



Fiche : Produit scalaire et géométrie repérée

FICHE • M06 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel, pas un vecteur.
- Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; si l'un est nul, le produit scalaire vaut 0.
- Le signe du produit scalaire indique la nature de l'angle : positif si aigu, nul si droit, négatif si obtus.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$, qui vaut $AB \times AH$ ou $-AB \times AH$ selon le sens.
- Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(x ; y) \cdot \vec{v}(x' ; y') = xx' + yy'$.
- Le carré scalaire d'un vecteur est le carré de sa norme : $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2$.
- Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire, ce qui donne des identités remarquables, mais on ne simplifie jamais par un vecteur.
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- La formule d'Al-Kashi généralise Pythagore à tout triangle et permet de calculer un côté ou un angle.
- L'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].
- La droite de vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, et $\vec{u}(-b ; a)$ la dirige.
- Le projeté orthogonal H de A sur une droite se trouve en suivant le vecteur normal depuis A ; AH est la distance de A à la droite.
- Le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ se met sous forme canonique : cercle, point unique ou ensemble vide selon le signe du second membre.
- La tangente à un cercle en A est perpendiculaire au rayon : $\vec{\Omega A}$ en est un vecteur normal.
- La parabole $y = ax^2 + bx + c$ a pour sommet $S(\alpha ; f(\alpha))$ avec $\alpha = -b/(2a)$, et pour axe de symétrie la droite $x = \alpha$.



Formules et définitions à connaître

Situation	Formule	Condition
Normes et angle	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$	vecteurs non nuls
Projeté orthogonal	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \pm AB \times AH$	H projeté de C sur (AB)
Coordonnées	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$	repère orthonormé
Polarisation	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1/2)(\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$	toujours
Trois longueurs	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (1/2)(AB^2 + AC^2 - BC^2)$	toujours
Al-Kashi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$	a côté opposé à $\hat{A}$
Médiane	$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - AB^2/4$	I milieu de [AB]
Droite	$ax + by + c = 0, n \rightarrow (a; b), u \rightarrow (-b; a)$	repère orthonormé
Cercle	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$r > 0$
Parabole	sommet en $x = -b/(2a)$	$a \neq 0$

- Identités : $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Pièges à éviter

- Mettre une flèche sur le résultat d'un produit scalaire.
- Utiliser $xx' + yy'$ dans un repère qui n'est pas orthonormé.
- Oublier le signe moins quand le projeté H est du côté opposé à B par rapport à A.



- Dédurre $\vec{v} \rightarrow = \vec{w} \rightarrow$ de $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow = \vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow$.
- Prendre le mauvais côté dans Al-Kashi : le côté isolé est celui opposé à l'angle.
- Confondre vecteur normal $(a ; b)$ et vecteur directeur $(-b ; a)$ d'une droite.
- Conclure qu'une équation est un cercle sans vérifier que le second membre de la forme canonique est strictement positif.

Je me teste

1. $\|\vec{u} \rightarrow\| = 3, \|\vec{v} \rightarrow\| = 4$, angle $\pi/3$: $\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{v} \rightarrow ? \rightarrow 6$.
2. $\vec{u} \rightarrow(2 ; -3) \cdot \vec{v} \rightarrow(4 ; 1) ? \rightarrow 5$.
3. ABCD carré de côté 4 : $\vec{AB} \rightarrow \cdot \vec{AC} \rightarrow ? \rightarrow 16$.
4. Condition d'orthogonalité de $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ en repère orthonormé ? $\rightarrow xx' + yy' = 0$.
5. Al-Kashi avec $AB = 5, AC = 4, \hat{A} = 60^\circ$: $BC^2 ? \rightarrow 21$.
6. Vecteur normal de la droite $2x - y + 7 = 0 ? \rightarrow (2 ; -1)$.
7. Centre et rayon de $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 ? \rightarrow \Omega(2 ; -3)$, rayon 5.
8. Ensemble des M tels que $\vec{MA} \rightarrow \cdot \vec{MB} \rightarrow = 0 ? \rightarrow$ Le cercle de diamètre $[AB]$.
9. Sommet de la parabole $y = -x^2 + 4x - 3 ? \rightarrow S(2 ; 1)$.
10. Que représente $x^2 + y^2 = -4 ? \rightarrow$ L'ensemble vide.