

Fiche : Fonction exponentielle

FICHE • M04 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

L'essentiel	1
Formules et définitions à connaître	2
Pièges à éviter	2
Je me teste	3

L'essentiel

- La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$, donc l'exponentielle ne s'annule jamais.
- La relation fonctionnelle $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$ transforme une somme en produit.
- On note $e = \exp(1) \approx 2,718$ et $\exp(x) = e^x$; les règles de calcul sont celles des puissances.
- Pour tout réel x , $e^x > 0$, car e^x est le carré de $e^{x/2}$ et n'est pas nul.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée est elle-même, strictement positive.
- On a $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$, et $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$.
- La courbe passe par $(0 ; 1)$ et $(1 ; e)$, et sa tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$.
- Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$: la courbe est au-dessus de sa tangente en 0.
- La dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto a e^{ax+b}$.
- Dans une dérivée contenant e^x en facteur, le signe est celui de l'autre facteur.
- La fonction $x \mapsto e^{kx}$ vérifie $f' = kf$ et $f(0) = 1$; elle est croissante si $k > 0$ et décroissante si $k < 0$.
- La suite (e^{na}) est géométrique de raison e^a : une exponentielle observée à pas réguliers évolue à pourcentage constant.
- Un modèle $N_0 e^{kt}$ avec $k > 0$ a un temps de doublement constant ; un modèle $N_0 e^{-\lambda t}$ a une demi-vie constante.



Formules et définitions à connaître

Propriété	Formule	Condition
Définition	$\exp' = \exp, \exp(0) = 1$	sur $\mathbb{R}$
Produit	$e^{a+b} = e^a \times e^b$	a, b réels
Inverse	$e^{-a} = 1/e^a$	a réel
Quotient	$e^{a-b} = e^a/e^b$	a, b réels
Puissance	$e^{na} = (e^a)^n$	n entier relatif
Dérivée	$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$	sur $\mathbb{R}$
Équation	$e^a = e^b \iff a = b$	a, b réels
Inéquation	$e^a < e^b \iff a < b$	a, b réels
Suite associée	$u_n = e^{na}$, raison $q = e^a$	n entier naturel
Demi-vie	$e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$	$\lambda > 0$

Pièges à éviter

- Écrire $e^{a+b} = e^a + e^b$: c'est un produit, pas une somme.
- Confondre $(e^a)^2 = e^{2a}$ avec e^{a^2} .



- Chercher des solutions à $e^x = 0$ ou $e^x = -2$: il n'y en a aucune.
- Oublier le facteur a dans la dérivée de e^{ax+b} .
- Garder une solution $X \leq 0$ après le changement de variable $X = e^x$.
- Étudier le signe de l'exponentielle dans une dérivée : il est toujours positif, seul l'autre facteur compte.

Je me teste

1. Valeur de e^0 ? $\rightarrow 1$.
2. Valeur approchée de e ? $\rightarrow 2,718$.
3. Simplifier $e^{3x} \times e^{-x} / e^{x+1}$? $\rightarrow e^{x-1}$.
4. Dérivée de e^{-4x+1} ? $\rightarrow -4e^{-4x+1}$.
5. Dérivée de $x e^x$? $\rightarrow (x+1)e^x$.
6. Solutions de $e^{x^2} \geq e^{4x-3}$? $\rightarrow]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$.
7. Équation de la tangente à $\exp$ en 0 ? $\rightarrow y = x + 1$.
8. Raison de la suite $u_n = e^{0,5n}$? $\rightarrow e^{0,5} \approx 1,649$.
9. Baisse horaire de $C(t) = 12e^{-0,2t}$? $\rightarrow$ Environ 18,1 % par heure, car $e^{-0,2} \approx 0,8187$.
10. Proportion restante après 3 demi-vies ? $\rightarrow 1/8$, soit 12,5 %.