

Fonction exponentielle

COURS • M04 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	5
Méthodes et pièges	6
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	8

Ce que tu dois savoir faire

- Connaître la définition de la fonction exponentielle comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Démontrer que la fonction exponentielle ne s'annule pas et que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.
- Utiliser les propriétés algébriques (produit, inverse, quotient, puissance) pour simplifier une expression.
- Utiliser la notation e^x et connaître une valeur approchée du nombre e .
- Connaître le signe, la dérivée et les variations de la fonction exponentielle, et l'allure de sa courbe.
- Résoudre des équations et des inéquations du type $e^u = e^v$ ou $e^u < e^v$.
- Dériver les fonctions $x \mapsto e^{ax+b}$ et des produits ou quotients faisant intervenir l'exponentielle.
- Étudier les fonctions $x \mapsto e^{kx}$ et $x \mapsto e^{-kx}$ ($k > 0$) et les utiliser pour modéliser une croissance ou une décroissance.
- Faire le lien entre la suite (e^{na}) et une suite géométrique de raison e^a .

Cours

1. Définition de la fonction exponentielle

Théorème (existence admise). Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle** et se note **exp**. Ainsi, pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$, et $\exp(0) = 1$.

L'idée : on cherche une fonction dont la vitesse de variation en chaque point est égale à sa valeur. Plus elle est grande, plus elle augmente vite. C'est exactement le comportement d'une population qui se reproduit sans contrainte : plus il y a d'individus, plus il en naît.

On admet l'existence. On démontre en revanche deux propriétés fondamentales.

Propriété 1. Pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. En particulier, **exp ne s'annule jamais**.

Démonstration. Posons $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. La fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est de la forme $x \mapsto h(ax + b)$ avec $a = -1$, donc sa dérivée est $x \mapsto -\exp'(-x) = -\exp(-x)$. Par la formule du produit : $g'(x) = \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp(-x)) = \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0$. La dérivée de g est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc g est constante, égale à $g(0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1$. Si $\exp(x)$ était nul pour un réel x , le produit vaudrait 0 et non 1 : $\exp$ ne s'annule donc jamais.

Propriété 2 (unicité). Si h est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $h' = h$ et $h(0) = 1$, alors $h = \exp$.

Démonstration. Comme $\exp$ ne s'annule pas, on peut poser $k = h/\exp$. Par la formule du quotient : $k' = (h' \times \exp - h \times \exp')/\exp^2 = (h \times \exp - h \times \exp)/\exp^2 = 0$. Donc k est constante, égale à $k(0) = h(0)/\exp(0) = 1$, et $h = \exp$.

2. Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle. Pour tous réels a et b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Démonstration. Fixons b et posons $\varphi(x) = \exp(x + b) \times \exp(-x)$. Alors $\varphi'(x) = \exp(x + b)\exp(-x) - \exp(x + b)\exp(-x) = 0$: φ est constante, égale à $\varphi(0) = \exp(b)$. Donc $\exp(x + b) \times \exp(-x) = \exp(b)$. En multipliant les deux membres par $\exp(x)$, et puisque $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$, on obtient $\exp(x + b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

Cette relation transforme une **somme** en **produit** : c'est la propriété clé de l'exponentielle.

Conséquences. Pour tous réels a , b et tout entier relatif n :

- $\exp(-a) = 1/\exp(a)$;
- $\exp(a - b) = \exp(a)/\exp(b)$;
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Justifications : la première est la propriété 1. Pour la deuxième, $\exp(a - b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a)/\exp(b)$. Pour la troisième avec n entier naturel, on applique la relation fonctionnelle n fois : $\exp(a + a + \dots + a) = \exp(a) \times \dots \times \exp(a)$; pour n négatif, on utilise l'inverse.

Le nombre e et la notation e^x . On note $e = \exp(1)$. Sa valeur approchée est $e \approx 2,718$. D'après la dernière propriété, pour tout entier n , $\exp(n) = \exp(1 \times n) = e^n$. On étend cette notation à tout réel x en posant :

$$\exp(x) = e^x.$$

Les règles de calcul sur les exponentielles sont alors les mêmes que celles des puissances :

Règle	En notation exp	En notation e
Valeur en 0	$\exp(0) = 1$	$e^0 = 1$
Produit	$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
Inverse	$\exp(-a) = 1/\exp(a)$	$e^{-a} = 1/e^a$
Quotient	$\exp(a - b) = \exp(a)/\exp(b)$	$e^{a-b} = e^a/e^b$
Puissance	$\exp(na) = \exp(a)^n$	$e^{na} = (e^a)^n$

Exemple : $(e^{2x} \times e^{-3})/e^{x-1} = e^{2x-3-(x-1)} = e^{x-2}$.

Attention : e^{a+b} n'est pas $e^a + e^b$. Par exemple $e^{1+1} = e^2 \approx 7,39$ alors que $e^1 + e^1 \approx 5,44$.

3. Signe, variations et courbe

Signe. Pour tout réel x , $e^x > 0$. Démonstration : $e^x = e^{x/2 + x/2} = (e^{x/2})^2$, qui est un carré, donc positif ou nul ; et il n'est pas nul, car $\exp$ ne s'annule jamais.

Variations. La dérivée de $\exp$ est $\exp$ elle-même, strictement positive : **la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Conséquences pour les équations et inéquations. Pour tous réels a et b :

- $e^a = e^b \iff a = b$;
- $e^a < e^b \iff a < b$;
- $e^a \leq e^b \iff a \leq b$.

En effet, une fonction strictement croissante conserve l'ordre et prend deux valeurs différentes en deux points différents. En particulier $e^x > 1 \iff x > 0$ et $e^x < 1 \iff x < 0$, puisque $1 = e^0$.

Une équation comme $e^x = -2$ n'a aucune solution, puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

Courbe représentative.

- Elle passe par les points $(0 ; 1)$ et $(1 ; e)$.
- Elle est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses.
- Sa tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\exp'(0) = \exp(0) = 1$, donc pour équation $y = x + 1$. La courbe est au-dessus de cette tangente : pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$ (démonstration à l'exercice 10).
- Observation graphique : quand x devient grand, e^x devient très grand, et très vite ($e^{10} \approx 22\,026$) ; quand x devient très négatif, e^x se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre ($e^{-10} \approx 0,000045$). L'étude précise de ces limites relève de la classe de Terminale.

Valeurs utiles à la calculatrice : $e^{-1} \approx 0,368$; $e^{0,5} \approx 1,649$; $e^2 \approx 7,389$; $e^3 \approx 20,09$.

4. Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$

D'après la règle de dérivation de $x \mapsto g(ax+b)$, avec $g = \exp$:

la dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto a e^{ax+b}$.

Exemples :

- $(e^{3x})' = 3e^{3x}$;
- $(e^{-x})' = -e^{-x}$;
- $(e^{-0,2x+5})' = -0,2 e^{-0,2x+5}$.

On combine avec les formules du produit et du quotient. Par exemple, pour $f(x) = x e^x$: $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$. Comme $e^x > 0$, **le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$** : c'est la méthode à retenir. Dans une dérivée où l'exponentielle apparaît en facteur, on factorise par elle et on étudie le signe de l'autre facteur seulement.



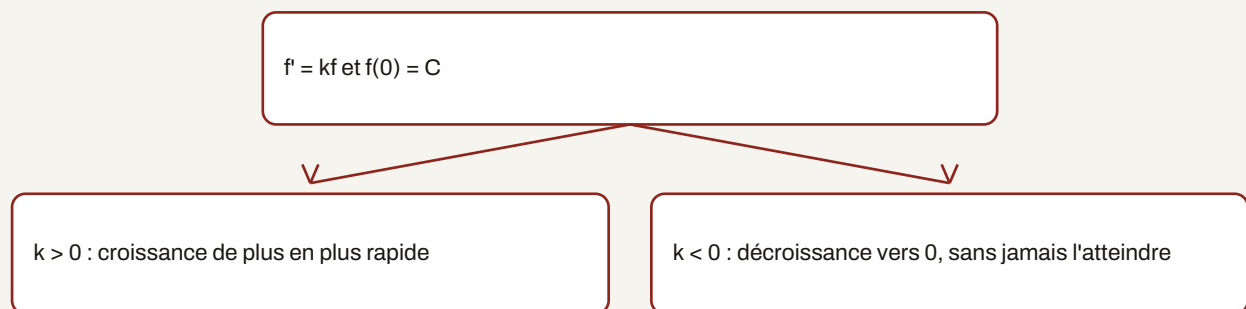
5. Les fonctions $x \mapsto e^{kx}$

Soit k un réel et $f(x) = e^{kx}$.

- $f(0) = 1$: toutes ces courbes passent par le point $(0 ; 1)$.
- $f'(x) = k e^{kx} = k f(x)$: la fonction vérifie la relation $f' = kf$. La vitesse de variation est proportionnelle à la valeur.
- Si $k > 0$, f' est strictement positive : f est **strictement croissante** ; plus k est grand, plus la croissance est rapide.
- Si $k < 0$, f est **strictement décroissante**. En écrivant $k = -\lambda$ avec $\lambda > 0$, on obtient $x \mapsto e^{-\lambda x}$, décroissante, qui se rapproche de 0 quand x devient grand.
- Si $k = 0$, f est constante égale à 1.

Plus généralement, pour un réel C , la fonction $x \mapsto C e^{kx}$ vérifie aussi $f' = kf$, avec $f(0) = C$.

Comportement de $x \mapsto C e^{kx}$ avec $C > 0$



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

6. Lien avec les suites géométriques

Soit a un réel et $u_n = e^{na}$ pour tout entier naturel n . Alors :

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na} \times e^a = e^a \times u_n.$$

La suite (e^{na}) est **géométrique de raison $q = e^a$** et de premier terme $u_0 = 1$. Comme $e^a > 0$: si $a > 0$, $q > 1$ et la suite est croissante ; si $a < 0$, $0 < q < 1$ et la suite est décroissante.

Plus généralement, si $f(t) = C e^{kt}$, les valeurs prises à intervalles de temps réguliers Δt forment une suite géométrique de raison $e^{k\Delta t}$: $f(t + \Delta t) = e^{k\Delta t} \times f(t)$. Une évolution exponentielle continue, observée à pas réguliers, est donc une évolution à **pourcentage constant**. C'est pour cela que la suite géométrique est le modèle discret et la fonction exponentielle le modèle continu d'un même phénomène.



Du continu au discret

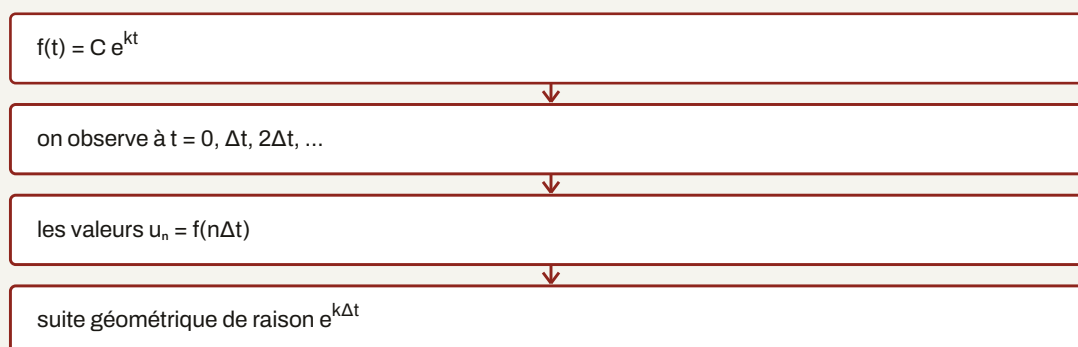


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

7. Modèles de croissance et de décroissance

Croissance exponentielle. Une population de bactéries en milieu favorable, un capital placé à taux continu, une épidémie à ses débuts : la quantité $N(t) = N_0 e^{kt}$ ($k > 0$) augmente d'un même pourcentage sur des durées égales. Elle **double** toujours en un même temps T , défini par $e^{kT} = 2$, quel que soit l'instant de départ, puisque $N(t + T) = e^{kT} \times N(t) = 2N(t)$.

Décroissance exponentielle. Le nombre de noyaux d'un échantillon radioactif, la concentration d'un médicament éliminé par l'organisme, la température d'un objet qui se rapproche de celle de la pièce (pour l'écart de température) : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$). La quantité est **divisée par 2** sur chaque durée égale à la **demi-vie** $t_{1/2}$, définie par $e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$. Après 2 demi-vies il reste un quart, après 3 un huitième, après n demi-vies une fraction $(1/2)^n$: on retrouve une suite géométrique.

En Première, sans la fonction logarithme (vue en Terminale), on détermine la durée nécessaire pour atteindre un seuil par tableau de valeurs, par lecture graphique ou par un algorithme de seuil.

Situation	Modèle	Paramètre
Croissance	$N_0 e^{kt}$, $k > 0$	temps de doublement
Décroissance	$N_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$	demi-vie
Observation à pas régulier	suite géométrique	raison $e^{k\Delta t}$

Exemples résolus

Exemple 1 : calcul algébrique, équation et inéquation

Énoncé. a) Simplifier $A = (e^{3x} \times e^{-x})/e^{x+1}$. b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x-1} = e^{x+3}$. c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2} \geq e^{4x-3}$.

Résolution. a) $A = e^{3x + (-x) - (x+1)} = e^{3x - x - x - 1} = e^{x-1}$. b) Comme $e^a = e^b \iff a = b$: $2x - 1 = x + 3 \iff x = 4$. $S = \{4\}$. c) La fonction exponentielle étant strictement croissante, $e^{x^2} \geq e^{4x-3} \iff x^2 \geq 4x - 3 \iff x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Ce trinôme a pour racines 1 et 3 (somme 4, produit 3) et un coefficient $a = 1 > 0$: il est positif à l'extérieur de ses racines. $S =]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$.

Exemple 2 : étude d'une fonction

Énoncé. Soit $f(x) = (x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$. a) Calculer $f'(x)$. b) Étudier les variations de f et préciser son minimum. c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Résolution. a) Produit de $u = x - 1$ ($u' = 1$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$) : $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$. b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de x : négatif sur $] -\infty ; 0[$, positif sur $] 0 ; +\infty[$. f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et strictement croissante sur $] 0 ; +\infty[$. **Son minimum est $f(0) = (0 - 1) \times 1 = -1$.** c) $f(1) = 0 \times e = 0$ et $f'(1) = 1 \times e = e$. La tangente a pour équation $y = e(x - 1) + 0$, soit $y = e x - e$.

Exemple 3 : élimination d'un médicament

Énoncé. Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang est $C(t) = 12e^{-0,2t}$, en mg/L, où t est le temps en heures. a) Donner la concentration initiale et étudier les variations de C . b) Calculer $C(5)$ au centième. c) Montrer que les valeurs $C(0)$, $C(1)$, $C(2)$, ... forment une suite géométrique ; donner sa raison au dix-millième et interpréter en pourcentage. d) Au bout de combien d'heures entières la concentration devient-elle inférieure à 1 mg/L ?

Résolution. a) $C(0) = 12e^0 = 12$ mg/L. $C'(t) = 12 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -2,4 e^{-0,2t} < 0$: C est strictement décroissante sur $] 0 ; +\infty[$. b) $C(5) = 12e^{-1} \approx 12 \times 0,36788 \approx 4,41$ mg/L. c) Posons $c_n = C(n) = 12e^{-0,2n}$. Alors $c(n+1) = 12e^{-0,2(n+1)} = e^{-0,2} \times c_n$: suite géométrique de raison $q = e^{-0,2} \approx 0,8187$. Chaque heure, la concentration est multipliée par 0,8187 environ : **elle baisse d'environ 18,1 % par heure.** d) On cherche le plus petit entier n tel que $12e^{-0,2n} < 1$. Par calcul : $C(12) = 12e^{-2,4} \approx 12 \times 0,0907 \approx 1,09$ et $C(13) = 12e^{-2,6} \approx 12 \times 0,0743 \approx 0,89$. Comme C est décroissante, **la concentration passe sous 1 mg/L au bout de 13 heures.**

Méthodes et pièges

- Pour simplifier, transforme tout en une seule exponentielle en additionnant ou soustrayant les exposants ; ne mélange pas exposants et facteurs.
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$, jamais $e^a + e^b$; et $(e^a)^2 = e^{2a}$, pas e^{a^2} .
- Pour résoudre $e^x = e^a$ ou $e^x < e^a$, compare directement les exposants : la fonction exponentielle est strictement croissante, l'ordre est conservé.
- Une exponentielle est toujours strictement positive : $e^x = 0$ ou $e^x = -2$ n'ont pas de solution, et $e^x > -5$ est vraie pour tout x .
- Dans une dérivée, factorise par l'exponentielle : son signe est connu (positif), il ne reste qu'à étudier l'autre facteur.
- N'oublie pas le facteur a dans la dérivée de e^{ax+b} : $(e^{-3x})' = -3e^{-3x}$.
- Une équation du type $e^{2x} + b e^x + c = 0$ se ramène au second degré en posant $X = e^x$, en ne gardant que les solutions $X > 0$.
- Pour un modèle à pas régulier, pense au lien $e^{k(t+1)} = e^k \times e^{kt}$: la raison de la suite géométrique est e^k , et l'évolution en pourcentage est $e^k - 1$.
- Pour un seuil sans logarithme, encadre la réponse entre deux valeurs calculées et justifie par le sens de variation.

Vers le PASS

L'exponentielle est la fonction la plus utilisée en sciences de la santé. En PASS, elle décrit la décroissance radioactive en médecine nucléaire et en radioprotection (loi $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, demi-vie, activité), l'atténuation d'un faisceau de rayons X qui traverse un tissu (loi exponentielle d'atténuation), l'élimination d'un médicament en pharmacocinétique (cinétique d'ordre 1, demi-vie d'élimination), la charge et la décharge d'un condensateur dans les modèles de membrane cellulaire, ou encore la croissance bactérienne. Toutes ces lois sont des solutions de l'équation $f' = kf$, qui généralise la définition vue ici.

En PASS, on lui associe immédiatement sa fonction réciproque, le logarithme népérien, qui permet de calculer une demi-vie ou un seuil en une ligne ($t_{1/2} = \ln 2/\lambda$), et les échelles logarithmiques (pH, décibels, graphiques semi-logarithmiques où une exponentielle devient une droite).

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Simplifier :

a) $e^3 \times e^{-5}$; b) $(e^2)^3$; c) e^{x+2}/e^{x-1} ; d) $(e^2)^2 \times e^{-2x}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{3x} = e^6$; b) $e^{x^2} = e$; c) $e^{2x+1} > 1$; d) $e^x = -2$.

3. Calculer la dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3e^x - x^2$; b) $g(x) = e^{-4x+1}$; c) $h(x) = x e^x$; d) $k(x) = (2x+3)e^{2x}$.

4. Donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f(x) = e^{-0,5x}$ et $g(x) = 5e^{0,3x}$, ainsi que leurs valeurs en 0.

5. Soit $u_n = e^{0,5n}$ pour tout entier naturel n . Montrer que (u_n) est géométrique, préciser sa raison (valeur exacte et valeur approchée au millièmes) et son sens de variation.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = (2-x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f'(x) = (1-x)e^x$. b) Dresser le tableau de variations de f et donner son maximum. c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. d) Résoudre $f(x) = 0$ et étudier le signe de $f(x)$.

7. a) Vérifier que la fonction $f(x) = 3e^{2x}$ vérifie $f' = 2f$ et $f(0) = 3$.

b) Vérifier que la fonction $g(t) = 50e^{-0,1t}$ vérifie $g' = -0,1g$ et $g(0) = 50$. Quel est son sens de variation ?

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x^2-1} \leq e^{3(x-1)}$; b) $e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$ (on pourra poser $X = e^x$).

9. Une population de bactéries compte $N(t) = 1\,000e^{0,3t}$ individus au bout de t heures.

a) Calculer $N(0)$ et $N(2)$ (à l'unité). b) Étudier le sens de variation de N . c) Montrer que $N(t+1) = e^{0,3} \times N(t)$ et en déduire le pourcentage d'augmentation par heure (à 0,1 % près). d) Au bout de combien

d'heures entières la population dépasse-t-elle 10 000 bactéries ?

10. Soit $g(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. b) En déduire les variations de g et son minimum. c) Conclure que, pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$. Interpréter graphiquement. d) Utiliser l'approximation affine de $\exp$ en 0 pour donner une valeur approchée de $e^{0,01}$.

Niveau 3 : vers le PASS

11. L'iode 131, utilisé en médecine nucléaire, a une demi-vie de 8 jours. On modélise le nombre de noyaux restants par $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, t en jours, avec $\lambda \approx 0,0866 \text{ j}^{-1}$.

a) Calculer $e^{-8\lambda}$ avec cette valeur de λ (au dix-millième) et vérifier qu'il vaut environ 1/2. b) Montrer que, pour tout n , $N(8n) = N_0 \times (1/2)^n$ à cette approximation près. Quelle proportion des noyaux reste-t-il au bout de 24 jours ? c) Au bout de combien de demi-vies, puis de jours, reste-t-il moins de 1 % des noyaux initiaux ?

12. Après une prise orale, la concentration d'un médicament est modélisée par $C(t) = 10t e^{-0,5t}$, en mg/L, pour $t \geq 0$ en heures.

a) Montrer que $C'(t) = 5(2 - t)e^{-0,5t}$. b) Déterminer l'instant du pic de concentration et la concentration maximale (au centième). c) Calculer $C'(0)$ et l'interpréter. d) Calculer $C(6)$ au centième et commenter.

13. Pour un réel k , on note $f_k(x) = e^{kx}$ et C_k sa courbe.

a) Montrer que toutes les courbes C_k passent par un même point. b) Déterminer k pour que la tangente à C_k en 0 passe par le point $B(2; 5)$. c) Montrer que, pour tout x , $f_k(x) \times f_{-k}(x) = 1$, et en déduire que les courbes C_k et C_{-k} sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

14. Soit $g(x) = (e^x + e^{-x})/2$ sur $\mathbb{R}$ (fonction qui décrit la forme d'un câble suspendu).

a) Calculer $g(0)$ et montrer que $g(-x) = g(x)$ pour tout x . b) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) > 0 \iff x > 0$. c) En déduire les variations et le minimum de g . d) Démontrer que, pour tout x , $g(2x) = 2g(x)^2 - 1$.

Corrigés

1. a) $e^3 \times e^{-5} = e^{3-5} = e^{-2}$.

b) $(e^2)^3 = e^{2 \times 3} = e^6$. c) $e^{x+2}/e^{x-1} = e^{x+2-x+1} = e^3$. d) $(e^x)^2 \times e^{-2x} = e^{2x} \times e^{-2x} = e^0 = 1$.

2. a) $e^{3x} = e^6 \iff 3x = 6 \iff x = 2$.

b) $e^{x^2} = e^1 \iff x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1$. c) $1 = e^0$, donc $e^{2x+1} > e^0 \iff 2x+1 > 0 \iff x > -1/2$. $S =]-1/2; +\infty[$.

d) Une exponentielle est strictement positive : **aucune solution**, $S = \emptyset$.

3. a) $f'(x) = 3e^x - 2x$.

b) $g'(x) = -4e^{-4x+1}$. c) $h'(x) = 1 \times e^x + x e^x = (x+1)e^x$. d) $k'(x) = 2 \times e^{2x} + (2x+3) \times 2e^{2x} = (2+4x+6)e^{2x} = (4x+8)e^{2x}$.

4. $f'(x) = -0,5e^{-0,5x} < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$. $g'(x) = 5 \times 0,3e^{0,3x} = 1,5e^{0,3x} > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $g(0) = 5$. On retrouve la règle : e^{kx} décroît si $k < 0$, croît si $k > 0$.

5. $u(n+1) = e^{0,5(n+1)} = e^{0,5n} \times e^{0,5} = e^{0,5} \times u_n$. (u_n) est géométrique de raison $q = e^{0,5} \approx 1,649$, de premier terme $u_0 = 1$. Comme $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est strictement croissante.

6. a) Produit de $u = 2 - x$ ($u' = -1$) et $v = e^x$: $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$.

b) $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - x$: positif sur $]-\infty ; 1[$, négatif sur $]1 ; +\infty[$. **f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[$, strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$; son maximum est $f(1) = e \approx 2,718$.** c) $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$. **Tangente : $y = x + 2$.** d) $f(x) = 0 \iff 2 - x = 0$ (car $e^x \neq 0$) $\iff x = 2$. Le signe de $f(x)$ est celui de $2 - x$: **$f(x) > 0$ sur $]-\infty ; 2[$, $f(x) < 0$ sur $]2 ; +\infty[$.**

7. a) $f'(x) = 3 \times 2e^{2x} = 6e^{2x} = 2 \times 3e^{2x} = 2f(x)$, et $f(0) = 3e^0 = 3$. **Les deux conditions sont vérifiées.**

b) $g'(t) = 50 \times (-0,1)e^{-0,1t} = -0,1 \times 50e^{-0,1t} = -0,1 g(t)$, et $g(0) = 50$. **Les conditions sont vérifiées.** $g'(t) = -5e^{-0,1t} < 0$: **g est strictement décroissante.**

8. a) Par stricte croissance de $\exp$: $x^2 - 1 \leq 3x - 3 \iff x^2 - 3x + 2 \leq 0$. Racines 1 et 2 (somme 3, produit 2), coefficient positif : trinôme négatif entre ses racines. **$S = [1 ; 2]$.**

b) Avec $X = e^x$ ($X > 0$), $e^{2x} = X^2$ et l'équation devient $X^2 - (e + 1)X + e = 0$. Deux nombres de somme $e + 1$ et de produit e : 1 et e . Donc $X = 1$ ou $X = e$, tous deux strictement positifs. $e^x = 1 \iff x = 0$; $e^x = e \iff x = 1$. **$S = \{0 ; 1\}$.**

9. a) $N(0) = 1\,000 \times e^0 = 1\,000$ bactéries ; $N(2) = 1\,000e^{0,6} \approx 1\,000 \times 1,82212 \approx 1\,822$ bactéries.

b) $N'(t) = 1\,000 \times 0,3e^{0,3t} = 300e^{0,3t} > 0$: **N est strictement croissante.** c) $N(t + 1) = 1\,000e^{0,3t + 0,3} = e^{0,3} \times 1\,000e^{0,3t} = e^{0,3} \times N(t)$. Or $e^{0,3} \approx 1,34986$: **la population augmente d'environ 35,0 % par heure.** d) On cherche le plus petit entier t tel que $1\,000e^{0,3t} > 10\,000$, soit $e^{0,3t} > 10$. $N(7) = 1\,000e^{2,1} \approx 8\,166$ et $N(8) = 1\,000e^{2,4} \approx 11\,023$. **N étant croissante, la population dépasse 10 000 bactéries au bout de 8 heures.**

10. a) $g'(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 > 0 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$. Donc **$g'(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[$, $g'(0) = 0$, $g'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.**

b) g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$. **Son minimum est $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.** c) Pour tout x , $g(x) \geq 0$, donc **$e^x \geq x + 1$.** Graphiquement, la courbe de l'exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = x + 1$, et ne la touche qu'en $(0 ; 1)$. d) Près de 0, $e^x \approx 1 + h$. **$e^{0,01} \approx 1,01$** (valeur calculatrice : 1,01005).

11. a) $8\lambda \approx 8 \times 0,0866 = 0,6928$, et $e^{-0,6928} \approx 0,5002$, qui vaut bien environ $1/2$.

b) $N(8n) = N_0 e^{-\lambda \times 8n} = N_0 (e^{-8\lambda})^n \approx N_0 \times (1/2)^n$: les valeurs à chaque demi-vie forment une suite géométrique de raison $1/2$. 24 jours = 3 demi-vies : il reste $(1/2)^3 = 1/8$, soit 12,5 % des noyaux. c) On cherche le plus petit n tel que $(1/2)^n < 0,01$, soit $2^n > 100$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$. Il faut 7 demi-vies, soit 56 jours (il reste alors $1/128 \approx 0,78\%$).

12. a) Produit de $u = 10t$ ($u' = 10$) et $v = e^{-0,5t}$ ($v' = -0,5e^{-0,5t}$) : $C'(t) = 10e^{-0,5t} + 10t \times (-0,5)e^{-0,5t} = (10 - 5t)e^{-0,5t} = 5(2 - t)e^{-0,5t}$.

b) $e^{-0,5t} > 0$, donc $C'(t)$ a le signe de $2 - t$: C est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$. $C(2) = 20e^{-1} \approx 20 \times 0,36788 \approx 7,36$. Le pic est atteint 2 heures après la prise, avec environ 7,36 mg/L. c) $C'(0) = 5 \times 2 \times 1 = 10 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$: juste après la prise, la concentration augmente à la vitesse de 10 mg/L par heure. d) $C(6) = 60e^{-3} \approx 60 \times 0,049787 \approx 2,99 \text{ mg/L}$. Quatre heures après le pic, la concentration est redescendue à environ 41 % de sa valeur maximale ($2,99/7,36 \approx 0,41$) : la phase d'élimination domine.

13. a) Pour tout k , $f_k(0) = e^0 = 1$: toutes les courbes passent par le point (0 ; 1).

b) $f_k'(x) = k e^{kx}$, donc $f_k'(0) = k$ et la tangente en 0 a pour équation $y = k(x - 0) + 1 = kx + 1$. Elle passe par $B(2 ; 5)$ si et seulement si $2k + 1 = 5$, soit $k = 2$. c) $f_k(x) \times f_{-k}(x) = e^{kx} \times e^{-kx} = e^0 = 1$. De plus $f_{-k}(x) = e^{-kx} = e^{k(-x)} = f_k(-x)$: le point $(x ; y)$ appartient à C_{-k} si et seulement si le point $(-x ; y)$ appartient à C_k . Les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

14. a) $g(0) = (1 + 1)/2 = 1$. $g(-x) = (e^{-x} + e^x)/2 = g(x)$: g est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) $g'(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Or $g'(x) > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x$ (stricte croissance de $\exp$) $\iff x > 0$. c) g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. Son minimum est $g(0) = 1$.

d) $2g(x)^2 - 1 = 2 \times (e^x + e^{-x})^2/4 - 1 = (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x})/2 - 1 = (e^{2x} + 2 + e^{-2x})/2 - 1 = (e^{2x} + e^{-2x})/2 = g(2x)$. L'égalité $g(2x) = 2g(x)^2 - 1$ est démontrée.