

Produit scalaire et géométrie repérée

COURS • M06 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer un produit scalaire par la formule avec les normes et le cosinus de l'angle.
- Calculer un produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal.
- Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées dans un repère orthonormé.
- Utiliser la symétrie, la bilinéarité et les identités remarquables du produit scalaire.
- Démontrer et caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs ou de deux droites.
- Appliquer la formule d'Al-Kashi pour calculer une longueur ou un angle dans un triangle quelconque.
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (cercle de diamètre $[AB]$).
- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un vecteur normal, et les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Déterminer et reconnaître une équation de cercle, en trouver le centre et le rayon.
- Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, et étudier son intersection avec une droite.

Cours

1. Définition par les normes et l'angle

On travaille dans le plan. La **norme** d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est sa longueur : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = AB$. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x ; y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre réel** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ désigne une mesure de l'angle entre les deux vecteurs. Si l'un des vecteurs est nul, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Quelques remarques essentielles :

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**, pas un vecteur.
- Comme $\cos(-\theta) = \cos \theta$, le sens de l'angle n'a pas d'importance : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Avec des points : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\text{BAC})$, où BAC est l'angle géométrique en A.
- Le **signe** du produit scalaire renseigne sur l'angle : il est positif si l'angle est aigu ($\cos > 0$), nul si l'angle est droit, négatif si l'angle est obtus.

Le **carré scalaire** de $\vec{u}$ est $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$. On le note $\vec{u}^2$. En particulier $\vec{AB}^2 = AB^2$. C'est le lien fondamental entre produit scalaire et longueurs.

Exemple. Si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 2\pi/3$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 \times \cos(2\pi/3) = 6 \times (-1/2) = -3$.

2. Produit scalaire et projeté orthogonal

Définition. Le **projeté orthogonal** d'un point C sur une droite (AB) est le point H de (AB) tel que (CH) soit perpendiculaire à (AB) (si C est sur (AB), $H = C$).

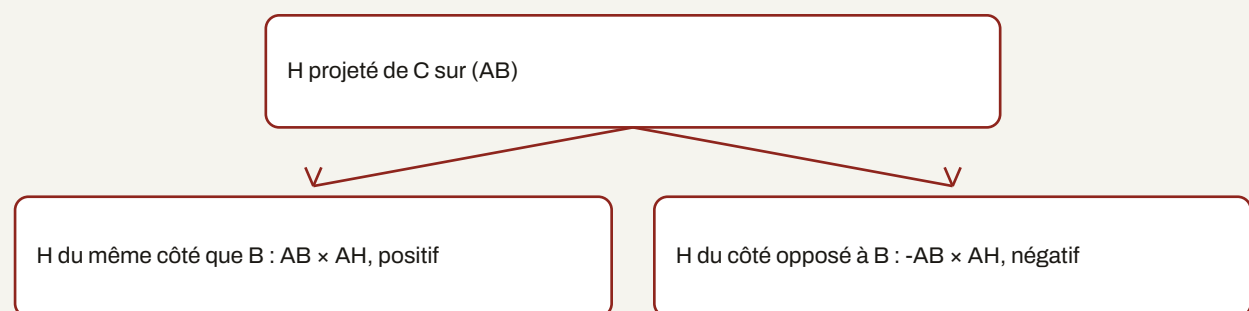
Propriété. Soient A, B, C trois points avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$. Par conséquent :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de même sens ;

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de sens contraires.

Justification. Si l'angle BAC est aigu, H est sur la demi-droite [AB) et, dans le triangle AHC rectangle en H, $\cos(\text{BAC}) = AH/AC$. Donc $AB \times AC \times \cos(\text{BAC}) = AB \times AH$. Si l'angle est obtus, H est de l'autre côté de A et $\cos(\text{BAC}) = -\cos(\text{HAC}) = -AH/AC$, ce qui donne $-AB \times AH$.

Signe de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ par projection



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

Cette méthode est la plus rapide dans les figures géométriques (carré, rectangle, triangle équilatéral) où les projetés sont évidents.

Exemple. ABCD est un carré de côté a. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = a^2$.

3. Expressions à l'aide des normes et des coordonnées

Formules de polarisation. En développant $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ grâce aux propriétés du paragraphe 4, on obtient $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, d'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2) \times (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\text{et de même } \vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2) \times (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Avec des points, la seconde formule donne : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1/2) \times (AB^2 + AC^2 - BC^2)$, puisque $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. On peut donc calculer un produit scalaire **en ne connaissant que les trois longueurs** d'un triangle.

Propriété (coordonnées). Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u} \rightarrow (x ; y)$ et $\vec{v} \rightarrow (x' ; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$. Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2 = 2xx' + 2yy'$. En divisant par 2, on obtient le résultat. Cette démonstration utilise la formule de la norme $\sqrt{x^2 + y^2}$, qui n'est valable que dans un repère orthonormé : c'est la condition de validité de la formule.

Exemple. $\vec{u} \rightarrow (2 ; -3)$ et $\vec{v} \rightarrow (4 ; 1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-3) \times 1 = 5$.

Calcul d'un angle. En combinant la définition et les coordonnées, on obtient $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} / (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$, ce qui permet de déterminer un angle à la calculatrice.

Quatre façons de calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

normes et cosinus de l'angle

projeté orthogonal

normes seules (polarisation)

coordonnées en repère orthonormé

Repères complémentaires, sans séquence causale

4. Propriétés de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Ces règles se vérifient immédiatement avec les coordonnées. Elles permettent de développer comme avec des nombres, d'où les **identités remarquables** :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Attention : il n'existe pas de « simplification » par un vecteur. De $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ on ne peut pas déduire $\vec{v} = \vec{w}$; on en déduit seulement $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$, c'est-à-dire que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v} - \vec{w}$.

On utilise souvent la **relation de Chasles** pour décomposer un vecteur avant de développer : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

5. Orthogonalité

Définition et propriété. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ équivaut à $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire à un angle droit. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Théorème de Pythagore revisité. D'après l'identité remarquable, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Appliqué à $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$, on obtient : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ si et seulement si ABC est rectangle en B. Le produit scalaire contient le théorème et sa réciproque.

Cercle de diamètre [AB]. Soit I le milieu de [AB]. En écrivant $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{MI} - \vec{IA}$, on obtient :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2 = MI^2 - AB^2/4$$

Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ équivaut à $MI = AB/2$: l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre [AB]**. On retrouve que l'angle AMB est droit lorsque M est sur ce cercle (et distinct de A et B).

6. Formule d'Al-Kashi

Théorème (Al-Kashi). Dans un triangle ABC, en notant $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\hat{A}$ l'angle en A :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$\text{et de même } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \hat{C}.$$

Démonstration. $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AB}$. Donc $BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AB^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$.

Cette formule généralise le théorème de Pythagore : si $\hat{A} = 90^\circ$, $\cos \hat{A} = 0$ et on retrouve $a^2 = b^2 + c^2$. Elle sert dans deux situations :

- on connaît deux côtés et l'angle compris : on calcule le troisième côté ;
- on connaît les trois côtés : on calcule un angle, avec $\cos \hat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$.

Calculer un angle avec Al-Kashi

1. Repérer le côté opposé à l'angle cherché
2. Écrire $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
3. Isoler $\cos \hat{A}$
4. Conclure à la calculatrice en degrés ou radians

7. Équations de droites et vecteur normal

Définition. Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .

Propriété. Dans un repère orthonormé, la droite passant par $A(x_0 ; y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (a ; b)$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Elle admet donc une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Réciproquement, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) admet $\vec{n} = (a ; b)$ comme vecteur normal et $\vec{u} = (-b ; a)$ comme vecteur directeur.

Conséquences pratiques :

- Deux droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont **perpendiculaires** si et seulement si $aa' + bb' = 0$.
- La **hauteur** d'un triangle ABC issue de C est la droite passant par C et de vecteur normal $\vec{AB}$.
- La **médiatrice** de $[AB]$ est la droite passant par le milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\vec{AB}$.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Pour trouver le projeté H de $A(x_0 ; y_0)$ sur la droite d d'équation $ax + by + c = 0$: H est sur la droite passant par A et dirigée par $\vec{n} = (a ; b)$. On écrit $H(x_0 + ta ; y_0 + tb)$, on remplace dans l'équation de d pour trouver t , puis on en déduit H . La distance du point A à la droite d est alors AH , la plus courte distance entre A et un point de d .

8. Équation de cercle et parabole

Propriété. Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $\Omega M^2 = r^2$, c'est-à-dire :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

En développant, on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Réciproquement, une telle équation ne représente pas toujours un cercle : on la met sous **forme canonique** en complétant les carrés ($x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, par exemple), on obtient $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, et :

- si $k > 0$, c'est le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon $\sqrt{k}$;
- si $k = 0$, c'est le seul point Ω ;
- si $k < 0$, l'ensemble est vide.

Tangente à un cercle. La tangente au cercle de centre Ω en un point A du cercle est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$: elle a pour vecteur normal $\vec{\Omega A}$.

Parabole. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) dans un repère est une **parabole**. En utilisant la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$:

- son **sommet** est le point $S(\alpha ; \beta)$;
- elle admet pour **axe de symétrie** la droite verticale d'équation $x = \alpha$;
- elle est « tournée vers le haut » si $a > 0$ (S est le point le plus bas) et « vers le bas » si $a < 0$.

Intersection d'une parabole et d'une droite. Pour trouver les points communs à la parabole $y = ax^2 + bx + c$ et à la droite $y = mx + p$, on résout $ax^2 + bx + c = mx + p$, équation du second degré : deux, une ou zéro solution selon le signe du discriminant, donc deux, un ou aucun point d'intersection.

Exemples résolus

Exemple 1 : longueur avec Al-Kashi

Énoncé. Dans un triangle ABC, $AB = 5$, $AC = 4$ et l'angle BAC mesure 60° . Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis la longueur BC.

Résolution. Par définition, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos 60^\circ = 5 \times 4 \times 1/2 = 10$. D'après Al-Kashi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 25 + 16 - 2 \times 10 = 21$. Donc $BC = \sqrt{21} \approx 4,58$ (dans l'unité de longueur de l'énoncé).

Exemple 2 : angle, hauteur et projeté en repère orthonormé

Énoncé. Dans un repère orthonormé, $A(1 ; 2)$, $B(4 ; 3)$ et $C(2 ; 5)$. a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et en déduire une mesure de l'angle BAC au dixième de degré. b) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. c) Déterminer les coordonnées du pied H de cette hauteur.

Résolution. a) $\vec{AB} = (3 ; 1)$ et $\vec{AC} = (1 ; 3)$. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 1 + 1 \times 3 = 6$. $AB = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Donc $\cos(BAC) = 6/(\sqrt{10} \times \sqrt{10}) = 6/10 = 0,6$, et $BAC \approx 53,1^\circ$. b) La hauteur issue de C passe par C et a pour vecteur normal $\vec{AB} = (3 ; 1)$. Elle a une équation de la forme $3x + y + c = 0$. Comme C est dessus : $3 \times 2 + 5 + c = 0$, donc $c = -11$. Équation : $3x + y - 11 = 0$. c) H est sur (AB). Un point de (AB) s'écrit $M(1 + 3t ; 2 + t)$ avec t réel ($A + t \vec{AB}$). On impose qu'il soit sur la hauteur : $3(1 + 3t) + (2 + t) - 11 = 0$, soit $10t - 6 = 0$, donc $t = 0,6$. D'où $H(2,8 ; 2,6)$. Vérification : $\vec{CH} = (0,8 ; -2,4)$ et $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0,8 \times 3 + (-2,4) \times 1 = 0$. Le résultat est cohérent.

Exemple 3 : reconnaître un cercle et tracer une tangente

Énoncé. Soit (C) l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. a) Montrer que (C) est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon. b) Vérifier que $A(5 ; 1)$ appartient à (C) et déterminer une équation de la tangente à (C) en A.

Résolution. a) On complète les carrés : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ et $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$. L'équation devient $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 12 = 0$, soit $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. (C) est le **cercle de centre $\Omega(2 ; -3)$ et de rayon 5**. b) $(5 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 9 + 16 = 25$: **A appartient à (C)**. La tangente en A est perpendiculaire à (ΩA) , donc admet $\vec{\Omega A} = (3 ; 4)$ comme vecteur normal : $3x + 4y + c = 0$. Avec A : $15 + 4 + c = 0$, donc $c = -19$. Équation : $3x + 4y - 19 = 0$.

Méthodes et pièges

- Choisis la bonne formule selon les données : angle connu, utilise les normes et le cosinus ; figure avec angles droits, utilise un projeté ; repère orthonormé, utilise les coordonnées ; trois longueurs, utilise la polarisation.
- Le produit scalaire est un nombre : n'écris jamais de flèche sur le résultat.
- La formule $xx' + yy'$ n'est valable que dans un repère orthonormé.
- Avec un projeté, contrôle le sens : si H et B sont de part et d'autre de A, le produit scalaire est négatif.
- Ne simplifie jamais par un vecteur : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'entraîne pas $\vec{v} = \vec{w}$.
- Dans Al-Kashi, le côté isolé à gauche est celui **opposé** à l'angle utilisé dans le cosinus.

- Pour une équation de droite, ne confonds pas vecteur normal $\vec{n} \rightarrow (a ; b)$ et vecteur directeur $\vec{u} \rightarrow (-b ; a)$.
- Avant de conclure qu'une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est un cercle, mets-la sous forme canonique et vérifie que le second membre est strictement positif.
- Pour prouver qu'un triangle est rectangle, un produit scalaire nul entre deux côtés issus du même sommet suffit, et c'est souvent plus rapide que Pythagore.

Vers le PASS

En PASS, le produit scalaire sert d'abord en physique : le **travail d'une force** est $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ (en joules), ce qui explique qu'une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas. La projection d'une force sur un axe (composante utile d'une traction musculaire, force exercée sur une articulation) est un produit scalaire avec un vecteur unitaire. En biophysique, on retrouve aussi le produit scalaire dans le flux d'un champ et dans l'énergie d'un dipôle placé dans un champ électrique. Les équations de droites et de cercles servent à lire des graphiques et à modéliser des trajectoires. Les QCM testent souvent le signe d'un produit scalaire, l'orthogonalité par les coordonnées et l'usage d'Al-Kashi.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soient $\vec{u} \rightarrow$ et $\vec{v} \rightarrow$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 4$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque l'angle $(\vec{u} \rightarrow, \vec{v} \rightarrow)$ mesure : a) $\pi/3$; b) $3\pi/4$; c) $\pi/2$.
2. Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \rightarrow (2 ; -3)$, $\vec{v} \rightarrow (4 ; 1)$ et $\vec{w} \rightarrow (6 ; 4)$.
a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$. Que peut-on dire de $\vec{u} \rightarrow$ et $\vec{w} \rightarrow$? b) Déterminer le réel m tel que les vecteurs $(m ; 2)$ et $(3 ; -1)$ soient orthogonaux.
3. ABCD est un carré de côté 4 et I est le milieu de [CD]. Calculer, en utilisant des projetés orthogonaux : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$; $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$.
4. Dans un repère orthonormé :
a) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A(2 ; -1) et de vecteur normal $\vec{n} \rightarrow (3 ; 5)$.
b) Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de la droite d'équation $2x - y + 7 = 0$.
5. a) Écrire une équation du cercle de centre $\Omega(-1 ; 3)$ et de rayon 4, puis la développer.
b) Le point B(3 ; 3) appartient-il à ce cercle ?

Niveau 2 : type bac

6. ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$.
a) Calculer $\cos \hat{A}$, puis une mesure de l'angle $\hat{A}$ au dixième de degré. b) En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. c) Calculer la valeur exacte de $\cos \hat{C}$ et en déduire $\hat{C}$. d) Calculer l'aire exacte du triangle ABC.
7. Dans un repère orthonormé, A(-1 ; 1), B(3 ; -1) et C(2 ; 4).
a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) Déterminer une mesure de l'angle BAC au dixième de degré. c) Déterminer une équation de la hauteur issue de C, puis de la hauteur issue de B. d) En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle et vérifier que (AH) est perpendiculaire à (BC).
8. Dans un repère orthonormé :

a) Montrer que l'équation $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ est celle d'un cercle et préciser son centre et son rayon. b) Quel est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$? c) Soient $A(1 ; 2)$ et $B(5 ; -2)$. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ en traduisant $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$, puis préciser son centre et son rayon.

9. On considère la parabole P d'équation $y = -x^2 + 4x - 3$ et la droite D d'équation $y = x - 3$.

a) Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de P . b) Déterminer les points d'intersection de P avec l'axe des abscisses. c) Déterminer les points d'intersection de P et de D .

Niveau 3 : vers le PASS

10. A et B sont deux points tels que $AB = 6$, et I est le milieu de $[AB]$.

a) Démontrer que, pour tout point M , $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - 9$. b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 16$. c) Même question pour $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -9$, puis pour $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -10$.

11. Dans un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $x - 2y + 3 = 0$ et le point $A(4 ; 1)$.

a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d . b) En déduire la distance du point A à la droite d . c) Le cercle de centre A et de rayon 2 coupe-t-il d ? Et le cercle de centre A et de rayon 3 ?

12. Le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne $\vec{AB}$ est $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ (en joules, avec F en newtons et AB en mètres).

a) Une force de 200 N fait un angle de 30° avec un déplacement de 3 m. Calculer W . b) Dans un repère orthonormé (unités : N pour la force, m pour le déplacement), $\vec{F}(150 ; 80)$ et $\vec{AB}(2 ; -1)$. Calculer W . c) Dans la situation b), calculer $\|\vec{F}\|$ et une mesure de l'angle entre $\vec{F}$ et $\vec{AB}$ au dixième de degré.

13. Vrai ou faux ? Justifier.

A. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ avec $\vec{u}$ non nul, alors $\vec{v} = \vec{w}$. B. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. C. Les droites d'équations $2x + 3y - 1 = 0$ et $3x - 2y + 5 = 0$ sont perpendiculaires. D. Dans tout parallélogramme $ABCD$, $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. E. L'équation $x^2 + y^2 = -4$ est celle d'un cercle.

Corrigés

1. On applique $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 12$.

a) $12 \times \cos(\pi/3) = 12 \times 1/2 = 6$. b) $12 \times \cos(3\pi/4) = 12 \times (-\sqrt{2}/2) = -6\sqrt{2} \approx -8,49$. c) $12 \times \cos(\pi/2) = 12 \times 0 = 0$ (vecteurs orthogonaux).

2. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + (-3) \times 1 = 8 - 3 = 5$.

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 12 - 12 = 0$: $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux. b) $(m ; 2) \cdot (3 ; -1) = 3m - 2$. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $3m - 2 = 0$, soit $m = 2/3$.

3. Le côté vaut 4.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$: le projeté de C sur (AB) est B , donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = 16$. $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$: les vecteurs sont orthogonaux (angle droit en A), donc 0. $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$: $\vec{CD} = -\vec{AB}$ (côtés opposés du carré), donc $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -AB^2 = -16$. $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$: le projeté de I sur (AB) est le milieu K de $[AB]$ (car I est le milieu de $[CD]$ et (IK) est parallèle à (AD) , donc perpendiculaire à (AB)). K est du même côté que B , donc $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = AB \times AK = 4 \times 2 = 8$.

4. a) Une équation est de la forme $3x + 5y + c = 0$. A appartient à la droite : $3 \times 2 + 5 \times (-1) + c = 0$, soit $1 + c = 0$, donc $c = -1$. Équation : $3x + 5y - 1 = 0$.
- b) Pour $ax + by + c = 0$, $n \rightarrow (a ; b)$ est normal et $u \rightarrow (-b ; a)$ est directeur. Ici $a = 2$ et $b = -1$: **vecteur normal** $(2 ; -1)$, **vecteur directeur** $(1 ; 2)$. Contrôle : $2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$.
5. a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$. En développant : $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 16 = 0$, soit $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.
- b) $(3 + 1)^2 + (3 - 3)^2 = 16 + 0 = 16$: **oui, B appartient au cercle**.
6. a) Al-Kashi avec le côté opposé à $\hat{A}$, $BC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$, soit $64 = 49 + 25 - 70 \cos \hat{A}$. Donc $70 \cos \hat{A} = 10$ et $\cos \hat{A} = 1/7$. À la calculatrice, $\hat{A} \approx 81,8^\circ$.
- b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A} = 7 \times 5 \times 1/7 = 5$. Contrôle par polarisation : $(1/2)(AB^2 + AC^2 - BC^2) = (1/2)(49 + 25 - 64) = 5$. c) Côté opposé à $\hat{C}$: AB . $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \hat{C}$, soit $49 = 25 + 64 - 80 \cos \hat{C}$. Donc $80 \cos \hat{C} = 40$ et $\cos \hat{C} = 1/2$, d'où $\hat{C} = 60^\circ$. d) La hauteur issue de A a pour longueur $h = AC \times \sin \hat{C}$ (triangle rectangle formé par A, C et le pied de la hauteur, l'angle $\hat{C}$ étant aigu). $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, donc $h = 5\sqrt{3}/2$. Aire = $(1/2) \times BC \times h = (1/2) \times 8 \times 5\sqrt{3}/2 = 10\sqrt{3} \approx 17,32$ (unités d'aire).
7. a) $\overrightarrow{AB} \rightarrow (4 ; -2)$ et $\overrightarrow{AC} \rightarrow (3 ; 3)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 + (-2) \times 3 = 12 - 6 = 6$.
- b) $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $\cos(\widehat{BAC}) = 6 / (2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}) = 6 / (6\sqrt{10}) = 1/\sqrt{10} \approx 0,316$. Donc $\widehat{BAC} \approx 71,6^\circ$. c) Hauteur issue de C : vecteur normal $\overrightarrow{AB} \rightarrow (4 ; -2)$, équation $4x - 2y + c = 0$. Avec $C(2 ; 4) : 8 - 8 + c = 0$, donc $c = 0$. En divisant par 2 : $2x - y = 0$. Hauteur issue de B : vecteur normal $\overrightarrow{AC} \rightarrow (3 ; 3)$, ou $(1 ; 1)$ qui lui est colinéaire. Équation $x + y + c = 0$. Avec $B(3 ; -1) : 3 - 1 + c = 0$, donc $c = -2 : x + y - 2 = 0$. d) L'orthocentre est l'intersection des hauteurs : $y = 2x$ et $x + 2x - 2 = 0$, donc $x = 2/3$ et $y = 4/3$. $H(2/3 ; 4/3)$. Vérification : $\overrightarrow{AH} \rightarrow (2/3 + 1 ; 4/3 - 1) = (5/3 ; 1/3)$ et $\overrightarrow{BC} \rightarrow (-1 ; 5)$. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -5/3 + 5/3 = 0 : (\overrightarrow{AH})$ est bien perpendiculaire à $(\overrightarrow{BC})$, ce qui confirme que les trois hauteurs sont concourantes en H.
8. a) $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$ et $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$. L'équation devient $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 9 - 1 + 1 = 0$, soit $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$. **Cercle de centre $(-3 ; 1)$ et de rayon 3**.
- b) $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ et $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$. On obtient $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1 + 4 - 10 = -5$. Une somme de carrés ne peut pas être négative : **l'ensemble est vide**. c) $\overrightarrow{MA} \rightarrow (1 - x ; 2 - y)$ et $\overrightarrow{MB} \rightarrow (5 - x ; -2 - y)$. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1 - x)(5 - x) + (2 - y)(-2 - y) = x^2 - 6x + 5 + y^2 - 4$. La condition $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ donne $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$, soit $(x - 3)^2 + y^2 = 8$. **Centre $(3 ; 0)$** , qui est bien le milieu de $[AB]$, et **rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$** . Contrôle : $AB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$, dont la moitié vaut $2\sqrt{2}$.
9. a) $a = -1$, $b = 4 : \alpha = -b/(2a) = -4/(-2) = 2$ et $\beta = -4 + 8 - 3 = 1$. **Sommet S(2 ; 1), axe de symétrie $x = 2$** .
Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas : S est son point le plus haut.
- b) $-x^2 + 4x - 3 = 0$. $\Delta = 16 - 12 = 4$, racines $x = (-4 - 2)/(-2) = 3$ et $x = (-4 + 2)/(-2) = 1$. **Points $(1 ; 0)$ et $(3 ; 0)$** , symétriques par rapport à l'axe $x = 2$, ce qui est cohérent. c) $-x^2 + 4x - 3 = x - 3$ équivaut à $-x^2 + 3x = 0$, soit $x(3 - x) = 0 : x = 0$ ou $x = 3$. Les ordonnées s'obtiennent avec D : $0 - 3 = -3$ et $3 - 3 = 0$. **Points $(0 ; -3)$ et $(3 ; 0)$** .



10. a) Par Chasles, $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB} = \vec{MI} - \vec{IA}$ (I milieu de [AB]). Donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2$. Or $IA = AB/2 = 3$, donc $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - 9$.

b) $MI^2 - 9 = 16$ équivaut à $MI^2 = 25$, soit $MI = 5$. **Cercle de centre I et de rayon 5.** c) $MI^2 - 9 = -9$ équivaut à $MI = 0$: **l'ensemble est le seul point I.** $MI^2 - 9 = -10$ équivaut à $MI^2 = -1$, impossible : **l'ensemble est vide.**

11. a) $\vec{n} = (1; -2)$ est normal à d. H est sur la droite passant par A dirigée par $\vec{n}$: $H(4 + t; 1 - 2t)$. On impose $H \in d$: $(4 + t) - 2(1 - 2t) + 3 = 0$, soit $5 + 5t = 0$, donc $t = -1$. **H(3; 3).** Contrôle : $3 - 6 + 3 = 0$.

b) $AH = \sqrt{(3 - 4)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,24$. c) Le cercle de rayon r coupe d si et seulement si la distance de A à d est inférieure ou égale à r. $\sqrt{5} \approx 2,24 > 2$: **le cercle de rayon 2 ne coupe pas d.** $\sqrt{5} < 3$: **le cercle de rayon 3 coupe d en deux points.**

12. a) $W = F \times AB \times \cos 30^\circ = 200 \times 3 \times \sqrt{3}/2 = 300\sqrt{3} \approx 519,6$ J.

b) $W = 150 \times 2 + 80 \times (-1) = 300 - 80 = 220$ J. c) $\|\vec{F}\| = \sqrt{(150^2 + 80^2)} = \sqrt{(22\,500 + 6\,400)} = \sqrt{28\,900} = 170$ N. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(4 + 1)} = \sqrt{5}$ m. $\cos \theta = 220/(170 \times \sqrt{5}) \approx 220/380,1 \approx 0,579$, donc $\theta \approx 54,6^\circ$.

13. A. **Faux.** Contre-exemple : $\vec{u} = (1; 0)$, $\vec{v} = (0; 1)$, $\vec{w} = (0; 2)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{u} \cdot \vec{w}$ mais $\vec{v} \neq \vec{w}$.

B. **Vrai.** $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, donc l'égalité équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. C. **Vrai.** Vecteurs normaux $(2; 3)$ et $(3; -2)$: $2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$, ils sont orthogonaux, donc les droites sont

perpendiculaires. D. **Vrai.** $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Donc $AC^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + AD^2$ et $BD^2 = AD^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + AB^2$. En additionnant : $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$. E. **Faux.** $x^2 + y^2 \geq 0$ pour tous réels x et y : aucun point ne vérifie l'équation, l'ensemble est vide.