

Dérivation : nombre dérivé et fonction dérivée

COURS • M03 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	7
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer un taux de variation et l'interpréter comme coefficient directeur d'une sécante ou comme vitesse moyenne.
- Calculer un nombre dérivé à partir de la définition (limite du taux de variation).
- Lire graphiquement un nombre dérivé comme pente d'une tangente.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.
- Connaître et utiliser les dérivées des fonctions usuelles.
- Dériver une somme, un produit par un réel, un produit, un inverse, un quotient et une fonction $x \mapsto g(ax + b)$.
- Étudier le signe d'une dérivée et en déduire le tableau de variations d'une fonction.
- Déterminer un extremum local ou global et résoudre un problème d'optimisation.
- Utiliser l'étude d'une fonction pour démontrer une inégalité ou étudier la position relative de deux courbes.

Cours

1. Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a, b deux réels distincts de I . Le **taux de variation** (ou taux d'accroissement) de f entre a et b est le nombre

$$(f(b) - f(a)) / (b - a).$$

Interprétation graphique. Si $A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$ sont deux points de la courbe C de f , ce taux est le **coefficient directeur de la droite (AB)**, appelée sécante. Il mesure la pente moyenne de la courbe entre a et b .

Interprétation physique. Si $f(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t , le taux de variation entre t_1 et t_2 est sa **vitesse moyenne** sur cet intervalle. Plus généralement, il mesure la variation moyenne de f par unité de variable.

On écrit souvent $b = a + h$, avec $h \neq 0$:

$$\tau(h) = (f(a + h) - f(a))/h.$$

Exemple : pour $f(x) = x^2$, entre 1 et 3, le taux vaut $(9 - 1)/(3 - 1) = 4$.

2. Nombre dérivé

Définition. On dit que f est **dérivable en a** si le taux de variation $(f(a + h) - f(a))/h$ tend vers un nombre réel L quand h tend vers 0. Ce nombre L est appelé **nombre dérivé de f en a** et se note $f'(a)$:

$$f'(a) = \text{limite quand } h \text{ tend vers } 0 \text{ de } (f(a + h) - f(a))/h.$$

En Première, la notion de limite est abordée de manière intuitive : on simplifie le taux de variation par h (qui est non nul), puis on regarde ce que devient l'expression lorsque h devient aussi proche de 0 qu'on veut.

Exemple : $f(x) = x^2$ en un réel a quelconque. $(f(a + h) - f(a))/h = (a^2 + 2ah + h^2 - a^2)/h = (2ah + h^2)/h = 2a + h$. Quand h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Le nombre dérivé est un **taux de variation instantané** : la vitesse instantanée d'un mobile, le débit instantané, la vitesse de réaction à un instant donné.

Une fonction n'est pas toujours dérivable. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 : $(\sqrt{h} - \sqrt{0})/h = 1/\sqrt{h}$ pour $h > 0$, et $1/\sqrt{h}$ devient aussi grand qu'on veut quand h tend vers 0. Il n'y a pas de limite finie. Graphiquement, la courbe a en l'origine une tangente verticale. De même, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 : le taux $(|h| - 0)/h$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$, il ne se rapproche d'aucun nombre unique (la courbe forme un angle).

3. Tangente à une courbe

Quand h tend vers 0, le point $B(a + h ; f(a + h))$ se rapproche de A le long de la courbe et la sécante (AB) se rapproche d'une droite limite passant par A , de coefficient directeur $f'(a)$.

Définition. Si f est dérivable en a , la **tangente** à la courbe C au point $A(a ; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété. Son équation réduite est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Justification. Une droite non verticale de coefficient directeur m passant par $A(a ; f(a))$ a une équation de la forme $y = mx + p$, avec $f(a) = ma + p$, donc $p = f(a) - ma$ et $y = m(x - a) + f(a)$. On remplace m par $f'(a)$.

Conséquences graphiques :

- $f'(a) > 0$: la tangente « monte » ; $f'(a) < 0$: elle « descend » ;
- $f'(a) = 0$: la tangente est horizontale.

Lecture graphique : pour lire $f'(a)$, on repère deux points de la tangente et on calcule (différence des ordonnées)/(différence des abscisses).

Au voisinage de a , la courbe est très proche de sa tangente : $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ pour h petit. C'est l'**approximation affine** de f en a . Par exemple, avec $f(x) = x^2$ en $a = 1$: $1,01^2 \approx 1 + 2 \times 0,01 = 1,02$ (valeur

exacte 1,0201).

4. Fonction dérivée et dérivées usuelles

Définition. Si f est dérivable en tout réel x d'un intervalle I , on dit que f est **dérivable sur I** . La fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f et se note f' .

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n (n entier, $n \geq 1$)	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$1/x$	$-1/x^2$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$] 0 ; +\infty[$

Démonstration pour $1/x$. Pour $a \neq 0$ et $h \neq 0$ assez petit pour que $a + h \neq 0$: $(1/(a + h) - 1/a)/h = [(a - (a + h))/(a(a + h))]/h = -h/(a(a + h)h) = -1/(a(a + h))$. Quand h tend vers 0 , cette expression tend vers $-1/a^2$. Donc la dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$.

Démonstration pour $\sqrt{x}$ ($a > 0$). On multiplie par la quantité conjuguée : $(\sqrt{a + h} - \sqrt{a})/h = (\sqrt{a + h} - \sqrt{a})(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})/(h(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})) = (a + h - a)/(h(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})) = 1/(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})$. Quand h tend vers 0 , cela tend vers $1/(2\sqrt{a})$.

Démonstration pour x^3 . $(a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$, donc le taux vaut $3a^2 + 3ah + h^2$, qui tend vers $3a^2$.

5. Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Fonction	Dérivée	Condition
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
$1/v$	$-v'/v^2$	v ne s'annule pas sur I
u/v	$(u'v - uv')/v^2$	v ne s'annule pas sur I

Fonction	Dérivée	Condition
$x \mapsto g(ax + b)$	$x \mapsto a \times g'(ax + b)$	$ax + b$ dans l'intervalle de dérivabilité de g

Démonstration de la dérivée d'un produit. Notons $f = uv$. Pour $h \neq 0$: $f(a + h) - f(a) = u(a + h)v(a + h) - u(a)v(a) = [u(a + h) - u(a)]v(a + h) + u(a)[v(a + h) - v(a)]$ (on a ajouté et retranché $u(a)v(a + h)$). En divisant par h : $(f(a + h) - f(a))/h = [(u(a + h) - u(a))/h] \times v(a + h) + u(a) \times [(v(a + h) - v(a))/h]$. Quand h tend vers 0, le premier crochet tend vers $u'(a)$, $v(a + h)$ tend vers $v(a)$ (une fonction dérivable est continue), le dernier crochet tend vers $v'(a)$. D'où $f'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Conséquences.

- Une fonction polynôme se dérive terme à terme : $(5x^3 - 2x + 7)' = 15x^2 - 2$.
- La formule du quotient s'obtient en écrivant $u/v = u \times (1/v)$.
- Erreur à ne jamais faire : $(uv)'$ n'est pas $u'v'$. Par exemple $(x \times x)' = 2x$, alors que $1 \times 1 = 1$.

Dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$. Le facteur a vient de ce qu'une variation h de x provoque une variation ah de $ax + b$. Exemples :

- $(2x + 1)^5$ a pour dérivée $2 \times 5(2x + 1)^4 = 10(2x + 1)^4$;
- $\sqrt{3x - 6}$ a pour dérivée $3/(2\sqrt{3x - 6})$ sur $]2; +\infty[$;
- $1/(4 - x)$ a pour dérivée $(-1) \times (-1/(4 - x)^2) = 1/(4 - x)^2$ sur $\mathbb{R}$ privé de 4.

Calculer une dérivée sans erreur

1. reconnaître la structure (somme, produit, quotient, composée affine) • 2. nommer u et v et calculer u' et v' • 3. appliquer la formule • 4. factoriser le résultat pour étudier son signe

6. Signe de la dérivée et variations

Théorème (admis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est constante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est **strictement** croissante sur I (de même pour décroissante avec $f' < 0$).

La réciproque partielle est intuitive : si f est croissante sur I , ses taux de variation sont positifs, donc ses nombres dérivés aussi.

L'hypothèse « intervalle » est indispensable : la fonction inverse a une dérivée $-1/x^2$ strictement négative, pourtant elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ privé de 0 (on a $-1 < 1$ et $f(-1) = -1 < f(1) = 1$). Elle est décroissante sur chacun des deux intervalles séparément.

Méthode d'étude des variations.

1. Préciser l'ensemble de définition et de dérivabilité.
2. Calculer $f'(x)$.

3. Factoriser $f'(x)$ pour en étudier le signe (tableau de signes, trinôme, quotient dont le dénominateur est un carré positif...).

4. Dresser le tableau de variations, avec les valeurs de f aux bornes et aux points où f' s'annule.

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, positive à l'extérieur de $[-1 ; 1]$ et négative à l'intérieur. f est croissante sur $]-\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 1]$, croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$.

7. Extremums

Définitions. Soit f définie sur I et c un réel de I .

- $f(c)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq f(c)$ pour tout x de I ; c'est un **minimum** si $f(x) \geq f(c)$ pour tout x de I .
- $f(c)$ est un **maximum local** (ou minimum local) s'il existe un intervalle ouvert J contenant c tel que $f(c)$ soit le maximum (ou minimum) de f sur $J \cap I$.
- Un **extremum** désigne un maximum ou un minimum.

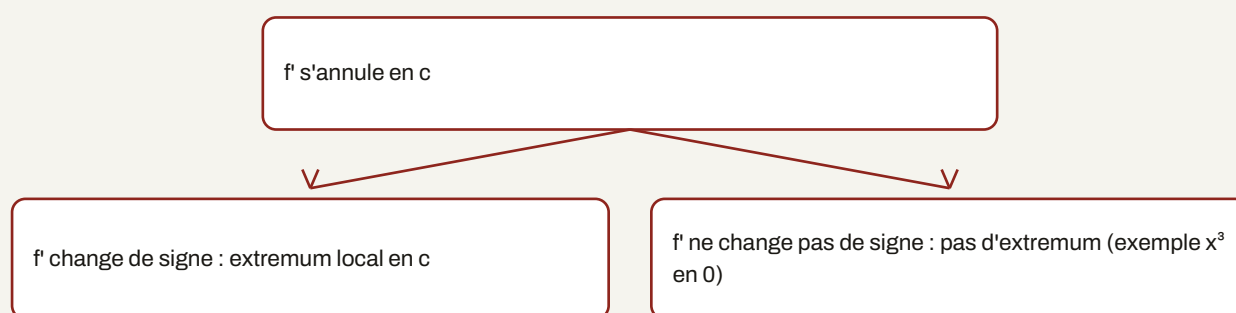
Propriété. Si f est dérivable sur un intervalle **ouvert** I et admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$: la tangente y est horizontale.

Attention, la réciproque est fautive. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: il n'y a pas d'extremum en 0 (la courbe traverse sa tangente horizontale).

Propriété (condition suffisante). Si f' s'annule en c **en changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local : un maximum si f' passe de positive à négative, un minimum si elle passe de négative à positive.

Sur un intervalle fermé $[a ; b]$, le maximum et le minimum peuvent aussi être atteints aux bornes, où f' n'a aucune raison de s'annuler : il faut toujours comparer les valeurs aux points critiques et aux bornes.

$f'(c) = 0$ en un point intérieur



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

8. Applications

Optimisation. Pour maximiser ou minimiser une grandeur (aire, volume, coût, concentration), on l'exprime en fonction d'une variable x , on précise l'intervalle des valeurs possibles de x , puis on étudie les variations de la fonction obtenue.

Démontrer une inégalité. Pour démontrer que $f(x) \geq g(x)$ sur I , on étudie $d(x) = f(x) - g(x)$: si son minimum sur I est positif ou nul, l'inégalité est prouvée.

Position d'une courbe et d'une tangente. On étudie le signe de $f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$.

Cinématique. Si $x(t)$ est la position d'un point mobile sur un axe, $v(t) = x'(t)$ est sa vitesse instantanée et $a(t) = v'(t)$ son accélération.

Exemples résolus

Exemple 1 : nombre dérivé par la définition et tangente

Énoncé. Soit $f(x) = x^2 - 3x$. a) Calculer $f'(2)$ à l'aide de la définition. b) En déduire l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Résolution. a) $f(2) = 4 - 6 = -2$. Pour $h \neq 0$: $f(2 + h) = (2 + h)^2 - 3(2 + h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = -2 + h + h^2$. Le taux de variation vaut $(f(2 + h) - f(2))/h = (h + h^2)/h = 1 + h$. Quand h tend vers 0, $1 + h$ tend vers 1. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$. Contrôle avec les formules : $f'(x) = 2x - 3$, $f'(2) = 1$. b) $T : y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 1 \times (x - 2) - 2$, soit $T : y = x - 4$.

Exemple 2 : étude complète d'une fonction polynôme

Énoncé. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f et préciser ses extremums locaux.

Résolution. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$. Le trinôme $x^2 - 2x - 3$ a pour racine évidente -1 ($1 + 2 - 3 = 0$), et le produit des racines vaut -3 , donc l'autre racine est 3. Ainsi $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$, positive à l'extérieur de $[-1 ; 3]$ et négative entre -1 et 3. $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ et $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	croissante	10	décroissant e	-22	croissante

f admet un maximum local 10 en $x = -1$ et un minimum local -22 en $x = 3$. Ce ne sont pas des extremums globaux sur $\mathbb{R}$ (par exemple $f(10) = 1\,000 - 300 - 90 + 5 = 615 > 10$).

Exemple 3 : une fonction quotient

Énoncé. Soit $g(x) = (2x + 1)/(x^2 + 2)$, définie sur $\mathbb{R}$. a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$. b) Étudier les variations de g et déterminer ses extremums.

Résolution. a) Pour tout x , $x^2 + 2 \geq 2 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient. Avec $u = 2x + 1$, $u' = 2$, $v = x^2 + 2$, $v' = 2x$: $g'(x) = (2(x^2 + 2) - (2x + 1)(2x))/(x^2 + 2)^2 = (2x^2 + 4 - 4x^2 - 2x)/(x^2 + 2)^2 = (-2x^2 - 2x + 4)/(x^2 + 2)^2$. On factorise : $-2x^2 - 2x + 4 = -2(x^2 + x - 2) = -2(x - 1)(x + 2)$ (racine évidente 1, produit -2). Donc $g'(x) = -2(x - 1)(x + 2)/(x^2 + 2)^2$. b) Le dénominateur est strictement positif, $g'(x)$ a le signe de $-2(x - 1)(x + 2)$: trinôme de coefficient $-2 < 0$, négatif à l'extérieur de $[-2 ; 1]$, positif entre -2 et 1. g est décroissante sur $]-\infty ; -2]$, croissante sur $[-2 ; 1]$, décroissante sur $[1 ; +\infty[$. $g(-2) = (-3)/6 = -1/2$ et $g(1) = 3/3 = 1$. **Minimum local $-1/2$ en $x = -2$, maximum local 1 en $x = 1$.**

Méthodes et pièges

- Pour une tangente, calcule séparément $f(a)$ et $f'(a)$, puis applique $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: ne confonds pas $f(a)$ et $f'(a)$.
- Pour un nombre dérivé par la définition, simplifie toujours par h avant de faire tendre h vers 0 ; écrire $h = 0$ avant de simplifier donne une forme $0/0$ sans sens.
- $(uv)' = u'v + uv'$ et $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$: dans le quotient, l'ordre compte et le signe moins est sur uv' .
- Pour $g(ax + b)$, n'oublie pas le facteur a : la dérivée de $(3x - 1)^4$ est $12(3x - 1)^3$, pas $4(3x - 1)^3$.
- Factorise toujours $f'(x)$ avant d'étudier son signe : un tableau de signes se fait sur un produit, pas sur une somme.
- Un dénominateur au carré est positif : le signe d'une dérivée de quotient est celui de son numérateur.
- Le lien entre signe de f' et variations ne vaut que sur un intervalle : découpe l'ensemble de définition en intervalles.
- $f'(c) = 0$ ne suffit pas pour un extremum : vérifie le changement de signe (contre-exemple x^3 en 0).
- Sur un intervalle fermé, compare aussi les valeurs aux bornes avant de conclure sur le maximum ou le minimum.
- Dans un problème concret, précise l'intervalle de la variable et donne la réponse avec son unité.

Vers le PASS

En PASS, la dérivée est d'abord un outil de **taux de variation** : vitesse d'une réaction, débit, vitesse d'élimination d'un médicament, pente d'une courbe dose-réponse. On y apprend à dériver des fonctions composées plus générales (exponentielles, logarithmes, puissances) et des fonctions de plusieurs variables par dérivées partielles, qui servent à **propager les incertitudes** de mesure. L'approximation affine $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$, vue ici comme proximité de la courbe et de sa tangente, devient la base des calculs d'incertitude relative. L'étude de signe et l'optimisation reviennent dans les modèles de pharmacocinétique (instant du pic de concentration) et en biophysique.

Les QCM demandent souvent de reconnaître en quelques secondes une dérivée fautive dans une liste ou de lire un extremum sur un graphe de dérivée : la rigueur sur les formules de ce chapitre est donc décisive.

Suite en PASS : Fonctions, dérivées et optimisation

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soit $f(x) = x^2$.
a) Calculer le taux de variation de f entre 1 et 3. b) Calculer, à l'aide de la définition, le nombre dérivé de f en 1.
2. Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.
a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = 3/x$ sur $]0 ; +\infty[$; c) $h(x) = 2\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$; d) $k(x) = x^5/5$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la dérivée de :

a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = (x + 1)/(x - 2)$ sur $]2 ; +\infty[$.

4. Calculer la dérivée de :

a) $f(x) = (3x - 1)^4$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = \sqrt{2x + 6}$ sur $] -3 ; +\infty[$; c) $h(x) = 1/(5 - x)$ sur $] -\infty ; 5[$.

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ au point d'abscisse 1.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ définie sur $[-2 ; 3]$.

a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. b) Dresser le tableau de variations de f . c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-2 ; 3]$. d) Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

7. Soit $f(x) = x^3 - 2x$ et C sa courbe.

a) Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1. b) Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) - (x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$. c) En déduire la position relative de C et T .

8. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $x + 1/x \geq 2$, et préciser le cas d'égalité.

9. Dans une plaque carrée de carton de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins un carré de côté x cm, puis on relève les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.

a) Montrer que le volume de la boîte est $V(x) = x(30 - 2x)^2$, pour $x \in]0 ; 15[$. b) Montrer que $V'(x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$. c) En déduire la valeur de x qui rend le volume maximal et ce volume.

10. Une entreprise fabrique q objets par jour, avec $1 \leq q \leq 50$. Le coût total, en euros, est $C(q) = q^2 + 10q + 100$. Le coût moyen est $CM(q) = C(q)/q$.

a) Exprimer $CM(q)$ sous la forme $q + 10 + 100/q$. b) Étudier les variations de CM sur $[1 ; 50]$. c) Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Que vaut-il ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Après une prise orale, la concentration d'un médicament dans le sang est modélisée par $C(t) = 20t/(t^2 + 4)$, en mg/L, où $t \geq 0$ est le temps en heures.

a) Calculer $C'(t)$ et étudier son signe. b) À quel instant la concentration est-elle maximale ? Que vaut-elle ? c) Calculer $C'(0)$ et l'interpréter. d) Pendant quelle période la concentration est-elle supérieure ou égale à 4 mg/L ?

12. On cherche les réels a et b tels que la courbe de $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ passe par le point $A(1 ; -2)$ et admette en ce point une tangente horizontale.

a) Traduire ces conditions par deux équations, puis déterminer a et b . b) Le point A correspond-il à un maximum local, un minimum local ou ni l'un ni l'autre ?

13. Un point mobile se déplace sur un axe. Sa position, en mètres, à l'instant t (en secondes) est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, pour $t \in [0 ; 5]$.

a) Calculer la vitesse $v(t) = x'(t)$. Pendant quelle période le mobile recule-t-il ? b) Calculer la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 3$. Commenter. c) Quelle est la plus grande vitesse, en valeur absolue, atteinte sur $[0 ; 5]$?

14. Soit $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Montrer à l'aide de la définition que, pour $a > 0$, $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$. b) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. c) En utilisant l'approximation affine en $a = 100$, donner une valeur approchée de $\sqrt{101}$, puis

comparer à la valeur de la calculatrice.

Corrigés

1. a) $(f(3) - f(1))/(3 - 1) = (9 - 1)/2 = 4$.
- b) Pour $h \neq 0$: $(f(1+h) - f(1))/h = (1 + 2h + h^2 - 1)/h = (2h + h^2)/h = 2 + h$. Quand h tend vers 0, $2 + h$ tend vers 2. $f'(1) = 2$.
2. a) $f'(x) = 12x^2 - 10x + 7$ (dérivation terme à terme : $4 \times 3x^2$, $5 \times 2x$, 7).
- b) $g = 3 \times (1/x)$, donc $g'(x) = 3 \times (-1/x^2) = -3/x^2$. c) $h'(x) = 2 \times 1/(2\sqrt{x})$, soit $h'(x) = 1/\sqrt{x}$. d) $k'(x) = 5x^4/5$, soit $k'(x) = x^4$.
3. a) $u = 2x + 1$, $u' = 2$; $v = x^2 - 3$, $v' = 2x$. $f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.
Contrôle en développant $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$, dont la dérivée est bien $6x^2 + 2x - 6$.
- b) $u = x + 1$, $u' = 1$; $v = x - 2$, $v' = 1$. $g'(x) = (1 \times (x - 2) - (x + 1) \times 1)/(x - 2)^2 = (x - 2 - x - 1)/(x - 2)^2 = -3/(x - 2)^2$.
4. a) Forme $g(ax + b)$ avec $g(X) = X^4$, $a = 3$: $f'(x) = 3 \times 4(3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3$.
- b) $g(X) = \sqrt{X}$, $a = 2$: $g'(x) = 2 \times 1/(2\sqrt{2x + 6}) = 1/\sqrt{2x + 6}$, valable car $2x + 6 > 0$ sur $]-3; +\infty[$. c) $g(X) = 1/X$, $a = -1$: $h'(x) = (-1) \times (-1/(5 - x)^2) = 1/(5 - x)^2$.
5. $f'(x) = 3x^2$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$. Tangente : $y = 3(x - 1) + 1$, soit $y = 3x - 2$.
6. a) $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x - 1)(x + 1)$. Trinôme de coefficient $-3 < 0$: $f'(x) < 0$ sur $[-2; -1[$ et sur $]1; 3]$, $f'(x) > 0$ sur $] -1; 1[$, $f'(-1) = f'(1) = 0$.
- b) $f(-2) = 8 - 6 + 2 = 4$; $f(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$; $f(1) = -1 + 3 + 2 = 4$; $f(3) = -27 + 9 + 2 = -16$. f est décroissante sur $[-2; -1]$ (de 4 à 0), croissante sur $[-1; 1]$ (de 0 à 4), décroissante sur $[1; 3]$ (de 4 à -16). c) On compare les valeurs aux bornes et aux points critiques : 4, 0, 4, -16. Le maximum est 4, atteint en $x = -2$ et en $x = 1$; le minimum est -16, atteint en $x = 3$. Le minimum est atteint à une borne, où f' ne s'annule pas. d) $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$. Tangente : $y = 3x + 2$.
7. a) $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f(1) = 1 - 2 = -1$; $f'(1) = 1$. T : $y = 1 \times (x - 1) - 1$, soit T : $y = x - 2$.
- b) $(x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2$. Et $f(x) - (x - 2) = x^3 - 2x - x + 2 = x^3 - 3x + 2$. L'égalité est vérifiée. c) $(x - 1)^2 \geq 0$, donc la différence a le signe de $x + 2$ (et s'annule en $x = 1$). C est au-dessus de T sur $]-2; +\infty[$ (en touchant T en $x = 1$), en dessous sur $]-\infty; -2[$, et les deux se coupent en $x = -2$.
8. Soit $f(x) = x + 1/x$ sur $]0; +\infty[$. $f'(x) = 1 - 1/x^2 = (x^2 - 1)/x^2 = (x - 1)(x + 1)/x^2$. Sur $]0; +\infty[$, $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$: son minimum est $f(1) = 2$. Donc $x + 1/x \geq 2$ pour tout $x > 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.
9. a) Le fond de la boîte est un carré de côté $30 - 2x$ et la hauteur vaut x . Il faut $x > 0$ et $30 - 2x > 0$, soit $x \in]0; 15[$. $V(x) = x(30 - 2x)^2$.
- b) Produit $u \times w$ avec $u = x$, $u' = 1$, $w = (30 - 2x)^2$, $w' = (-2) \times 2(30 - 2x) = -4(30 - 2x)$. $V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)[(30 - 2x) - 4x] = (30 - 2x)(30 - 6x)$. c) Sur $]0; 15[$, $30 - 2x > 0$, donc $V'(x)$ a le signe de $30 - 6x$: positif pour $x < 5$, négatif pour $x > 5$. V est croissante sur $]0; 5]$ et décroissante sur $[5; 15[$. $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$. Volume maximal 2 000 cm³ (soit 2 L) pour $x = 5$ cm.
10. a) $CM(q) = (q^2 + 10q + 100)/q = q + 10 + 100/q$.
- b) $CM'(q) = 1 - 100/q^2 = (q^2 - 100)/q^2 = (q - 10)(q + 10)/q^2$. Sur $[1; 50]$, $q + 10 > 0$ et $q^2 > 0$: le signe est celui de $q - 10$. CM est décroissante sur $[1; 10]$ et croissante sur $[10; 50]$. c) $CM(10) = 10 + 10 + 10 = 30$. Le

coût moyen est minimal pour 10 objets par jour : 30 euros par objet.

11. a) $u = 20t$, $u' = 20$; $v = t^2 + 4$, $v' = 2t$. $C'(t) = (20(t^2 + 4) - 20t \times 2t)/(t^2 + 4)^2 = (80 - 20t^2)/(t^2 + 4)^2 = 20(4 - t^2)/(t^2 + 4)^2 = 20(2 - t)(2 + t)/(t^2 + 4)^2$. Sur $[0 ; +\infty[$, $2 + t > 0$ et le dénominateur est positif : $C'(t) > 0$ sur $[0 ; 2[$, $C'(2) = 0$, $C'(t) < 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

b) C est croissante sur $[0 ; 2]$ puis décroissante. $C(2) = 40/8 = 5$. **Concentration maximale 5 mg/L, atteinte 2 heures après la prise.** c) $C'(0) = 20 \times 4/16 = 5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$: au moment de la prise, la concentration augmente à la vitesse instantanée de 5 mg/L par heure. d) $C(t) \geq 4 \iff 20t \geq 4(t^2 + 4)$ (car $t^2 + 4 > 0$) $\iff 4t^2 - 20t + 16 \leq 0 \iff t^2 - 5t + 4 \leq 0$. Racines 1 et 4 (somme 5, produit 4), trinôme négatif entre ses racines. **La concentration est au moins 4 mg/L entre $t = 1 \text{ h}$ et $t = 4 \text{ h}$, soit pendant 3 heures.**

12. a) A sur la courbe : $f(1) = 1 + a + b = -2$, soit $a + b = -3$. Tangente horizontale : $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ et $f'(1) = 3 + 2a + b = 0$, soit $2a + b = -3$. En soustrayant la première équation de la seconde : $a = 0$, puis $b = -3$. **$a = 0$ et $b = -3$, $f(x) = x^3 - 3x$.** Vérification : $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f'(1) = 3 - 3 = 0$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ est négative sur $] -1 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$: elle change de signe en 1, du négatif au positif. **A correspond à un minimum local.**

13. a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3)$. Coefficient $3 > 0$: $v(t) < 0$ entre 1 et 3. **Le mobile recule pour $t \in]1 ; 3[$.**

b) $x(0) = 0$ et $x(3) = 27 - 54 + 27 = 0$. Vitesse moyenne $= (0 - 0)/3 = 0 \text{ m/s}$. Le mobile n'est pas resté immobile : il a avancé jusqu'à $x(1) = 4 \text{ m}$ puis est revenu à son point de départ. La vitesse moyenne ne renseigne que sur le déplacement global. c) v est un trinôme de coefficient positif, minimal en $t = 12/6 = 2$, avec $v(2) = 12 - 24 + 9 = -3$. Aux bornes : $v(0) = 9$ et $v(5) = 75 - 60 + 9 = 24$. Sur $[0 ; 5]$, $v(t)$ varie donc entre -3 et 24, et $|v(t)| \leq 24$. **La plus grande vitesse en valeur absolue est 24 m/s, atteinte à $t = 5 \text{ s}$.**

14. a) Pour $h \neq 0$ avec $a + h > 0$: $(\sqrt{a + h} - \sqrt{a})/h = ((a + h) - a)/(h(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})) = 1/(\sqrt{a + h} + \sqrt{a})$, en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{a + h} + \sqrt{a}$. Quand h tend vers 0, $\sqrt{a + h}$ tend vers $\sqrt{a}$, donc le quotient tend vers $1/(2\sqrt{a})$. **$f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.**

b) Pour $h > 0$: $(\sqrt{h} - 0)/h = 1/\sqrt{h}$. Quand h tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 et $1/\sqrt{h}$ devient aussi grand qu'on veut : pas de limite finie. **f n'est pas dérivable en 0** (tangente verticale à l'origine). c) $f(100) = 10$ et $f'(100) = 1/20 = 0,05$. $f(100 + h) \approx f(100) + f'(100)h$ avec $h = 1$: $\sqrt{101} \approx 10,05$. La calculatrice donne $\sqrt{101} \approx 10,0499$: l'écart est d'environ 0,0001.