aa est inclus dans D , donc $P(Aa \cap D) = P(Aa) = 1/2$. $P(Aa \mid D) = (1/2)/(3/4) = 2/3$. d) Sachant D , l'enfant est Aa avec la probabilité $2/3$ et AA avec la probabilité $1/3$. Avec un partenaire aa, le descendant est aa si le parent de phénotype dominant transmet a : probabilité $1/2$ s'il est Aa, 0 s'il est AA. Probabilités totales : $P = 2/3 \times 1/2 + 1/3 \times 0 = 1/3$.

13. a) $P(B_1) = 1/2 \times 3/4 + 1/2 \times 1/4 = 3/8 + 1/8 = 1/2$.

b) $P(U_1 \mid B_1) = P(U_1 \cap B_1)/P(B_1) = (3/8)/(1/2) = 3/4$. c) Dans une urne donnée, les deux tirages avec remise sont indépendants. Avec U_1 : $(3/4)^2 = 9/16$; avec U_2 : $(1/4)^2 = 1/16$. $P(B_1 \cap B_2) = 1/2 \times 9/16 + 1/2 \times 1/16 = 10/32 = 5/16$. $P(B_2 \mid B_1) = (5/16)/(1/2) = 5/8$. d) Par symétrie, $P(B_2) = 1/2$. Or $P(B_2 \mid B_1) = 5/8 \neq 1/2$: **B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.** Le premier tirage renseigne sur l'urne choisie (une boule blanche rend U_1 plus probable), et cette information modifie la probabilité du second tirage. La remise rend les tirages indépendants à urne fixée, mais pas quand l'urne elle-même est inconnue.