

Trigonométrie et fonctions cosinus et sinus

COURS • M05 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	7
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Convertir une mesure d'angle des degrés en radians et inversement.
- Placer sur le cercle trigonométrique le point associé à un réel donné, par enroulement de la droite des réels.
- Déterminer la mesure principale d'un réel, dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
- Lire le cosinus et le sinus d'un réel sur le cercle trigonométrique et connaître les valeurs remarquables.
- Utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour calculer un cosinus à partir d'un sinus, ou l'inverse, en tenant compte du signe.
- Exprimer $\cos(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\cos(\pi + x)$, $\cos(\pi/2 - x)$, $\cos(\pi/2 + x)$ et leurs analogues pour le sinus à l'aide de $\cos x$ et $\sin x$.
- Résoudre sur un intervalle donné les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$, et des inéquations simples, à l'aide du cercle.
- Justifier la parité et la périodicité des fonctions cosinus et sinus et en déduire leurs courbes.
- Dresser le tableau de variations des fonctions cosinus et sinus sur une période et tracer leurs courbes représentatives.

Cours

1. Le radian, unité naturelle des angles

On travaille dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I, J)$. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre), appelé aussi sens trigonométrique.

Un cercle de rayon 1 a pour périmètre 2π . Sur ce cercle, la longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle au centre qui l'intercepte : le tour complet, 360° , correspond à une longueur 2π . C'est cette proportionnalité qui fonde une nouvelle unité.

Définition. Un **radian** (symbole rad) est la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon 1, un arc de longueur 1.

Ainsi un tour complet mesure 2π rad, un demi-tour π rad, et la correspondance s'écrit :

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

On en déduit la règle de conversion par proportionnalité : un angle de mesure d en degrés et r en radians vérifie $r = d \times \pi / 180$, et $d = r \times 180 / \pi$. Par exemple $60^\circ = 60\pi/180 = \pi/3$ rad, et $3\pi/4$ rad = $3 \times 180/4 = 135^\circ$. Un radian vaut environ $57,3^\circ$.

Pourquoi préférer le radian au degré ? Parce que sur un cercle de rayon R , un angle de θ radians intercepte un arc de longueur exactement $R \times \theta$, sans coefficient parasite. Cette simplicité rend les formules d'analyse (dérivées, limites, vitesses angulaires) beaucoup plus naturelles. En physique, une vitesse angulaire s'exprime en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ pour cette raison.

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180	360
Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	2π

2. Enroulement de la droite des réels

Imaginons la droite des réels tangente au cercle trigonométrique au point $I(1; 0)$, graduée avec la même unité que le repère, et orientée vers le haut. On « enroule » cette droite sur le cercle : la partie positive dans le sens direct, la partie négative dans le sens indirect. Chaque réel x vient alors se placer sur un unique point M du cercle : on dit que M est le **point image** de x , ou que x est une **mesure** de l'arc orienté de I à M .

Enrouler la droite des réels

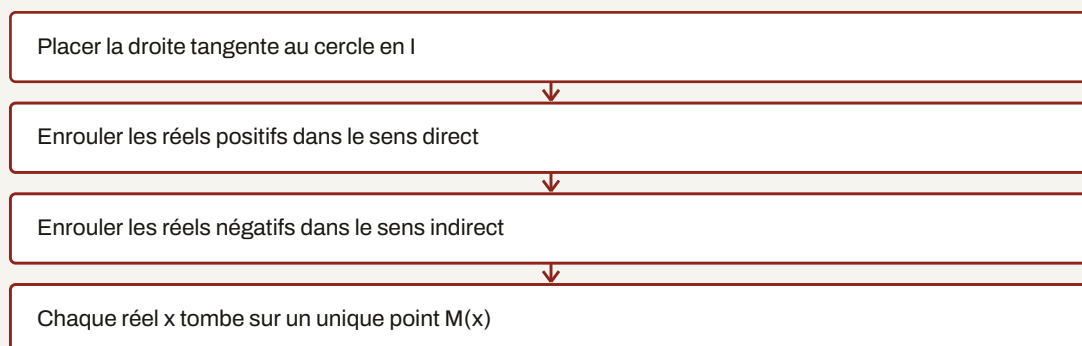


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Le point image de x est celui qu'on atteint en parcourant, depuis I , une longueur $|x|$ sur le cercle, dans le sens direct si $x > 0$ et dans le sens indirect si $x < 0$. Par exemple $\pi/2$ a pour image $J(0; 1)$, π a pour image le point $I'(-1; 0)$, et $-\pi/2$ a pour image $J'(0; -1)$.

Comme le périmètre vaut 2π , avancer de 2π ramène au point de départ. Il en découle une propriété essentielle :

Propriété. Les réels x et $x + 2k\pi$, où k est un entier relatif, ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Réciproquement, deux réels ayant le même point image diffèrent d'un multiple entier de 2π .

Un point du cercle est donc l'image d'une infinité de réels. Parmi eux, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: on l'appelle la **mesure principale**.

Méthode pour trouver la mesure principale d'un réel de la forme $p\pi/q$: on retire ou on ajoute des multiples de 2π (c'est-à-dire $2q\pi/q$) jusqu'à tomber dans $]-\pi ; \pi]$. Pour $17\pi/3$: $17\pi/3 - 6\pi = 17\pi/3 - 18\pi/3 = -\pi/3$, qui est bien dans $]-\pi ; \pi]$. La mesure principale de $17\pi/3$ est $-\pi/3$.

3. Cosinus et sinus d'un réel

Définition. Soit x un réel et M son point image sur le cercle trigonométrique. Le **cosinus** de x , noté $\cos x$, est l'abscisse de M ; le **sinus** de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée de M . Ainsi M a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.

Cette définition prolonge celle du collège. Si x est dans $]0 ; \pi/2[$, on considère le point H , projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H , d'hypoténuse $OM = 1$, et on retrouve $\cos x = OH/OM = OH$ et $\sin x = HM/OM = HM$. La nouvelle définition a l'avantage de donner un sens au cosinus et au sinus de n'importe quel réel, y compris négatif ou supérieur à $\pi/2$.

Conséquences immédiates de la définition :

- Puisque M est sur un cercle de rayon 1, ses coordonnées sont comprises entre -1 et 1 : pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Comme $OM = 1$, le théorème de Pythagore (ou la formule de la distance) donne $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Pour tout réel x :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(on note $\cos^2 x$ pour $(\cos x)^2$).

- Puisque x et $x + 2k\pi$ ont la même image : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout entier relatif k .

Signes selon le quadrant. Le signe du cosinus est celui de l'abscisse de M , celui du sinus est celui de l'ordonnée.

Position de M (mesure principale x)	$\cos x$	$\sin x$
$0 < x < \pi/2$ (en haut à droite)	positif	positif
$\pi/2 < x < \pi$ (en haut à gauche)	négatif	positif
$-\pi < x < -\pi/2$ (en bas à gauche)	négatif	négatif
$-\pi/2 < x < 0$ (en bas à droite)	positif	négatif

Utiliser la relation fondamentale. Si l'on connaît $\sin x$, on obtient $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, donc $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ ou $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$. La relation seule ne tranche pas : c'est la position de x (son quadrant) qui donne le signe. Ne jamais oublier cette étape.

4. Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes se retrouvent par la géométrie.

- Pour $\pi/4$: le point M est sur la bissectrice $y = x$, donc $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = c$ avec $2c^2 = 1$, d'où $c = \sqrt{2}/2$ (positif).
- Pour $\pi/3$: le triangle OIM est isocèle en O avec un angle de 60° , donc équilatéral. Le pied de la hauteur issue de M est le milieu de [OI], d'où $\cos(\pi/3) = 1/2$, puis $\sin(\pi/3) = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$.
- Pour $\pi/6$: le point image de $\pi/6$ est le symétrique de celui de $\pi/3$ par rapport à la droite $y = x$, ce qui échange abscisse et ordonnée : $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $\sin(\pi/6) = 1/2$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Repère mnémotechnique : de 0 à $\pi/2$, le sinus prend les valeurs $\sqrt{0}/2, \sqrt{1}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{4}/2$, et le cosinus les mêmes dans l'ordre inverse.

Valeurs approchées utiles : $\sqrt{2}/2 \approx 0,707$ et $\sqrt{3}/2 \approx 0,866$.

5. Angles associés

Les symétries du cercle permettent de ramener le calcul de cos et sin de nombreux réels aux valeurs du premier quadrant.

Symétries du cercle et angles associés

$-x$: symétrie par rapport à l'axe des abscisses

$\pi - x$: symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

$\pi + x$: symétrie par rapport à l'origine O

$\pi/2 - x$: symétrie par rapport à la droite $y = x$

Repères complémentaires, sans séquence causale

- **Réel $-x$.** Le point image de $-x$ est le symétrique de $M(x)$ par rapport à l'axe des abscisses : même abscisse, ordonnée opposée.

$$\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

- **Réel $\pi - x$.** Symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : abscisse opposée, même ordonnée.

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin x.$$

- **Réel $\pi + x$.** Symétrique par rapport à l'origine (demi-tour) : les deux coordonnées sont opposées.

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \text{ et } \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

- **Réel $\pi/2 - x$.** Symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$: abscisse et ordonnée s'échangent.

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \text{ et } \sin(\pi/2 - x) = \cos x.$$

- **Réel $\pi/2 + x$.** Quart de tour direct : le point $(a ; b)$ devient $(-b ; a)$.

$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x \text{ et } \sin(\pi/2 + x) = \cos x.$$

Application. $\cos(5\pi/6) = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, et $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi/6) = 1/2$. De même, $\sin(4\pi/3) = \sin(\pi + \pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.

Plutôt que d'apprendre ces formules par cœur, il est plus sûr de les **retrouver en dessinant** le cercle, le point $M(x)$ dans le premier quadrant et son symétrique : le dessin dit immédiatement quelle coordonnée change de signe.

6. Équations et inéquations trigonométriques

Équation $\cos x = a$. Si $a > 1$ ou $a < -1$, elle n'a pas de solution. Si $-1 \leq a \leq 1$, on cherche les points du cercle d'abscisse a : ce sont les intersections du cercle avec la droite verticale $x = a$. En général il y a deux points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Si α est un réel tel que $\cos \alpha = a$, alors :

$$\cos x = \cos \alpha \text{ équivaut à } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

Équation $\sin x = a$. Pour $-1 \leq a \leq 1$, on coupe le cercle par la droite horizontale $y = a$. Les deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Si $\sin \alpha = a$:

$$\sin x = \sin \alpha \text{ équivaut à } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

Cas particuliers : $\cos x = 1$ pour $x = 2k\pi$; $\cos x = -1$ pour $x = \pi + 2k\pi$; $\cos x = 0$ pour $x = \pi/2 + k\pi$; $\sin x = 0$ pour $x = k\pi$; $\sin x = 1$ pour $x = \pi/2 + 2k\pi$.

Résoudre $\cos x = a$ sur un intervalle

1. Vérifier que $-1 \leq a \leq 1$
2. Trouver un réel α tel que $\cos \alpha = a$
3. Tracer la droite verticale d'abscisse a
4. Lire les deux points $\pm \alpha + 2k\pi$
5. Garder les solutions de l'intervalle demandé

Dans la pratique, au lycée, on résout sur un intervalle précis, le plus souvent $]-\pi ; \pi]$ ou $[0 ; 2\pi[$, et on ne retient que les solutions de cet intervalle.

Inéquations. Pour résoudre $\cos x \geq a$ sur un intervalle, on repère les points du cercle dont l'abscisse est supérieure ou égale à a : ils forment un arc, à droite de la droite $x = a$. On lit cet arc avec les bornes de l'intervalle imposé. Par exemple, sur $]-\pi ; \pi]$, $\cos x \geq 0$ équivaut à $x \in [-\pi/2 ; \pi/2]$. Pour $\sin x \geq a$, on garde l'arc situé au-dessus de la droite $y = a$.

7. Les fonctions cosinus et sinus

Définition. La fonction **cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos x$. La fonction **sinus** associe à tout réel x le réel $\sin x$.

Périodicité. Pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On dit que ces fonctions sont **périodiques de période 2π** . Graphiquement, la courbe se reproduit identique par translation de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$ (où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses). Il suffit donc d'étudier ces fonctions sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $]-\pi ; \pi]$.

Parité. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x ; sa courbe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x ; sa courbe est alors symétrique par rapport à l'origine O .

- Puisque $\cos(-x) = \cos x$, la fonction **cosinus est paire**.
- Puisque $\sin(-x) = -\sin x$, la fonction **sinus est impaire**.

Grâce à la parité, on peut réduire encore l'étude à $[0 ; \pi]$, puis compléter par symétrie, puis par périodicité.

Tracer une courbe trigonométrique

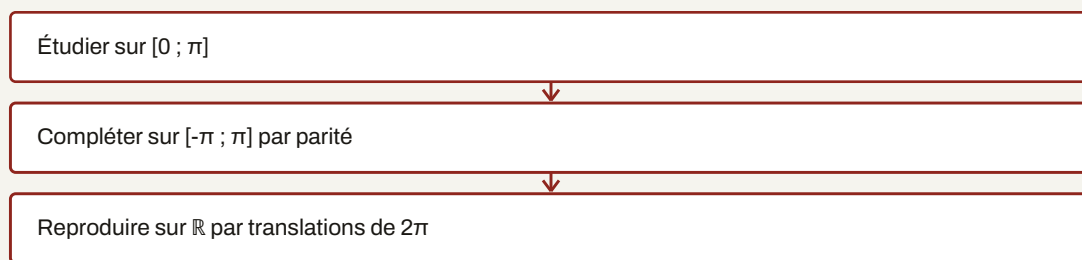


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Variations sur $[0 ; \pi]$. Quand x croît de 0 à π , le point M parcourt le demi-cercle supérieur de I vers I' . Son abscisse diminue constamment de 1 à -1 : la fonction cosinus est **strictement décroissante** sur $[0 ; \pi]$. Son ordonnée augmente de 0 à 1 entre 0 et $\pi/2$, puis diminue de 1 à 0 entre $\pi/2$ et π : la fonction sinus est **strictement croissante** sur $[0 ; \pi/2]$ et **strictement décroissante** sur $[\pi/2 ; \pi]$.

Par parité on obtient les variations sur $[-\pi ; 0]$: cosinus y est croissante (de -1 à 1) ; sinus est décroissante sur $[-\pi ; -\pi/2]$ (de 0 à -1) puis croissante sur $[-\pi/2 ; 0]$ (de -1 à 0).

Intervalle	$[-\pi ; -\pi/2]$	$[-\pi/2 ; 0]$	$[0 ; \pi/2]$	$[\pi/2 ; \pi]$
cosinus	croissante, de -1 à 0	croissante, de 0 à 1	décroissante, de 1 à 0	décroissante, de 0 à -1
sinus	décroissante, de 0 à -1	croissante, de -1 à 0	croissante, de 0 à 1	décroissante, de 1 à 0

Courbes. Les courbes de cosinus et de sinus sont des **sinusoïdes**, ondulations régulières comprises entre les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$.

- La courbe du sinus passe par l'origine, monte jusqu'à 1 en $\pi/2$, redescend à 0 en π , atteint -1 en $3\pi/2$ et revient à 0 en 2π .
- La courbe du cosinus part de 1 en 0, s'annule en $\pi/2$, vaut -1 en π , s'annule en $3\pi/2$ et revaut 1 en 2π .

Comme $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, la courbe du cosinus se déduit de celle du sinus par une translation de $\pi/2$ vers la gauche : les deux courbes ont exactement la même forme, décalée d'un quart de période.

Fonctions de la forme $x \mapsto \cos(\omega x)$ ou $\sin(\omega x)$. Pour un réel $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto \sin(\omega x)$ est périodique de période $2\pi/\omega$: en effet $\sin(\omega(x + 2\pi/\omega)) = \sin(\omega x + 2\pi) = \sin(\omega x)$. Ce type de fonction modélise les phénomènes périodiques (oscillations, signaux, rythmes biologiques) ; la **fréquence** associée est l'inverse de la période.

Exemples résolus

Exemple 1 : mesures principales et lecture sur le cercle

Énoncé. Déterminer la mesure principale de $31\pi/6$ et de $-17\pi/4$, puis en déduire le cosinus et le sinus de chacun de ces réels.

Résolution. Pour $31\pi/6$: un tour vaut $2\pi = 12\pi/6$. On retire deux tours : $31\pi/6 - 24\pi/6 = 7\pi/6$. Or $7\pi/6 > \pi$, on retire encore un tour : $7\pi/6 - 12\pi/6 = -5\pi/6$. Comme $-\pi < -5\pi/6 \leq \pi$, la mesure principale de $31\pi/6$ est $-5\pi/6$. Le point image est le symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, de celui de $5\pi/6 = \pi - \pi/6$. Donc $\cos(31\pi/6) = \cos(-5\pi/6) = \cos(5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ et $\sin(31\pi/6) = \sin(-5\pi/6) = -\sin(5\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$.

Pour $-17\pi/4$: un tour vaut $8\pi/4$. On ajoute deux tours : $-17\pi/4 + 16\pi/4 = -\pi/4$, qui appartient à $]-\pi ; \pi]$. La mesure principale est $-\pi/4$. Donc $\cos(-17\pi/4) = \cos(-\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\sin(-17\pi/4) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$.

Exemple 2 : passer du sinus au cosinus

Énoncé. Soit x un réel de $[\pi/2 ; \pi]$ tel que $\sin x = 3/5$. Calculer $\cos x$, puis $\cos(\pi - x)$ et $\sin(x + \pi)$.

Résolution. D'après la relation fondamentale, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - 9/25 = 16/25$. Donc $\cos x = 4/5$ ou $\cos x = -4/5$. Comme $x \in [\pi/2 ; \pi]$, le point image est dans le demi-plan des abscisses négatives ou nulles : $\cos x \leq 0$. Donc $\cos x = -4/5$. Ensuite $\cos(\pi - x) = -\cos x = 4/5$, et $\sin(x + \pi) = \sin(\pi + x) = -\sin x = -3/5$. Vérification : $(-4/5)^2 + (3/5)^2 = 16/25 + 9/25 = 1$.

Exemple 3 : équation et inéquation sur un intervalle

Énoncé. a) Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation $2\cos x + 1 = 0$. b) Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$.

Résolution. a) $2\cos x + 1 = 0$ équivaut à $\cos x = -1/2$. On cherche un réel de cosinus $-1/2$: $\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$. Les points du cercle d'abscisse $-1/2$ sont les images de $2\pi/3$ et de $-2\pi/3$, qui sont tous deux dans $]-\pi ; \pi]$. L'ensemble des solutions est $S = \{-2\pi/3 ; 2\pi/3\}$.

b) $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$ équivaut à $\sin x \geq \sqrt{3}/2$. Les points d'ordonnée égale à $\sqrt{3}/2$ sont les images de $\pi/3$ et de $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$. Les points d'ordonnée supérieure ou égale à $\sqrt{3}/2$ forment l'arc du haut compris entre ces deux points. Sur $[0 ; 2\pi[$, cela correspond à $S = [\pi/3 ; 2\pi/3]$.

Méthodes et pièges

- Pour une mesure principale, ajoute ou retire des multiples de 2π écrits avec le même dénominateur ($2\pi = 6\pi/3 = 8\pi/4 = 12\pi/6$), puis vérifie que le résultat est bien dans $]-\pi ; \pi]$: la borne $-\pi$ est exclue, π est incluse.
- Dessine toujours le cercle avant d'écrire une formule d'angle associé : le dessin te dit quelle coordonnée change de signe, la mémoire peut te trahir.
- Après $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ne choisis jamais le signe au hasard : c'est l'intervalle où se trouve x qui tranche.
- Ne confonds pas les symétries : $\cos(-x) = \cos x$ (cosinus paire), mais $\sin(-x) = -\sin x$ (sinus impaire).

- L'équation $\cos x = a$ a deux familles de solutions, $\pm\alpha + 2k\pi$. Pour $\sin x = a$, ce sont $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$, pas $-\alpha$.
- Vérifie que a est dans $[-1; 1]$ avant de résoudre : $\cos x = 1,2$ n'a aucune solution.
- Sur un intervalle imposé, liste les solutions une par une et contrôle chaque borne : sur $[0; 2\pi]$, $-\pi/3$ n'est pas accepté, il faut écrire $5\pi/3$.
- Ta calculatrice doit être en mode radian pour les fonctions trigonométriques de ce chapitre ; en mode degré, $\cos(\pi/3)$ ne vaudra pas 0,5.
- Écris $\cos^2 x$ pour $(\cos x)^2$, et ne confonds pas avec $\cos(x^2)$, qui est une autre fonction.

Vers le PASS

En PASS, la trigonométrie est un outil plus qu'un sujet. Elle sert à décomposer une force ou un vecteur selon deux axes (projections $F \cdot \cos \theta$ et $F \cdot \sin \theta$), à décrire un mouvement circulaire ou un phénomène oscillant (onde sonore, signal électrique, rythme cardiaque modélisé par une sinusoïde), et à calculer des angles dans les problèmes de biomécanique et d'optique. Les dérivées de $\sin$ et $\cos$, vues en Terminale, interviennent dans les vitesses et accélérations des mouvements périodiques. Le réflexe à garder : travailler en radians, connaître sans hésitation les valeurs remarquables et savoir retrouver un signe sur le cercle, car les QCM jouent souvent sur une erreur de signe ou une confusion degré et radian.

Suite en PASS : Vecteurs, projections et trigonométrie

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Convertir en radians : 150° et 36° . Convertir en degrés : $7\pi/4$ rad et 1 rad (valeur approchée au dixième).
2. Déterminer la mesure principale de chacun des réels suivants : $13\pi/3$; $-25\pi/6$; $101\pi/4$.
3. Donner la valeur exacte de : $\cos(5\pi/6)$; $\sin(-\pi/3)$; $\cos(3\pi/4)$; $\sin(7\pi/6)$; $\cos(-2\pi/3)$; $\sin(11\pi/4)$.
4. Soit x un réel de $[-\pi/2; 0]$ tel que $\cos x = 5/13$. Calculer $\sin x$.
5. Simplifier, pour tout réel x , l'expression $A = \sin(\pi - x) + \sin(-x) + \cos(\pi/2 - x) + \cos(x + \pi)$.

Niveau 2 : type bac

6. a) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $2\sin x + 1 = 0$.
- b) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$. c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = 0$.
7. a) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos x \geq 1/2$.
- b) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin x < 0$. c) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation $\cos x < -\sqrt{2}/2$.
8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x)$.
 - a) Montrer que f est périodique de période π .
 - b) Étudier la parité de f .
 - c) Calculer $f(0)$, $f(\pi/4)$ et $f(\pi/2)$.
 - d) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
 - e) En utilisant les variations de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$, donner les variations de f sur $[0; \pi/2]$.
9. On veut résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E) : $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

a) On pose $X = \cos x$. Écrire l'équation vérifiée par X et la résoudre. b) En déduire les solutions de (E).

Niveau 3 : vers le PASS

10. Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ l'équation $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$. (Indication : exprimer $\cos^2 x$ à l'aide de $\sin x$.)

11. On modélise la pression dans une artère, en mmHg, par $P(t) = 100 + 20 \sin(2,5\pi t)$, où t est le temps en secondes.

a) Déterminer la période T de la fonction P et en déduire le nombre de cycles par minute. b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de $P(t)$. c) Déterminer le premier instant $t > 0$ où la pression vaut 110 mmHg.

12. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

A. Pour tout réel x , $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi)$. B. Pour tout réel x , $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$. C. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin x \times \cos x$ est paire. D. L'équation $\cos x = 1,2$ admet au moins une solution réelle. E. Il existe un réel x tel que $\cos x = 0,6$ et $\sin x = 0,7$.

13. Pour tout entier k , on note M_k le point image du réel $k\pi/3$ sur le cercle trigonométrique.

a) Combien de points distincts obtient-on ? Quelle figure forment-ils ? b) Calculer la distance M_0M_1 , puis le périmètre et l'aire de cette figure. c) Même question a) avec les images des réels $k\pi/4$, puis calculer la distance entre les images de 0 et de $\pi/4$ (valeur exacte puis approchée au centième).

Corrigés

1. On utilise $r = d \times \pi/180$.

$150^\circ : 150\pi/180 = 5\pi/6$ rad. $36^\circ : 36\pi/180 = \pi/5$ rad. Pour passer en degrés, $d = r \times 180/\pi$. $7\pi/4$ rad : $7 \times 180/4 = 315^\circ$. 1 rad : $180/\pi \approx 57,295\dots$, soit **environ $57,3^\circ$** .

2. On ajoute ou retire des multiples de 2π écrits avec le même dénominateur.

$13\pi/3 : 2\pi = 6\pi/3$, on retire deux tours : $13\pi/3 - 12\pi/3 = \pi/3$. Mesure principale : $\pi/3$. $-25\pi/6 : 2\pi = 12\pi/6$, on ajoute deux tours : $-25\pi/6 + 24\pi/6 = -\pi/6$. Mesure principale : $-\pi/6$. $101\pi/4 : 2\pi = 8\pi/4$. $101 = 12 \times 8 + 5$, donc on retire douze tours : $101\pi/4 - 96\pi/4 = 5\pi/4$. Comme $5\pi/4 > \pi$, on retire encore un tour : $5\pi/4 - 8\pi/4 = -3\pi/4$. Mesure principale : $-3\pi/4$.

3. On ramène chaque réel au premier quadrant grâce aux angles associés.

$\cos(5\pi/6) = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$. $\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$. $\cos(3\pi/4) = \cos(\pi - \pi/4) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. $\sin(7\pi/6) = \sin(\pi + \pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$. $\cos(-2\pi/3) = \cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$. $\sin(11\pi/4) : 11\pi/4 - 2\pi = 3\pi/4$, donc $\sin(11\pi/4) = \sin(3\pi/4) = \sin(\pi - \pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

4. Relation fondamentale : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. $1 - 25/169 = 144/169$. Donc $\sin x = 12/13$ ou $\sin x = -12/13$.

Comme $x \in [-\pi/2 ; 0]$, le point image est dans le demi-plan des ordonnées négatives ou nulles, donc $\sin x \leq 0$. Conclusion : **$\sin x = -12/13$** . Vérification : $(5/13)^2 + (12/13)^2 = (25 + 144)/169 = 1$.

5. On transforme chaque terme :

$\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$; $\cos(x + \pi) = -\cos x$. $A = \sin x - \sin x + \sin x - \cos x$, donc **$A = \sin x - \cos x$** .

6. a) $2\sin x + 1 = 0$ équivaut à $\sin x = -1/2$. On a $\sin(\pi/6) = 1/2$, donc $\sin(-\pi/6) = -1/2$. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x = -\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = \pi - (-\pi/6) + 2k\pi = 7\pi/6 + 2k\pi$. Dans $[0 ; 2\pi[$: $-\pi/6 + 2\pi = 11\pi/6$ et $7\pi/6$.

$S = \{7\pi/6; 11\pi/6\}$. b) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$ équivaut à $\cos x = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = \cos(\pi/4)$. Solutions dans $\mathbb{R}$: $x = \pi/4 + 2k\pi$ ou $x = -\pi/4 + 2k\pi$. Dans $]-\pi; \pi]$: $S = \{-\pi/4; \pi/4\}$. c) Les points du cercle d'abscisse nulle sont $J(0; 1)$ et $J'(0; -1)$, images de $\pi/2$ et de $-\pi/2$. Ces deux points sont diamétralement opposés, donc séparés d'un demi-tour. $S = \{\pi/2 + k\pi, k \text{ entier relatif}\}$.

7. a) $\cos(\pi/3) = 1/2$; les points d'abscisse $1/2$ sont les images de $\pi/3$ et $-\pi/3$. Les points d'abscisse supérieure ou égale à $1/2$ forment l'arc de droite compris entre eux.

$S = [-\pi/3; \pi/3]$. b) $\sin x < 0$: le point image doit être strictement sous l'axe des abscisses. Sur $]-\pi; \pi]$, cela correspond aux réels strictement compris entre $-\pi$ et 0 (en $-\pi$, qui est d'ailleurs exclu de l'intervalle, et en 0 , le sinus est nul). $S =]-\pi; 0[$. c) $\cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ et, sur $[0; 2\pi[$, l'autre réel de cosinus $-\sqrt{2}/2$ est $2\pi - 3\pi/4 = 5\pi/4$. Les points d'abscisse strictement inférieure à $-\sqrt{2}/2$ forment l'arc de gauche entre ces deux points, bornes exclues. $S =]3\pi/4; 5\pi/4[$.

8. a) Pour tout réel x , $f(x + \pi) = \cos(2(x + \pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$. Donc **f est périodique de période π** .

b) Pour tout réel x , $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$, car la fonction cosinus est paire. Donc **f est paire**. c) $f(0) = \cos 0 = 1$; $f(\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0$; $f(\pi/2) = \cos \pi = -1$. d) $f(x) = 0$ équivaut à $\cos(2x) = 0$, soit $2x = \pi/2 + k\pi$, c'est-à-dire $x = \pi/4 + k\pi/2$. Dans $[0; \pi]$: $k = 0$ donne $\pi/4$ et $k = 1$ donne $3\pi/4$ ($k = 2$ donne $5\pi/4 > \pi$). $S = \{\pi/4; 3\pi/4\}$. e) Quand x parcourt $[0; \pi/2]$, $2x$ parcourt $[0; \pi]$ en croissant. Or cosinus est strictement décroissant sur $[0; \pi]$. Donc si $0 \leq a < b \leq \pi/2$, on a $0 \leq 2a < 2b \leq \pi$ et $\cos(2a) > \cos(2b)$. **f est strictement décroissante sur $[0; \pi/2]$, de 1 à -1.**

9. a) L'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$. Discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$, donc $\sqrt{\Delta} = 3$.

$X_1 = (1 - 3)/4 = -1/2$ et $X_2 = (1 + 3)/4 = 1$. **$X = -1/2$ ou $X = 1$** . b) $\cos x = 1$ dans $[0; 2\pi[$ donne $x = 0$. $\cos x = -1/2 = \cos(2\pi/3)$ donne $x = 2\pi/3$ ou $x = -2\pi/3 + 2\pi = 4\pi/3$. **$S = \{0; 2\pi/3; 4\pi/3\}$** .

10. Comme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, l'équation devient $2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$, soit $-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$, c'est-à-dire $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

On pose $X = \sin x$: $2X^2 - X - 1 = 0$, de discriminant 9, de racines $X = 1$ et $X = -1/2$ (même calcul qu'à l'exercice 9). $\sin x = 1$ dans $[0; 2\pi[$: $x = \pi/2$. $\sin x = -1/2$: $\sin(-\pi/6) = -1/2$, d'où $x = -\pi/6 + 2\pi = 11\pi/6$ et $x = \pi - (-\pi/6) = 7\pi/6$. **$S = \{\pi/2; 7\pi/6; 11\pi/6\}$** . Vérification pour $x = 7\pi/6$: $\cos^2 x = (-\sqrt{3}/2)^2 = 3/4$, donc $2 \times 3/4 + (-1/2) - 1 = 3/2 - 3/2 = 0$.

11. a) La fonction $t \mapsto \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2,5\pi$ a pour période $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(2,5\pi) = 0,8$. Donc **$T = 0,8$ s.**

Nombre de cycles par minute : $60/0,8 = 75$ cycles par minute (fréquence $1/0,8 = 1,25$ Hz). b) Comme $-1 \leq \sin(2,5\pi t) \leq 1$, on a $100 - 20 \leq P(t) \leq 100 + 20$. Ces bornes sont atteintes (le sinus prend les valeurs 1 et -1). **Maximum : 120 mmHg ; minimum : 80 mmHg.** c) $P(t) = 110$ équivaut à $20 \sin(2,5\pi t) = 10$, soit $\sin(2,5\pi t) = 1/2$. Les solutions vérifient $2,5\pi t = \pi/6 + 2k\pi$ ou $2,5\pi t = 5\pi/6 + 2k\pi$. La plus petite valeur positive de $2,5\pi t$ est $\pi/6$, d'où $t = (\pi/6)/(2,5\pi) = 1/15$. $t = 1/15$ s $\approx 0,067$ s.

12. A. **Vrai.** Les réels $x + \pi$ et $x - \pi$ diffèrent de 2π , ils ont donc la même image sur le cercle et le même cosinus.

B. **Vrai.** C'est la formule du quart de tour : le point image de $\pi/2 + x$ a pour ordonnée l'abscisse de $M(x)$, donc $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$. C. **Faux.** $g(-x) = \sin(-x) \times \cos(-x) = (-\sin x) \times \cos x = -g(x)$: g est impaire. Elle n'est pas paire puisque, par exemple, $g(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$ et $g(-\pi/4) = -1/2 \neq 1/2$. D. **Faux.** Pour tout réel x , $\cos x \leq 1 < 1,2$. E. **Faux.** On aurait $\cos^2 x + \sin^2 x = 0,36 + 0,49 = 0,85 \neq 1$, ce qui contredit la relation fondamentale.

13. a) Les réels $k\pi/3$ et $(k + 6)\pi/3$ diffèrent de 2π , donc les points se répètent tous les 6 indices. Pour $k = 0, 1, \dots, 5$, on obtient des points distincts régulièrement espacés d'un arc $\pi/3$. **On obtient 6 points, sommets d'un hexagone régulier** inscrit dans le cercle.

b) $M_0 = I(1 ; 0)$ et $M_1(\cos(\pi/3) ; \sin(\pi/3)) = (1/2 ; \sqrt{3}/2)$. $M_0M_1 = \sqrt{((1/2 - 1)^2 + (\sqrt{3}/2)^2)} = \sqrt{(1/4 + 3/4)} = 1$. Périmètre : $6 \times 1 = 6$. L'hexagone se découpe en 6 triangles équilatéraux de côté 1 (de sommet O), chacun d'aire $\sqrt{3}/4$. Aire : $6 \times \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/2 \approx 2,60$ (unités d'aire). c) Avec $k\pi/4$, les points se répètent tous les 8 indices : **8 points, sommets d'un octogone régulier.** Distance entre $I(1 ; 0)$ et le point $(\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2)$: $d^2 = (\sqrt{2}/2 - 1)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 = (1/2 - \sqrt{2} + 1) + 1/2 = 2 - \sqrt{2}$. $d = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,77$.