

Fiche : Probabilités conditionnelles et indépendance

FICHE • M07 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	2

L'essentiel

- Si $P(A) \neq 0$, la probabilité de B sachant A est $P(B | A) = P(A \cap B) / P(A)$.
- L'événement écrit après la barre est celui que l'on sait réalisé : l'univers est restreint à cet événement.
- En général $P(B | A)$ est différent de $P(A | B)$, et les confondre est l'erreur la plus fréquente.
- Pour A fixé, $P(\cdot | A)$ est une loi de probabilité : en particulier $P(B | A) = 1 - P(\bar{B} | A)$.
- La formule des probabilités composées donne $P(A \cap B) = P(A) \times P(B | A)$.
- Dans un tableau croisé, une probabilité conditionnelle est une proportion calculée dans une seule ligne ou une seule colonne.
- Dans un arbre pondéré, le premier niveau porte des probabilités simples et le second des probabilités conditionnelles.
- La somme des branches issues d'un même nœud vaut 1 ; un chemin a pour probabilité le produit de ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.
- Une partition de l'univers est une famille d'événements deux à deux incompatibles, de probabilités non nulles, dont la réunion est Ω .
- La formule des probabilités totales donne $P(B)$ comme somme des $P(A_i) \times P(B | A_i)$ sur une partition.
- Pour inverser un conditionnement, on calcule $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$, avec $P(B)$ obtenu par les probabilités totales.
- A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P(B | A) = P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.
- Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
- Pour deux épreuves indépendantes successives, la probabilité d'un couple d'issues est le produit des probabilités.

Formules et définitions à connaître

Notion	Formule	Condition
Probabilité conditionnelle	$P(B A) = P(A \cap B) / P(A)$	$P(A) \neq 0$
Événement contraire	$P(\bar{B} A) = 1 - P(B A)$	$P(A) \neq 0$
Probabilités composées	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B A)$	$P(A) \neq 0$
Probabilités totales	$P(B) = P(A) \times P(B A) + P(\bar{A}) \times P(B \bar{A})$	$0 < P(A) < 1$
Inversion	$P(A B) = P(A) \times P(B A) / P(B)$	$P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	toujours
Deux épreuves indépendantes	$P((x ; y)) = P_1(x) \times P_2(y)$	épreuves sans influence mutuelle
Réunion	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	toujours

Pièges à éviter

- Traduire « 3 % des pièces de la machine A sont défectueuses » par $P(A \cap D)$ au lieu de $P(D | A)$.
- Inverser $P(A | B)$ et $P(B | A)$.
- Oublier un chemin dans la formule des probabilités totales.
- Confondre incompatibles et indépendants.
- Croire qu'un tirage sans remise donne des tirages indépendants.
- Conclure à l'indépendance par intuition, sans comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

Je me teste

1. $P(A) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$: $P(B | A) ? \rightarrow 0,25$.
2. Que porte une branche de second niveau d'un arbre ? $\rightarrow$ Une probabilité conditionnelle.
3. $P(A) = 0,3$, $P(B | A) = 0,6$, $P(B | \bar{A}) = 0,2$: $P(B) ? \rightarrow 0,32$.
4. Même situation : $P(A | B) ? \rightarrow 0,5625$.
5. Prévalence 2 %, $P(T | M) = 0,95$, $P(T | \bar{M}) = 0,03$: $P(M | T) ? \rightarrow$ Environ 0,393.
6. A et B indépendants, $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$: $P(A \cup B) ? \rightarrow 0,72$.
7. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont-ils indépendants ? $\rightarrow$ Non.
8. Dans un jeu de 32 cartes, « cœur » et « roi » sont-ils indépendants ? $\rightarrow$ Oui : $1/32 = 1/4 \times 1/8$.
9. Deux tirages sans remise sont-ils indépendants ? $\rightarrow$ Non, la composition de l'urne change.
10. Pile avec probabilité 0,6 puis dé équilibré : $P(\text{pile et } 6) ? \rightarrow 0,1$.