

Suites numériques : généralités, arithmétiques et géométriques

COURS • M02 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	8
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Calculer des termes d'une suite définie de façon explicite ou par une relation de récurrence.
- Représenter graphiquement une suite par un nuage de points et interpréter ce graphique.
- Étudier le sens de variation d'une suite par le signe de $u(n+1) - u(n)$, par le quotient $u(n+1)/u(n)$ ou par les variations d'une fonction.
- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, déterminer sa raison et son premier terme.
- Exprimer le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique en fonction de n .
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Modéliser une évolution à accroissements constants (arithmétique) ou à taux constant (géométrique).
- Conjecturer le comportement d'une suite quand n devient grand (limite finie, infinie, absence de limite).
- Écrire et comprendre un algorithme qui calcule un terme, une somme ou un seuil.

Cours

1. Définition et modes de génération

Une **suite numérique** u est une fonction qui, à tout entier naturel n (éventuellement à partir d'un certain rang), associe un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n , appelé **terme de rang n** ou terme d'indice n . La suite elle-même se note u ou (u_n) . Il ne faut pas confondre la suite (u_n) , qui est un objet entier, et le nombre u_n , qui est un de ses termes.

Le terme qui suit u_n est $u(n+1)$; celui qui le précède est $u(n-1)$. Attention : $u(n+1)$ n'est pas $u_n + 1$. Le premier est le terme suivant, le second est le terme u_n augmenté de 1.

Il existe deux grands modes de génération au programme.

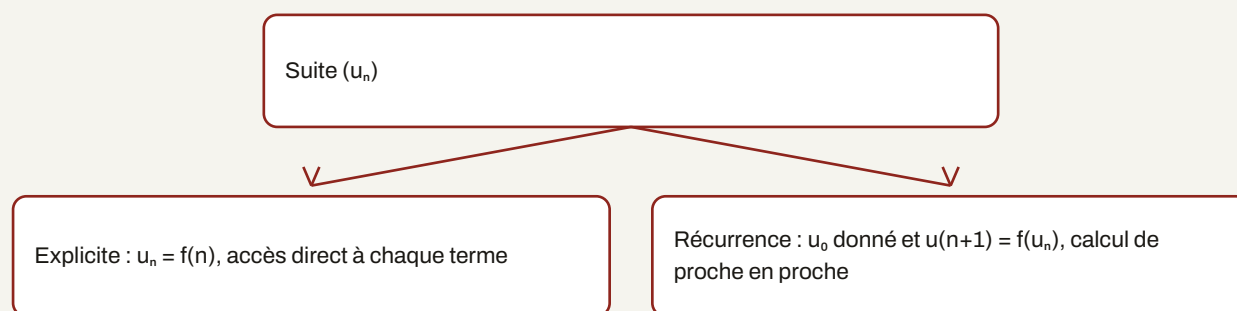
Mode explicite. On donne u_n directement en fonction de n : $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$. Par exemple $u_n = 3n^2 - 1$. On calcule n'importe quel terme directement : $u_{100} = 3 \times 100 - 1 = 299$.

Mode par récurrence. On donne le premier terme et une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent : $u_0 = 2$ et $u(n+1) = f(u_n)$. Par exemple $u_0 = 2$ et $u(n+1) = 3u_n - 1$. On obtient $u_1 = 3 \times 2 - 1 = 5$, $u_2 = 3 \times 5 - 1 = 14$, $u_3 = 41$. Pour calculer u_{100} , il faut en principe calculer tous les termes précédents : c'est là qu'un algorithme devient utile.

Une même suite peut parfois être décrite des deux façons. La suite des nombres pairs vérifie $u_n = 2n$ (explicite) et aussi $u_0 = 0$, $u(n+1) = u_n + 2$ (récurrence).

Représentation graphique. Dans un repère, une suite se représente par le nuage des points de coordonnées $(n ; u_n)$. Ce ne sont que des points isolés : on ne les relie pas, puisque la suite n'est pas définie entre deux entiers. Pour une suite $u(n+1) = f(u_n)$, on peut aussi construire les termes sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe de f et la droite d'équation $y = x$ (construction « en escalier » ou « en escargot »), qui permet de conjecturer le comportement de la suite.

Deux façons de définir une suite



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

2. Sens de variation

Définitions. Une suite (u_n) est :

- **croissante** si, pour tout n , $u(n+1) \geq u_n$;
- **strictement croissante** si, pour tout n , $u(n+1) > u_n$;
- **décroissante** si, pour tout n , $u(n+1) \leq u_n$;
- **strictement décroissante** si, pour tout n , $u(n+1) < u_n$;
- **constante** (ou stationnaire) si, pour tout n , $u(n+1) = u_n$;
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Ces propriétés peuvent n'être vraies qu'à partir d'un certain rang : on dit alors « croissante à partir du rang p ». Une suite peut aussi n'être ni croissante ni décroissante, comme $u_n = (-1)^n$ qui vaut alternativement 1 et -1.

Méthode 1 : signe de la différence. On calcule $u(n+1) - u_n$ et on étudie son signe. Si elle est positive pour tout n , la suite est croissante ; négative, décroissante. C'est la méthode la plus générale.

Exemple : $u_n = n^2 - 6n + 1$. On a $u(n+1) - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 1 - (n^2 - 6n + 1) = 2n + 1 - 6 = 2n - 5$. Cette différence est négative pour $n \leq 2$ et positive pour $n \geq 3$: la suite décroît de u_0 à u_3 puis croît à partir du rang 3.

Méthode 2 : quotient. Si tous les termes sont strictement positifs, on compare $u(n+1)/u_n$ à 1. Si le quotient est supérieur ou égal à 1 pour tout n , la suite est croissante ; s'il est inférieur ou égal à 1, elle est décroissante. Cette méthode est adaptée aux produits et aux puissances. La condition de positivité est indispensable : pour des termes négatifs, multiplier par u_n renverserait l'inégalité.

Méthode 3 : fonction associée (suites explicites). Si $u_n = f(n)$ et si f est monotone sur $[0 ; +\infty[$, alors (u_n) a le même sens de variation que f . Par exemple $u_n = \sqrt{n+2}$ est croissante car $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est croissante. Attention : la réciproque est fautive, et cette méthode ne s'applique pas aux suites définies par récurrence ($u(n+1) = f(u_n)$ avec f croissante ne donne pas une suite croissante en général).

3. Suites arithmétiques

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout n , $u(n+1) = u_n + r$. Le réel r est la **raison** de la suite. On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre.

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u(n+1) - u_n$ et on montre que le résultat est une constante (indépendante de n). Pour démontrer qu'elle ne l'est pas, il suffit de trouver deux écarts consécutifs différents, par exemple $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Terme général. Si (u_n) est arithmétique de raison r , alors pour tout n :

$u_n = u_0 + nr$, et plus généralement $u_n = u(p) + (n - p)r$ pour tous entiers n et p .

Justification : pour passer de u_0 à u_n , on ajoute n fois la raison r .

Variations. Puisque $u(n+1) - u_n = r$: si $r > 0$, la suite est strictement croissante ; si $r < 0$, strictement décroissante ; si $r = 0$, constante.

Représentation graphique. Les points $(n ; u_0 + nr)$ sont **alignés** sur la droite d'équation $y = rx + u_0$. Une suite arithmétique modélise une **croissance linéaire** : l'augmentation absolue est la même à chaque étape.

Somme des premiers entiers. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2.$$

Démonstration : on écrit la somme S deux fois, dans un sens puis dans l'autre, et on additionne terme à terme : $S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$ $S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$ $2S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1)$, car il y a n termes égaux à $n+1$.

Par exemple $1 + 2 + \dots + 100 = 100 \times 101/2 = 5\,050$.

Somme de termes consécutifs. Pour une suite arithmétique, la même idée donne :

$$\text{somme} = (\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})/2.$$

Ainsi $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)(u_0 + u_n)/2$. Attention : de u_0 à u_n , il y a $n+1$ termes ; de $u(p)$ à u_n , il y en a $n - p + 1$.

4. Suites géométriques

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout n , $u(n+1) = q \times u_n$. Le réel q est la **raison**. On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre.

Pour démontrer qu'une suite à termes non nuls est géométrique, on montre que $u(n+1)/u_n$ est constant, ou on écrit directement $u(n+1)$ sous la forme $q \times u_n$. Pour démontrer qu'elle ne l'est pas, on trouve deux quotients consécutifs différents.

Terme général. Si (u_n) est géométrique de raison q , alors pour tout n :

$$u_n = u_0 \times q^n, \text{ et plus généralement } u_n = u(p) \times q^{n-p}.$$

Variations (cas $u_0 > 0$ et $q > 0$) :

- si $q > 1$, la suite est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, elle est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, elle est constante.

Justification : $u(n+1) - u_n = u_0 q^n (q - 1)$, du signe de $q - 1$ lorsque $u_0 > 0$ et $q > 0$. Si $u_0 < 0$, les sens sont inversés. Si $q < 0$, les termes changent de signe à chaque rang : la suite n'est pas monotone.

Évolutions en pourcentage. Augmenter une quantité de $t\%$ revient à la multiplier par $1 + t/100$; la diminuer de $t\%$ revient à la multiplier par $1 - t/100$. Une quantité qui évolue chaque année du même pourcentage est donc modélisée par une suite géométrique : c'est la **croissance exponentielle** (ou décroissance exponentielle). Par exemple, une hausse de 3% par an correspond à $q = 1,03$; une baisse de 20% à $q = 0,8$. Attention : deux hausses successives de 10% font une hausse de 21% ($1,1 \times 1,1 = 1,21$), pas de 20% .

Somme des puissances. Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier n :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q).$$

Démonstration : notons S cette somme. Alors $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. En soustrayant, presque tous les termes disparaissent : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$, et on divise par $1 - q \neq 0$. Si $q = 1$, la somme vaut simplement $n + 1$.

Somme de termes consécutifs. Pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\text{somme} = (\text{premier terme}) \times (1 - q^{\text{nombre de termes}})/(1 - q).$$

$$\text{Ainsi } u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0(1 - q^{n+1})/(1 - q).$$

	Arithmétique	Géométrique
Récurrence	$u(n+1) = u_n + r$	$u(n+1) = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Entre deux rangs	$u_n = u(p) + (n - p)r$	$u_n = u(p) \times q^{n-p}$
Somme	nombre de termes $\times$ (premier + dernier)/2	premier $\times (1 - q^{\text{nombre de termes}})/(1 - q)$
Modèle	croissance linéaire	croissance exponentielle

	Arithmétique	Géométrie
Graphique	points alignés	points sur une courbe qui s'envole ou s'écrase

5. Approche intuitive de la limite

On s'intéresse au comportement des termes quand n devient très grand. En Première, cette étude est **intuitive** : on conjecture à l'aide d'un tableau de valeurs, d'un graphique ou d'un algorithme.

- On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ si ses termes finissent par dépasser n'importe quel nombre fixé, aussi grand soit-il, et restent au-dessus. Exemple : $u_n = n^2$, ou toute suite arithmétique de raison $r > 0$.
- On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ si ses termes finissent par devenir inférieurs à n'importe quel nombre fixé.
- On dit que (u_n) **converge vers un réel** ℓ si ses termes finissent par être aussi proches de ℓ qu'on le souhaite. Exemple : $u_n = 1/n$ tend vers 0 ; $u_n = 2 + 1/(n + 1)$ tend vers 2.
- Une suite peut n'avoir **aucune limite** : $u_n = (-1)^n$ oscille entre -1 et 1 sans se stabiliser.

Cas des suites géométriques q^n (conjectures admises en Première) :

- si $q > 1$, q^n tend vers $+\infty$;
- si $q = 1$, q^n vaut toujours 1 ;
- si $-1 < q < 1$, q^n tend vers 0 ;
- si $q \leq -1$, q^n n'a pas de limite.

Conséquence : si $0 < q < 1$, la somme $1 + q + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$ se rapproche de $1/(1 - q)$. Par exemple $1 + 1/2 + 1/4 + \dots$ se rapproche de 2.

Une suite arithmétique de raison $r \neq 0$ tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$. Croissance exponentielle et croissance linéaire tendent toutes deux vers $+\infty$, mais la première finit toujours par dépasser la seconde, même si elle part plus bas.

6. Algorithmes : terme, somme et seuil

Les algorithmes sont écrits en langage Python.

Calcul d'un terme d'une suite récurrente. Pour $u_0 = 2$ et $u(n+1) = 3u_n - 1$:

```
def terme(n):
    u = 2
    for k in range(n):
        u = 3 * u - 1
    return u
```

La boucle s'exécute n fois : après le passage k , la variable u contient $u(k+1)$. Ainsi `terme(3)` renvoie 41.

Calcul d'une somme. Pour obtenir $u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

```
def somme(n):
    u = 2
    s = u
```



```
for k in range(n):  
    u = 3 * u - 1  
    s = s + u  
return s
```

Recherche d'un seuil. On cherche le plus petit rang n tel que u_n dépasse une valeur A . On ne connaît pas à l'avance le nombre d'étapes : on utilise une boucle « tant que ».

```
def seuil(A):  
    n = 0  
    u = 2  
    while u <= A:  
        n = n + 1  
        u = 3 * u - 1  
    return n
```

La condition de la boucle est la **négarion** de ce qu'on cherche : on continue tant que le seuil n'est pas atteint. Il faut aussi être sûr que le seuil sera atteint, sinon la boucle ne s'arrête jamais (par exemple chercher $u_n > 3$ pour une suite qui tend vers 2).

Algorithme de seuil

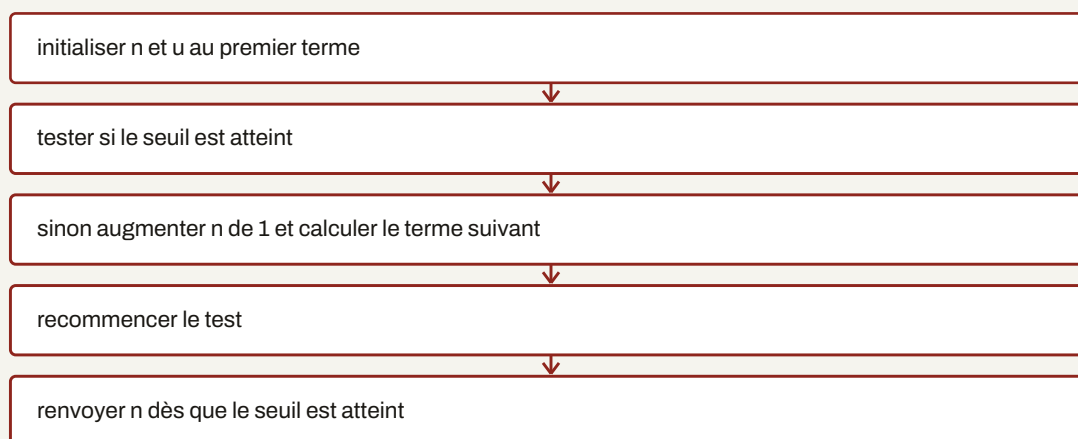


Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Exemples résolus

Exemple 1 : une suite arithmétique

Énoncé. Soit $u_0 = 2$ et, pour tout n , $u(n+1) = u_n + 3$. a) Quelle est la nature de la suite ? Exprimer u_n en fonction de n . b) Calculer u_{20} . c) Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

Résolution. a) Pour tout n , $u(n+1) - u_n = 3$, constante : (u_n) est **arithmétique de raison $r = 3$** et de premier terme $u_0 = 2$. Donc $u_n = u_0 + nr = 2 + 3n$. b) $u_{20} = 2 + 3 \times 20 = 62$. c) De u_0 à u_{20} , il y a 21 termes. $S = 21 \times (u_0 + u_{20})/2 = 21 \times (2 + 62)/2 = 21 \times 32 = 672$.

Exemple 2 : une croissance bactérienne

Énoncé. Une culture contient 500 bactéries. Leur nombre augmente de 20 % par heure. On note v_n le nombre de bactéries au bout de n heures. a) Justifier que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n . b) Calculer v_5 (arrondi à l'unité). c) Déterminer au bout de combien d'heures entières la population dépasse 5 000 bactéries.

Résolution. a) Augmenter de 20 % revient à multiplier par $1 + 20/100 = 1,2$. Donc $v_{n+1} = 1,2 v_n$: la suite est **géométrique de raison $q = 1,2$** et de premier terme $v_0 = 500$. Ainsi $v_n = 500 \times 1,2^n$. b) $v_5 = 500 \times 1,2^5 = 500 \times 2,48832 = 1\,244,16$, soit **environ 1 244 bactéries**. c) Comme $v_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est strictement croissante. On cherche le plus petit n tel que $500 \times 1,2^n > 5\,000$, c'est-à-dire $1,2^n > 10$. À la calculatrice : $1,2^{12} \approx 8,916$ et $1,2^{13} \approx 10,699$. Donc $v_{12} \approx 4\,458 < 5\,000$ et $v_{13} \approx 5\,350 > 5\,000$. **La population dépasse 5 000 bactéries au bout de 13 heures.** On obtient la même réponse avec l'algorithme de seuil, en initialisant $u = 500$, en remplaçant la mise à jour par $u = 1.2 * u$ et en appelant `seuil(5000)`.

Exemple 3 : deux études de sens de variation

Énoncé. Étudier le sens de variation des suites définies pour tout n par : a) $u_n = n^2 - 6n + 1$; b) $w_n = 2^n/(n+1)$.

Résolution. a) $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 1 - n^2 + 6n - 1 = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 1 - n^2 + 6n - 1 = 2n - 5$. Pour $n \in \{0 ; 1 ; 2\}$, $2n - 5 < 0$; pour $n \geq 3$, $2n - 5 > 0$. Valeurs : $u_0 = 1$, $u_1 = -4$, $u_2 = -7$, $u_3 = -8$, $u_4 = -7$. **La suite décroît de u_0 à u_3 , puis est strictement croissante à partir du rang 3.** b) Pour tout n , $w_n > 0$: on peut utiliser le quotient. $w_{n+1}/w_n = [2^{n+1}/(n+2)] \times [(n+1)/2^n] = 2(n+1)/(n+2)$. Or $2(n+1)/(n+2) \geq 1 \iff 2n+2 \geq n+2$ (car $n+2 > 0$) $\iff n \geq 0$, ce qui est toujours vrai. **La suite (w_n) est croissante** (strictement à partir du rang 1, puisque le quotient vaut 1 pour $n = 0$: $w_0 = w_1 = 1$).

Méthodes et pièges

- Pour montrer qu'une suite est arithmétique, calcule $u_{n+1} - u_n$ et obtiens une constante ; pour une suite géométrique, écris $u_{n+1} = q \times u_n$. Des exemples numériques ne suffisent jamais à le prouver, mais un seul contre-exemple suffit à le réfuter.
- Compte bien les termes d'une somme : de u_0 à u_n , il y a $n+1$ termes ; de u_1 à u_n , il y en a n .
- Ne confonds pas u_{n+1} (terme suivant) avec $u_n + 1$ (terme augmenté de 1).
- Une évolution de t % se traduit par une multiplication par $1 + t/100$, pas par une addition : c'est une suite géométrique, pas arithmétique.
- La méthode du quotient exige des termes strictement positifs ; sinon, utilise la différence.
- Pour une suite explicite $u_n = f(n)$, les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ donnent celles de la suite, mais ce raccourci ne vaut pas pour une suite récurrente.
- Dans un algorithme de seuil, la condition du « tant que » est le contraire de l'objectif : pour chercher $u_n > A$, on boucle tant que $u \leq A$.
- Pour un seuil, vérifie toujours les deux rangs encadrants (celui qui ne suffit pas et celui qui suffit) et réponds par un entier, avec une phrase dans l'unité du problème.
- Une limite se conjecture en Première : écris « il semble que la suite tende vers... », en t'appuyant sur des valeurs ou un graphique.

Vers le PASS

Les suites géométriques sont la version discrète de la croissance et de la décroissance exponentielles, omniprésentes en santé : dilutions successives au laboratoire (chaque dilution au dixième multiplie la concentration par 0,1), décroissance radioactive en médecine nucléaire comptée en demi-vies (la quantité est multipliée par 1/2 à chaque période), élimination d'un médicament dont une fraction fixe disparaît à chaque intervalle, croissance d'une population cellulaire. Les doses répétées d'un traitement mènent à des suites de la forme $u(n+1) = q u_n + d$, dont l'étude passe par une suite géométrique auxiliaire, et la somme géométrique explique pourquoi la quantité se stabilise vers un plateau.

En PASS, ces modèles sont réécrits avec l'exponentielle et le logarithme, qui permettent de résoudre directement $q^n > A$ sans tâtonner, et de passer sans difficulté d'une échelle multiplicative à une échelle additive (pH, décibels, échelles logarithmiques des graphiques).

Suite en PASS : Logarithmes, exponentielles et échelles

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Soit $u_n = 3n - 7$ pour tout entier naturel n . Calculer u_0 , u_1 et u_{10} , puis montrer que la suite est arithmétique et préciser sa raison.
2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison 2. Exprimer v_n en fonction de n , calculer v_6 , puis la somme $v_0 + v_1 + \dots + v_6$.
3. Soit $u_0 = 1$ et $u(n+1) = 2u_n - 3$. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. Calculer la somme des entiers de 1 à 100, puis la somme des nombres impairs $1 + 3 + 5 + \dots + 99$.
5. Le prix d'un appareil est de 200 euros. Il baisse de 5 % chaque année. On note p_n son prix au bout de n années. Exprimer p_n en fonction de n et calculer p_3 au centime près.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $u_n = n^2 + n$ pour tout entier naturel n .
a) Étudier le sens de variation de (u_n) . b) Conjecturer la limite de (u_n) . c) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
7. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 17$ et $u_{12} = 38$.
a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0 . b) Calculer la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{12}$. c) Existe-t-il un rang n tel que $u_n = 101$? Si oui, lequel ?
8. (v_n) est une suite géométrique à termes positifs telle que $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$.
a) Déterminer la raison q et v_0 . b) Exprimer v_n en fonction de n . c) Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_9$.
9. On injecte à un patient une dose de 10 mg d'un médicament. Chaque heure, l'organisme élimine 30 % de la quantité présente. On note d_n la quantité, en mg, présente au bout de n heures.
a) Exprimer d_n en fonction de n et calculer d_3 . b) Au bout de combien d'heures entières la quantité devient-elle inférieure à 1 mg ? c) Écrire un algorithme en Python qui renvoie ce rang. d) Conjecturer la limite de (d_n) et l'interpréter.

10. Un salarié a le choix entre deux contrats, avec un salaire mensuel initial de 1 000 euros la première année. Contrat A : augmentation de 50 euros par an. Contrat B : augmentation de 4 % par an. On note a_n et b_n les salaires mensuels de l'année n ($n = 0$ pour la première année).

a) Exprimer a_n et b_n en fonction de n . b) Calculer a_{10} et b_{10} (b_{10} au centime près). c) À partir de quelle année le contrat B devient-il plus avantageux ?

Niveau 3 : vers le PASS

11. Un patient reçoit chaque jour une même dose de médicament. On modélise la quantité présente dans le sang juste après chaque prise par $u_0 = 10$ et $u(n+1) = 0,8u_n + 4$ (en mg).

a) Calculer u_1 et u_2 . b) On pose $v_n = u_n - 20$. Montrer que (v_n) est géométrique. c) En déduire u_n en fonction de n , puis u_5 au millième près. d) Étudier le sens de variation de (u_n) et conjecturer sa limite. Interpréter.

12. Calculer la somme $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 1\,458$, en justifiant le nombre de termes.

13. Pour tout n , on pose $S_n = 1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n . b) Conjecturer la limite de (S_n) . c) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geq 1,999$.

14. Un échantillon radioactif a une activité initiale de 8 000 Bq. Son activité est divisée par 2 toutes les 6 heures. On note A_n l'activité au bout de n périodes de 6 heures.

a) Exprimer A_n en fonction de n et calculer l'activité au bout de 24 heures. b) Quelle proportion des noyaux initiaux s'est désintégrée au bout de 18 heures ? c) Au bout de combien d'heures l'activité devient-elle inférieure à 100 Bq (en nombre entier de périodes) ?

Corrigés

1. $u_0 = 3 \times 0 - 7 = -7$; $u_1 = 3 - 7 = -4$; $u_{10} = 30 - 7 = 23$. Pour tout n , $u(n+1) - u_n = 3(n+1) - 7 - (3n - 7) = 3$, constante. **(u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme -7 ; $u_{10} = 23$.**

2. $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 2^n$. $v_6 = 5 \times 64 = 320$. De v_0 à v_6 , il y a 7 termes : somme = $5 \times (1 - 2^7)/(1 - 2) = 5 \times (1 - 128)/(-1) = 5 \times 127 = 635$. Contrôle : $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 = 635$.

3. $u_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$; $u_2 = 2 \times (-1) - 3 = -5$; $u_3 = 2 \times (-5) - 3 = -13$. Les écarts $u_1 - u_0 = -2$ et $u_2 - u_1 = -4$ sont différents : **la suite n'est pas arithmétique**. Les quotients $u_1/u_0 = -1$ et $u_2/u_1 = 5$ sont différents : **elle n'est pas géométrique**.

4. $1 + 2 + \dots + 100 = 100 \times 101/2 = 5\,050$. Les impairs de 1 à 99 forment une suite arithmétique de raison 2 ; le k -ième impair est $2k - 1$, et $2k - 1 = 99$ donne $k = 50$: il y a 50 termes. Somme = $50 \times (1 + 99)/2 = 2\,500$.

5. Une baisse de 5 % revient à multiplier par 0,95 : $p_n = 200 \times 0,95^n$ (suite géométrique de raison 0,95). $p_3 = 200 \times 0,95^3 = 200 \times 0,857375 = 171,475$, soit **$p_3 \approx 171,48$ euros** (arrondi au centime).

6. a) $u(n+1) - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 > 0$. **La suite est strictement croissante.**

b) Les termes $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$, $u_{10} = 110$, $u_{100} = 10\,100$ grandissent sans borne : **il semble que (u_n) tende vers $+\infty$** . c) L'écart $u(n+1) - u_n = 2n + 2$ dépend de n (2 puis 4 puis 6) : **la suite n'est pas arithmétique**.

7. a) $u_{12} = u_5 + 7r$, donc $38 = 17 + 7r$ et $r = 3$. Puis $u_0 = u_5 - 5r = 17 - 15 = 2$. Ainsi $u_n = 2 + 3n$.

b) 13 termes de $u_0 = 2$ à $u_{12} = 38$: somme = $13 \times (2 + 38)/2 = 13 \times 20 = 260$. c) $2 + 3n = 101 \iff 3n = 99 \iff n = 33$, entier. **Oui : $u_{33} = 101$.**

8. a) $v_5 = v_2 \times q^3$, donc $q^3 = 96/12 = 8$. La suite étant à termes positifs, $q > 0$ et $q = 2$. Puis $v_2 = v_0 \times q^2$, donc $v_0 = 12/4 = 3$.

b) $v_n = 3 \times 2^n$. c) 10 termes de v_0 à v_9 : somme = $3 \times (1 - 2^{10})/(1 - 2) = 3 \times 1\,023 = 3\,069$.

9. a) Éliminer 30 % revient à multiplier par 0,7 : $d_n = 10 \times 0,7^n$. $d_3 = 10 \times 0,343 = 3,43$ mg.

b) On cherche le plus petit n tel que $10 \times 0,7^n < 1$, soit $0,7^n < 0,1$. Or $0,7^6 = 0,117649$ et $0,7^7 \approx 0,0824$. Donc $d_6 \approx 1,18$ mg et $d_7 \approx 0,82$ mg. **La quantité passe sous 1 mg au bout de 7 heures.** c) Un algorithme possible :

```
def seuil():
    n = 0
    d = 10
    while d >= 1:
        n = n + 1
        d = 0.7 * d
    return n
```

Il renvoie 7. d) La raison 0,7 est comprise entre 0 et 1, donc $0,7^n$ tend vers 0. **(d_n) semble tendre vers 0 : le médicament finit par être presque totalement éliminé.**

10. a) $a_n = 1\,000 + 50n$ (arithmétique de raison 50) et $b_n = 1\,000 \times 1,04^n$ (géométrique de raison 1,04).

b) $a_{10} = 1\,000 + 500 = 1\,500$ euros. $b_{10} = 1\,000 \times 1,04^{10} \approx 1\,000 \times 1,480244 \approx 1\,480,24$ euros. c) On compare : $a_{11} = 1\,550$ et $b_{11} \approx 1\,539,45$; $a_{12} = 1\,600$ et $b_{12} \approx 1\,601,03$. Donc $b_{11} < a_{11}$ mais $b_{12} > a_{12}$. **Le contrat B devient plus avantageux à partir de $n = 12$, c'est-à-dire la treizième année.** On retrouve le fait qu'une croissance exponentielle finit par dépasser une croissance linéaire.

11. a) $u_1 = 0,8 \times 10 + 4 = 12$; $u_2 = 0,8 \times 12 + 4 = 13,6$.

b) $v(n+1) = u(n+1) - 20 = 0,8u_n + 4 - 20 = 0,8u_n - 16 = 0,8(u_n - 20) = 0,8v_n$. **(v_n) est géométrique de raison 0,8, de premier terme $v_0 = 10 - 20 = -10$.** c) $v_n = -10 \times 0,8^n$, donc $u_n = v_n + 20 = 20 - 10 \times 0,8^n$. Contrôle : $u_1 = 20 - 8 = 12$. $u_5 = 20 - 10 \times 0,32768 = 20 - 3,2768 = 16,723$ (au millième). d) $u(n+1) - u_n = -10 \times 0,8^{n+1} + 10 \times 0,8^n = 10 \times 0,8^n \times (1 - 0,8) = 2 \times 0,8^n > 0$: **(u_n) est strictement croissante.** Comme $0,8^n$ tend vers 0, **u_n semble tendre vers 20** : la quantité après chaque prise augmente et se stabilise vers un plateau de 20 mg.

12. Les termes sont multipliés par 3 à chaque fois ($6/2 = 18/6 = 54/18 = 3$) : suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3, de terme 2×3^k . $2 \times 3^k = 1\,458 \iff 3^k = 729 = 3^6$, donc $k = 6$: les termes vont de $k = 0$ à $k = 6$, soit 7 termes. $S = 2 \times (1 - 3^7)/(1 - 3) = 2 \times (1 - 2\,187)/(-2) = 2\,186$. **$S = 2\,186$.**

13. a) Somme géométrique de raison 1/2, de $n + 1$ termes : $S_n = (1 - (1/2)^{n+1})/(1 - 1/2) = 2(1 - (1/2)^{n+1}) = 2 - 1/2^n$.

b) $(1/2)^n$ tend vers 0, donc **S_n semble tendre vers 2.** c) $S_n \geq 1,999 \iff 1/2^n \leq 0,001 \iff 2^n \geq 1\,000$. Or $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$. **Le plus petit entier est $n = 10$.**

14. a) L'activité est multipliée par 1/2 à chaque période : $A_n = 8\,000 \times (1/2)^n$. 24 heures correspondent à 4 périodes : $A_4 = 8\,000/16 = 500$ Bq.

b) 18 heures font 3 périodes : il reste $(1/2)^3 = 1/8 = 12,5$ % des noyaux. **87,5 % des noyaux initiaux se sont désintégrés.** c) $A_n < 100 \iff 8\,000/2^n < 100 \iff 2^n > 80$. Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$: $A_6 = 125$ Bq et $A_7 = 62,5$ Bq. **Il faut 7 périodes, soit 42 heures.**