

Second degré

COURS • M01 • PREMIÈRE

Spécialité de première, programme officiel. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ton enseignant fait foi.

Sommaire du cours

Ce que tu dois savoir faire	1
Cours	1
Exemples résolus	6
Méthodes et pièges	7
Vers le PASS	7
Exercices	8
Corrigés	9

Ce que tu dois savoir faire

- Reconnaître une fonction polynôme du second degré et identifier ses coefficients a , b et c .
- Passer d'une forme à l'autre : forme développée, forme canonique, forme factorisée.
- Déterminer la forme canonique par la méthode de complétion du carré ou par le calcul de α et β .
- Calculer le discriminant et en déduire le nombre et la valeur des racines d'un trinôme.
- Utiliser la somme et le produit des racines pour contrôler un calcul, trouver une racine manquante ou deux nombres de somme et de produit donnés.
- Dresser le tableau de signes d'un trinôme et résoudre une inéquation du second degré.
- Résoudre une équation qui se ramène au second degré (changement de variable, équation bicarrée, équation avec paramètre).
- Tracer l'allure d'une parabole à partir de son sommet, de son axe de symétrie et de ses éventuelles intersections avec l'axe des abscisses.
- Modéliser une situation concrète (aire, trajectoire, coût) par une fonction du second degré et en chercher l'extremum.

Cours

1. Fonction polynôme du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme du second degré**) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$. Cette écriture s'appelle la **forme développée** de f . Les nombres a , b et c sont les **coefficients** du trinôme ; c s'appelle aussi le terme constant.

La condition $a \neq 0$ est essentielle : si $a = 0$, la fonction devient $x \mapsto bx + c$, qui est affine, et sa courbe est une droite.

Exemples : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ($a = 3, b = -2, c = 1$) ; $g(x) = -x^2 + 4$ ($a = -1, b = 0, c = 4$) ; $h(x) = (x - 1)(2x + 3)$ est aussi du second degré, puisqu'en développant on obtient $h(x) = 2x^2 + x - 3$.

Un même trinôme peut s'écrire de plusieurs façons. Chaque forme sert à quelque chose :

Forme	Écriture	Ce qu'elle donne immédiatement
Développée	$ax^2 + bx + c$	l'image de 0 (c'est c), le coefficient a
Canonique	$a(x - \alpha)^2 + \beta$	le sommet $S(\alpha ; \beta)$, les variations, l'extremum
Factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	les racines, le signe

Savoir choisir la bonne forme selon la question posée est l'essentiel de ce chapitre.

2. Forme canonique

Propriété. Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) peut s'écrire de manière unique sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = f(\alpha)$.

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f .

Démonstration (complétion du carré). Comme $a \neq 0$, on factorise par a :

$$f(x) = a[x^2 + (b/a)x + c/a].$$

On reconnaît dans $x^2 + (b/a)x$ le début du carré $(x + b/(2a))^2 = x^2 + (b/a)x + b^2/(4a^2)$. Donc $x^2 + (b/a)x = (x + b/(2a))^2 - b^2/(4a^2)$. En remplaçant :

$$f(x) = a[(x + b/(2a))^2 - b^2/(4a^2) + c/a] = a(x + b/(2a))^2 - b^2/(4a) + c.$$

On pose $\alpha = -b/(2a)$ et $\beta = c - b^2/(4a) = -(b^2 - 4ac)/(4a)$. On obtient bien $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. En remplaçant x par α , le carré s'annule et $f(\alpha) = \beta$.

En pratique, on retient seulement $\alpha = -b/(2a)$, puis on calcule $\beta = f(\alpha)$.

Exemple : $f(x) = x^2 - 4x + 7$. On a $\alpha = -(-4)/(2 \times 1) = 2$ et $\beta = f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$. Donc $f(x) = (x - 2)^2 + 3$.

Vérification en développant : $(x - 2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7$.

On peut aussi compléter le carré directement : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, donc $f(x) = (x - 2)^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3$.

3. Variations et parabole

Propriété. Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Elle admet un **minimum** égal à β , atteint en $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty ; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Elle admet un **maximum** égal à β , atteint en $x = \alpha$.

Justification pour $a > 0$. Pour tout réel x , $(x - \alpha)^2 \geq 0$, donc $a(x - \alpha)^2 \geq 0$ et $f(x) \geq \beta$, avec égalité seulement pour $x = \alpha$: β est bien le minimum. Soient maintenant $u < v$ deux réels de $[\alpha ; +\infty[$. Alors $0 \leq u - \alpha < v - \alpha$, et la fonction carré étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, $(u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2$. En multipliant par $a > 0$ puis en ajoutant β , on obtient $f(u) < f(v)$: f est strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$. Le raisonnement est symétrique sur $]-\infty ; \alpha]$, où $u - \alpha < v - \alpha \leq 0$ donne $(u - \alpha)^2 > (v - \alpha)^2$. Pour $a < 0$, la multiplication par a

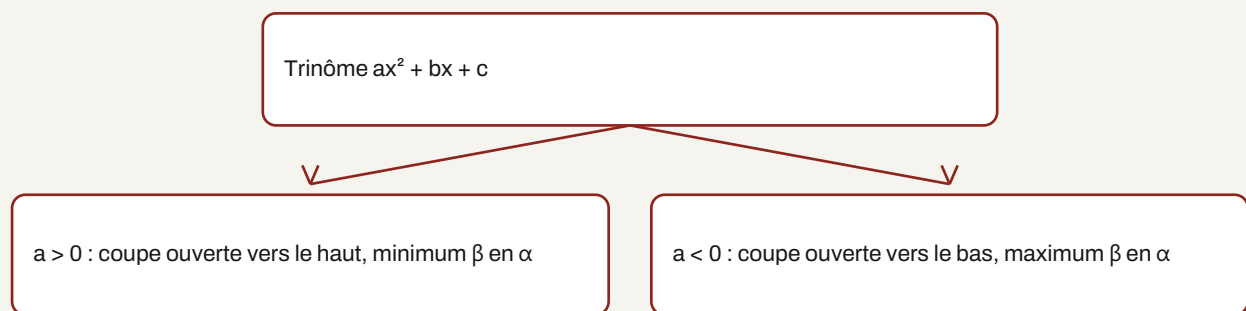
renverse les inégalités.

La parabole. Dans un repère, la courbe représentative d'un trinôme est une **parabole**.

- Son **sommet** est le point $S(\alpha ; \beta)$.
- Elle admet pour **axe de symétrie** la droite verticale d'équation $x = \alpha$. En effet, $f(\alpha + h) = ah^2 + \beta = f(\alpha - h)$ pour tout réel h : deux points de même hauteur sont symétriques par rapport à cette droite.
- Elle est « tournée vers le haut » (en forme de coupe) si $a > 0$, « tournée vers le bas » si $a < 0$.
- Plus $|a|$ est grand, plus la parabole est resserrée autour de son axe.
- Elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0 ; c)$.

Conséquence pratique : si l'on connaît deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors α est leur milieu, $\alpha = (x_1 + x_2)/2$. C'est une façon rapide de trouver l'axe de symétrie à partir des racines.

Allure de la parabole selon a



Deux branches distinctes • ce schéma ne relie pas les deux issues entre elles

4. Discriminant et racines

On appelle **racine** du trinôme f tout réel x tel que $f(x) = 0$. Graphiquement, les racines sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Définition. Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème.

- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet **deux solutions distinctes** : $x_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $x_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$.
- Si $\Delta = 0$, elle admet **une solution unique** (dite racine double) : $x_0 = -b/(2a)$.
- Si $\Delta < 0$, elle **n'admet aucune solution réelle**.

Démonstration. D'après le calcul de la partie 2, $f(x) = a[(x + b/(2a))^2 - \Delta/(4a^2)]$. Comme $a \neq 0$, $f(x) = 0$ équivaut à $(x + b/(2a))^2 = \Delta/(4a^2)$.

- Si $\Delta < 0$, le membre de droite est strictement négatif alors qu'un carré est positif ou nul : aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, on obtient $(x + b/(2a))^2 = 0$, donc $x = -b/(2a)$.

- Si $\Delta > 0$, $\Delta/(4a^2) = (\sqrt{\Delta}/(2a))^2$, donc $x + b/(2a) = \sqrt{\Delta}/(2a)$ ou $x + b/(2a) = -\sqrt{\Delta}/(2a)$, ce qui donne les deux formules.

Interprétation graphique : $\Delta > 0$, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points ; $\Delta = 0$, elle lui est tangente en son sommet (alors $\beta = 0$) ; $\Delta < 0$, elle ne le rencontre pas. Le lien vient de la formule $\beta = -\Delta/(4a)$: par exemple si $a > 0$ et $\Delta < 0$, le minimum β est strictement positif, la parabole reste au-dessus de l'axe.

Avant toute formule, regarde si une méthode plus rapide existe : facteur commun ($2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$), identité remarquable ($x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$), racine évidente. Le discriminant est la méthode universelle, pas toujours la plus courte.

Cas particuliers fréquents :

- $b = 0$: $ax^2 + c = 0$ donne $x^2 = -c/a$, qui a des solutions seulement si $-c/a \geq 0$.
- $c = 0$: $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$ donne $x = 0$ ou $x = -b/a$.

5. Forme factorisée

Propriété.

- Si $\Delta > 0$, pour tout réel x : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, pour tout réel x : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, f ne peut pas s'écrire comme produit de facteurs du premier degré.

Justification. Si $\Delta > 0$, en reprenant $f(x) = a[(x + b/(2a))^2 - (\sqrt{\Delta}/(2a))^2]$ et l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, on obtient $f(x) = a(x + b/(2a) - \sqrt{\Delta}/(2a))(x + b/(2a) + \sqrt{\Delta}/(2a)) = a(x - x_2)(x - x_1)$. Le cas $\Delta = 0$ est immédiat. Si $\Delta < 0$, une factorisation $a(x - r)(x - s)$ donnerait des racines r et s , ce qui est impossible.

Ne jamais oublier le coefficient a devant les parenthèses : $2x^2 - 2x - 4$ a pour racines -1 et 2 , et vaut $2(x + 1)(x - 2)$, pas $(x + 1)(x - 2)$.

6. Somme et produit des racines

Propriété. Si $\Delta \geq 0$ et si x_1 et x_2 sont les racines (éventuellement confondues) de $ax^2 + bx + c$, alors

$$S = x_1 + x_2 = -b/a \text{ et } P = x_1 \times x_2 = c/a.$$

Démonstration. $x_1 + x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a) + (-b + \sqrt{\Delta})/(2a) = -2b/(2a) = -b/a$. Pour le produit, $(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta}) = b^2 - \Delta = b^2 - (b^2 - 4ac) = 4ac$, donc $x_1 x_2 = 4ac/(4a^2) = c/a$.

On peut aussi le voir en développant $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2$ et en identifiant avec $ax^2 + bx + c$.

Utilisations.

- **Racine évidente.** Si l'on remarque que 1 est racine de $3x^2 + 5x - 8$ (car $3 + 5 - 8 = 0$), le produit des racines vaut $-8/3$, donc l'autre racine est $-8/3$. Plus généralement, 1 est racine si $a + b + c = 0$ et -1 est racine si $a - b + c = 0$.
- **Deux nombres de somme S et de produit P .** Ce sont les solutions, si elles existent, de l'équation $X^2 - SX + P = 0$. Par exemple, deux nombres de somme 7 et de produit 12 sont solutions de $X^2 - 7X + 12 = 0$, c'est-à-dire 3 et 4 .
- **Contrôle.** Après avoir calculé deux racines, vérifier S et P détecte la plupart des erreurs de calcul.

- **Signes des racines sans les calculer.** Si $P < 0$, les racines sont de signes contraires. Si $P > 0$, elles ont le même signe, celui de S .

7. Signe du trinôme

Théorème.

- Si $\Delta > 0$ (racines $x_1 < x_2$) : $f(x)$ est du **signe de a à l'extérieur des racines** (pour $x < x_1$ ou $x > x_2$), du **signe contraire de a entre les racines**, et nul en x_1 et x_2 .
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$, et nul en x_0 .
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est **strictement du signe de a** pour tout réel x .

Justification. Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Pour $x < x_1$, les deux facteurs $(x - x_1)$ et $(x - x_2)$ sont négatifs, leur produit est positif et $f(x)$ a le signe de a . Entre x_1 et x_2 , un facteur est positif et l'autre négatif. Au-delà de x_2 , les deux sont positifs. Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec un carré positif. Si $\Delta < 0$, $f(x) = a[(x - \alpha)^2 + (-\Delta)/(4a^2)]$ et le crochet est strictement positif.

Tableau de signes pour $\Delta > 0$ et $a > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Moyen mnémotechnique graphique : on dessine rapidement la parabole (coupe vers le haut si $a > 0$) et on lit où elle est au-dessus ou au-dessous de l'axe.

8. Équations et inéquations du second degré

Méthode générale pour une inéquation.

1. Tout passer dans un seul membre pour se ramener à $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) \leq 0$, avec f trinôme.
2. Calculer Δ et les racines éventuelles.
3. Dresser le tableau de signes (règle du signe de a).
4. Lire l'ensemble des solutions, en faisant attention aux crochets : les racines sont incluses pour $\geq$ et $\leq$, exclues pour $>$ et $<$.

Exemple : $x^2 < 4x \iff x^2 - 4x < 0 \iff x(x - 4) < 0$. Les racines sont 0 et 4, $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre ses racines : $S =]0 ; 4[$.

Équations qui se ramènent au second degré.

- **Équation bicarrée** $ax^4 + bx^2 + c = 0$: on pose $X = x^2$ (avec $X \geq 0$), on résout $aX^2 + bX + c = 0$, puis on revient à x en ne gardant que les X positifs ou nuls.
- **Équation avec quotient** : on écrit les conditions d'existence (dénominateurs non nuls), on réduit au même dénominateur, puis on résout le numérateur égal à 0 en éliminant les valeurs interdites.
- **Intersection de deux courbes** : les abscisses des points communs à $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont les solutions de $f(x) = g(x)$. La position relative se lit sur le signe de $f(x) - g(x)$.

Équations avec paramètre. Lorsque les coefficients dépendent d'un réel m , le nombre de solutions dépend du signe de Δ , qui est lui-même une expression en m . On étudie donc le signe de $\Delta(m)$, parfois

lui-même un trinôme en m . Attention au cas où le coefficient de x^2 s'annule pour une valeur de m : l'équation n'est alors plus du second degré et se traite à part.

Résoudre une inéquation du second degré

1. tout ramener à $f(x)$ comparé à 0 • 2. calculer Δ • 3. trouver les racines • 4. appliquer la règle du signe de a • 5. lire l'intervalle avec les bons crochets

Exemples résolus

Exemple 1 : les trois formes d'un trinôme

Énoncé. Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$. a) Déterminer la forme canonique de f et en déduire son tableau de variations. b) Déterminer la forme factorisée de f . c) Contrôler les racines avec la somme et le produit.

Résolution. a) Ici $a = 2$, $b = -12$, $c = 10$. On calcule $\alpha = -b/(2a) = 12/4 = 3$, puis $\beta = f(3) = 2 \times 9 - 12 \times 3 + 10 = 18 - 36 + 10 = -8$. Donc $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$. Comme $a = 2 > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 3]$ et strictement croissante sur $[3 ; +\infty[$; son minimum est -8 , atteint en $x = 3$. Le sommet de la parabole est $S(3 ; -8)$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 80 = 64 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 8$. Les racines sont $x_1 = (12 - 8)/4 = 1$ et $x_2 = (12 + 8)/4 = 5$. Donc $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$.

On pouvait aussi partir de la forme canonique : $2(x - 3)^2 - 8 = 2[(x - 3)^2 - 4] = 2(x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = 2(x - 5)(x - 1)$.

c) $S = 1 + 5 = 6$ et $-b/a = 12/2 = 6$. $P = 1 \times 5 = 5$ et $c/a = 10/2 = 5$. Les deux contrôles sont bons. On remarque aussi que $\alpha = 3$ est bien le milieu de 1 et 5.

Bilan : $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8 = 2(x - 1)(x - 5)$, **minimum -8 en $x = 3$.**

Exemple 2 : une inéquation avec a négatif

Énoncé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + x + 6 \geq 0$.

Résolution. On étudie le signe de $g(x) = -x^2 + x + 6$, avec $a = -1$, $b = 1$, $c = 6$. $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 5$. $x_1 = (-1 - 5)/(2 \times (-1)) = (-6)/(-2) = 3$ et $x_2 = (-1 + 5)/(-2) = 4/(-2) = -2$. Contrôle : somme $3 + (-2) = 1 = -b/a = -1/(-1)$; produit $-6 = c/a = 6/(-1)$. Correct. Comme $a = -1 < 0$, $g(x)$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
g(x)		-	0	+	0	-	

On veut $g(x) \geq 0$, racines comprises : $S = [-2 ; 3]$.

Exemple 3 : un problème de rectangle

Énoncé. Un rectangle a un périmètre de 20 cm. a) On note x la longueur d'un côté. Exprimer l'aire $A(x)$ en fonction de x et préciser l'intervalle de x . b) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Que vaut-elle ? c) Déterminer les dimensions du rectangle lorsque son aire vaut 21 cm^2 .

Résolution. a) Le demi-périmètre vaut 10 cm, donc l'autre côté mesure $10 - x$. Pour que les deux longueurs soient strictement positives, $x \in]0 ; 10[$. Alors $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.

b) A est un trinôme avec $a = -1 < 0$: il admet un maximum en $\alpha = -b/(2a) = -10/(-2) = 5$, qui appartient bien à $]0 ; 10[$. $A(5) = 5 \times 5 = 25$. **L'aire est maximale pour $x = 5$ cm : c'est un carré de 25 cm^2 .**

c) On cherche x tel que $-x^2 + 10x = 21$, soit $x^2 - 10x + 21 = 0$. On cherche deux nombres de somme 10 et de produit 21 : ce sont 3 et 7. Vérification par le discriminant : $\Delta = 100 - 84 = 16$, $x = (10 \pm 4)/2$, soit 3 ou 7. Les deux valeurs sont dans $]0 ; 10[$ et donnent le même rectangle. **Le rectangle mesure 3 cm sur 7 cm.**

Méthodes et pièges

- Pour trouver le sommet, calcule $\alpha = -b/(2a)$ puis $\beta = f(\alpha)$: c'est plus sûr que la formule $\beta = -\Delta/(4a)$, qu'on retient mal.
- Avant d'appliquer le discriminant, cherche une factorisation directe (facteur commun, identité remarquable, racine évidente) : tu gagnes du temps et tu limites les erreurs.
- Attention aux signes dans $\Delta = b^2 - 4ac$: si b est négatif, b^2 reste positif ; si a et c sont de signes contraires, $-4ac$ est positif et Δ est forcément strictement positif.
- Dans les formules des racines, le dénominateur est $2a$, pas 2 : avec $a = -1$, le dénominateur vaut -2 .
- N'oublie jamais le coefficient a dans la forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Contrôle systématiquement tes racines avec $S = -b/a$ et $P = c/a$, en une ligne.
- Pour une inéquation, tout doit être d'un seul côté, comparé à 0. Ne divise jamais par une expression en x dont tu ne connais pas le signe : $2x^2 \geq 6x$ n'équivaut pas à $x \geq 3$ (tu perdrais les x négatifs).
- Lis bien le sens des crochets : inégalité large, racines incluses ; inégalité stricte, racines exclues ; vers l'infini, crochet toujours ouvert.
- $\Delta < 0$ ne veut pas dire « pas de solution » pour une inéquation : $f(x) > 0$ a pour solution $\mathbb{R}$ tout entier si $a > 0$, et aucune solution si $a < 0$.
- Dans une équation avec paramètre, examine à part la valeur qui annule le coefficient de x^2 .

Vers le PASS

En PASS, le second degré n'est plus un chapitre mais un réflexe de calcul. Il revient partout : quand on étudie le signe d'une dérivée qui est un trinôme, quand on résout une équation d'équilibre en chimie (calcul d'un avancement ou d'une concentration à partir d'une constante d'équilibre, qui mène très souvent à une équation du second degré dont on ne garde que la racine physiquement acceptable), en physique pour le mouvement d'un projectile ou l'énergie, et en biostatistique dans des calculs d'intervalles. Les QCM chronométrés exigent de reconnaître immédiatement une racine évidente, d'utiliser la somme et le produit pour éliminer des propositions sans tout recalculer, et de trier les solutions selon leur sens (une concentration négative est à rejeter).

Le calcul algébrique sûr, rapide et contrôlé (factoriser, développer, manipuler des fractions, vérifier un ordre de grandeur) est la base de tout l'enseignement quantitatif du PASS.

Suite en PASS : Unités, proportions et calcul algébrique

Exercices

Niveau 1 : s'entraîner

1. Déterminer la forme canonique de $f(x) = x^2 + 6x + 5$, puis donner les coordonnées du sommet de sa parabole et préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 5x - 2 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 12x + 9 = 0$, puis factoriser le trinôme.
4. Étudier le signe de $g(x) = -2x^2 + 3x - 5$ sur $\mathbb{R}$.
5. Sans calculer de discriminant, factoriser $x^2 - x - 12$ en cherchant deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Niveau 2 : type bac

6. Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.
a) Déterminer la forme canonique de f . b) Déterminer la forme factorisée de f . c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. d) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 5$.
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) $2x^2 + x - 6 < 0$; b) $x^2 > 2x + 3$.
8. On considère, pour un réel m , l'équation (E) : $x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$.
a) Exprimer le discriminant de (E) en fonction de m . b) Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle une solution unique ? Donner cette solution dans chaque cas. c) Pour quelles valeurs de m l'équation n'admet-elle aucune solution ?
9. Dans un repère, on considère la parabole P d'équation $y = x^2 - 3x + 1$ et la droite D d'équation $y = x - 2$.
a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P et D . b) Étudier la position relative de P et D .
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Niveau 3 : vers le PASS

11. Une balle est lancée verticalement. Sa hauteur, en mètres, t secondes après le lancer, est modélisée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.
a) À quel instant la hauteur est-elle maximale ? Quelle est cette hauteur ? b) À quels instants la balle est-elle à 16 m de hauteur ? c) À quel instant la balle touche-t-elle le sol ? Donner une valeur arrondie au centième.
12. On note x_1 et x_2 les racines de $2x^2 - 7x + 4 = 0$.
a) Justifier que ces racines existent, puis déterminer leur signe sans les calculer. b) Calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 . c) En déduire, sans calculer les racines, la valeur de $x_1^2 + x_2^2$ puis celle de $1/x_1 + 1/x_2$.
13. Déterminer l'ensemble des réels m tels que, pour tout réel x , $mx^2 + 4x + m > 0$.
14. Un éleveur dispose de 40 m de clôture pour fermer un enclos rectangulaire adossé à un mur (le côté le long du mur n'est pas clôturé). On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés

perpendiculaires au mur.

a) Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x et préciser l'intervalle de x . b) Déterminer l'aire maximale et les dimensions correspondantes. c) Pour quelles valeurs de x l'aire est-elle au moins égale à 150 m^2 ?

Corrigés

1. Ici $\alpha = -b/(2a) = -6/2 = -3$ et $\beta = f(-3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Donc $f(x) = (x + 3)^2 - 4$. Vérification : $(x + 3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5$. Le sommet est $S(-3 ; -4)$; comme $a = 1 > 0$, c'est un **minimum** : $f(x) \geq -4$ pour tout x .

2. $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$. $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$. $x_1 = (5 - 7)/6 = -2/6 = -1/3$ et $x_2 = (5 + 7)/6 = 2$. Contrôle : somme $-1/3 + 2 = 5/3 = -b/a$; produit $-2/3 = c/a$. $S = \{-1/3 ; 2\}$.

3. $\Delta = 144 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$. Racine double $x_0 = -b/(2a) = 12/8 = 3/2$. $S = \{3/2\}$ et $4x^2 - 12x + 9 = 4(x - 3/2)^2 = (2x - 3)^2$. On reconnaissait d'ailleurs l'identité remarquable $(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$.

4. $a = -2$, $b = 3$, $c = -5$. $\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times (-5) = 9 - 40 = -31 < 0$. Le trinôme n'a pas de racine et garde le signe de a , qui est négatif. $g(x) < 0$ pour tout réel x .

5. Si x_1 et x_2 sont les racines, $x_1 + x_2 = -b/a = 1$ et $x_1 x_2 = c/a = -12$. Deux nombres de somme 1 et de produit -12 : 4 et -3 ($4 - 3 = 1$ et $4 \times (-3) = -12$). Comme $a = 1$, $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$. Vérification : $(x - 4)(x + 3) = x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 - x - 12$.

6. a) $a = -1$, $\alpha = -4/(-2) = 2$, $\beta = f(2) = -4 + 8 + 5 = 9$. $f(x) = -(x - 2)^2 + 9$.

b) $\Delta = 16 - 4 \times (-1) \times 5 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$. $x_1 = (-4 - 6)/(-2) = 5$, $x_2 = (-4 + 6)/(-2) = -1$. $f(x) = -(x + 1)(x - 5)$. Contrôle : $-(x + 1)(x - 5) = -(x^2 - 4x - 5) = -x^2 + 4x + 5$. c) Comme $a = -1 < 0$: **f est strictement croissante sur $]-\infty ; 2]$, strictement décroissante sur $[2 ; +\infty[$, maximum 9 en $x = 2$** . d) $f(x) \geq 5 \iff -x^2 + 4x \geq 0 \iff x(4 - x) \geq 0$. Le trinôme $-x^2 + 4x$ a pour racines 0 et 4 et $a = -1 < 0$: il est positif entre ses racines. $S = [0 ; 4]$.

7. a) $\Delta = 1 + 48 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, racines $(-1 - 7)/4 = -2$ et $(-1 + 7)/4 = 3/2$. $a = 2 > 0$: le trinôme est négatif strictement entre ses racines. $S =]-2 ; 3/2[$.

b) $x^2 > 2x + 3 \iff x^2 - 2x - 3 > 0$. Racine évidente -1 ($1 + 2 - 3 = 0$), produit $c/a = -3$ donc l'autre racine est 3. $a = 1 > 0$: positif à l'extérieur des racines. $S =]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

8. a) $\Delta = (m - 1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = (m - 1)^2 - 4$.

b) Solution unique $\iff \Delta = 0 \iff (m - 1)^2 = 4 \iff m - 1 = 2$ ou $m - 1 = -2 \iff m = 3$ ou $m = -1$. La solution vaut alors $x_0 = -(m - 1)/2$. Pour $m = 3$: $x_0 = -1$ (l'équation est $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$). Pour $m = -1$: $x_0 = 1$ (l'équation est $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$). **$m = 3$ avec $x = -1$, ou $m = -1$ avec $x = 1$** . c) Aucune solution $\iff (m - 1)^2 < 4 \iff -2 < m - 1 < 2 \iff -1 < m < 3$, soit $m \in]-1 ; 3[$.

9. a) Les abscisses communes vérifient $x^2 - 3x + 1 = x - 2$, soit $x^2 - 4x + 3 = 0$. Racine évidente 1 ($1 - 4 + 3 = 0$), produit 3 donc l'autre racine est 3. Ordonnées (sur D) : pour $x = 1$, $y = -1$; pour $x = 3$, $y = 1$.

Vérification sur P : $1 - 3 + 1 = -1$ et $9 - 9 + 1 = 1$. **Points d'intersection : (1 ; -1) et (3 ; 1)**.

b) On étudie $d(x) = (x^2 - 3x + 1) - (x - 2) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, positif à l'extérieur de $[1 ; 3]$ ($a = 1 > 0$). **P est au-dessus de D sur $]-\infty ; 1[$ et $]3 ; +\infty[$, en dessous sur $]1 ; 3[$.**

10. On pose $X = x^2$, avec $X \geq 0$. L'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$. Racine évidente 1, produit 4 donc l'autre racine est 4. Les deux valeurs sont positives. $x^2 = 1$ donne $x = -1$ ou $x = 1$; $x^2 = 4$ donne $x = -2$ ou $x = 2$. $S = \{-2 ; -1 ; 1 ; 2\}$.

11. a) h est un trinôme avec $a = -5 < 0$: maximum en $t = -20/(2 \times (-5)) = 2$ s. $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$.

Hauteur maximale 21 m, atteinte à $t = 2$ s.

b) $-5t^2 + 20t + 1 = 16 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 15 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$ (division par -5). Racines 1 et 3 (somme 4, produit 3). **La balle est à 16 m à $t = 1$ s (en montant) et $t = 3$ s (en descendant).** On retrouve la symétrie autour de $t = 2$. c) $-5t^2 + 20t + 1 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 20t - 1 = 0$. $\Delta = 400 + 20 = 420$, $\sqrt{420} \approx 20,494$. Racines $(20 - 20,494)/10 \approx -0,05$ (à rejeter, $t \geq 0$) et $(20 + 20,494)/10 \approx 4,049$. **La balle touche le sol à $t \approx 4,05$ s.**

12. a) $\Delta = 49 - 32 = 17 > 0$: deux racines distinctes. Leur produit $c/a = 4/2 = 2$ est positif, elles ont donc le même signe, celui de leur somme $7/2 > 0$. **Les deux racines sont strictement positives.**

b) $x_1 + x_2 = -b/a = 7/2$ et $x_1 x_2 = c/a = 2$. c) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 49/4 - 4 = 49/4 - 16/4 = 33/4$. Et $1/x_1 + 1/x_2 = (x_1 + x_2)/(x_1 x_2) = (7/2)/2 = 7/4$.

13. Si $m = 0$, l'expression vaut $4x$, qui n'est pas strictement positive pour $x = -1$: $m = 0$ ne convient pas.

Si $m \neq 0$, on a un trinôme. Il est strictement positif pour tout x si et seulement s'il n'a pas de racine ($\Delta < 0$) et si son coefficient de x^2 est positif ($m > 0$). $\Delta = 16 - 4m^2$, donc $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow m < -2$ ou $m > 2$. Avec $m > 0$, il reste $m > 2$. **L'ensemble cherché est $]2 ; +\infty[$.**

14. a) Les deux côtés perpendiculaires mesurent x et le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$. Il faut $x > 0$ et $40 - 2x > 0$, donc $x \in]0 ; 20[$. $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.

b) $a = -2 < 0$: maximum en $x = -40/(2 \times (-2)) = 10$. $A(10) = 10 \times 20 = 200$. **Aire maximale 200 m², pour des côtés de 10 m et un côté de 20 m le long du mur.** c) $-2x^2 + 40x \geq 150 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 150 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 \leq 0$ (division par -2 , qui renverse l'inégalité). $\Delta = 400 - 300 = 100$, racines $(20 - 10)/2 = 5$ et $(20 + 10)/2 = 15$. Le trinôme $x^2 - 20x + 75$ est négatif entre ses racines. **L'aire est au moins 150 m² pour $x \in [5 ; 15]$.**