



Outils mathématiques : fonctions, intégrales et vecteurs

OSSIK • COURS 22-02 • LE CORRIGÉ • RÉVISION 0.5

PASS - majeure santé - classement d'après la maquette publique de Paris Cité, sans lien avec l'université. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ta faculté fait foi.

Sommaire du cours

Partie 1 • Fonctions, dérivées et optimisation	1
Partie 2 • Intégrales, aires et quantités cumulées	6
Partie 3 • Équations différentielles et bilans	11
Partie 4 • Vecteurs, projections et trigonométrie	15

Partie 1 • Fonctions, dérivées et optimisation

Prérequis et objectifs

Connaître fonction, domaine et pente d'une droite. Une dérivée mesure une variation locale, pas un niveau.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Calculer des dérivées composées.
- Relier signe de dérivée et variation.
- Chercher un extremum sur un domaine physique.

Fondements du thème

Fonction et domaine

Une fonction associe à une entrée une sortie selon une règle. Son domaine précise quelles entrées sont admises. Pour $f(x)=1/x$, zéro est exclu ; pour $\ln(x)$, il faut $x>0$. Oublier le domaine peut créer des solutions qui n'ont pas de sens.

Une fonction affine $f(x)=ax+b$ a une pente constante a . Une fonction proportionnelle est le cas $b=0$. Une droite qui ne passe pas par l'origine ne décrit pas une proportionnalité stricte.

Dérivée

La dérivée décrit un taux de variation local. Si une position x dépend du temps, dx/dt est la vitesse et d^2x/dt^2 l'accélération. Les unités suivent : m, m/s puis m/s^2 . La pente moyenne sur un grand intervalle ne vaut pas nécessairement la pente instantanée.

Les dérivées usuelles sont : $(x^n)' = n x^{n-1}$, $(\exp x)' = \exp x$, $(\ln x)' = 1/x$ pour $x > 0$, $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$ pour un angle en radians.

La dérivée d'un produit uv vaut $u'v + uv'$. Celle d'un quotient u/v vaut $(u'v - uv')/v^2$ lorsque v n'est pas nul. Pour une composée $f(g(x))$, elle vaut $f'(g(x))g'(x)$. La dernière règle évite d'oublier le facteur k dans $\exp(-kx)$.

Exemple avec une concentration

$C(t) = 10 \exp(-0,2t)$, avec C en mg/L et t en heures. Alors $C'(t) = -2 \exp(-0,2t) \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$. Au temps zéro, la pente vaut $-2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$. Elle diminue en valeur absolue au cours du temps.

Maximum et minimum

Un point intérieur où une fonction dérivable a un extremum vérifie $f' = 0$, mais la réciproque est fausse. $f(x) = x^3$ a une dérivée nulle en zéro sans maximum ni minimum. Il faut étudier le signe de la dérivée ou un autre critère adapté, et vérifier les bornes du domaine.

Pour $f(x) = -x^2 + 4x$ sur $[0, 5]$, $f' = 4 - 2x$ s'annule en 2. La fonction croît avant puis décroît après : le maximum vaut $f(2) = 4$. Le minimum sur l'intervalle se cherche aussi aux bornes : $f(0) = 0$ et $f(5) = -5$, donc -5.

Développements et raisonnements

Du taux moyen au taux instantané

Entre x et $x + h$, le taux moyen est $[f(x + h) - f(x)]/h$. La dérivée est sa limite lorsque h tend vers zéro, si cette limite existe. Elle possède l'unité de f divisée par l'unité de x . Pour une concentration en mol/L dépendant du temps en secondes, la dérivée est en mol/L/s. Une dérivée négative signifie une diminution, pas une concentration négative.

La tangente au point x_0 s'écrit $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Elle approche la fonction près de x_0 , mais peut devenir mauvaise loin de ce point. Une pente nulle signifie une tangente horizontale ; elle n'impose pas un extremum. La fonction x^3 croît de part et d'autre de zéro malgré une dérivée nulle en ce point.

Règles de calcul et composition

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Pour un produit uv , elle vaut $u'v + uv'$. Pour un quotient u/v , elle vaut $(u'v - uv')/v^2$ lorsque v est non nul. Pour une composition $f(g(x))$, elle vaut $f'(g(x))g'(x)$. Ce dernier facteur explique pourquoi la dérivée de $\exp(-kt)$ est $-k \exp(-kt)$, et non simplement $\exp(-kt)$.

Une fonction de saturation $f(C) = E_{\max} C / (K + C)$, avec paramètres positifs et $C \geq 0$, donne $f'(C) = E_{\max} K / (K + C)^2$. La dérivée reste positive mais diminue quand C augmente. Le niveau monte vers une limite tandis que le gain marginal décroît. Sa dérivée seconde est négative, ce qui indique une concavité vers le bas.

Trouver un maximum sans oublier les bornes

Pour une fonction continue sur un intervalle fermé, les candidats aux extrema sont les points intérieurs où la dérivée s'annule ou n'existe pas, ainsi que les bornes. Résoudre $f' = 0$ ne suffit pas. Il faut vérifier le domaine, le signe avant et après, puis comparer les valeurs si l'on cherche un extremum global.

Un optimum mathématique peut être hors du domaine physiquement admissible. Une longueur, une concentration ou un temps ne peut pas toujours prendre des valeurs négatives. Une contrainte de ressource peut imposer un intervalle plus court que celui utilisé pour calculer la dérivée. Le domaine fait donc partie du problème et peut placer l'optimum sur une borne.

Sensibilité relative

Le rapport $xf'(x)/f(x)$, lorsque défini, mesure la variation relative de la sortie pour une petite variation relative de x . Pour $f(x) = ax^n$, il vaut n . Une loi en rayon puissance quatre présente ainsi une amplification relative de facteur quatre pour de petites perturbations, à autres paramètres fixés. Cette lecture locale ne remplace pas le calcul exact pour une grande variation.

Objet	Question	Outil
Niveau f	Combien à cet instant ?	Substitution
Dérivée f'	À quelle vitesse cela varie ?	Pente locale
Dérivée seconde	Comment la pente change-t-elle ?	Courbure
Extremum	Où la valeur est-elle la plus grande ?	Domaine, points critiques, bornes

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

Considérons $C(t) = 12 \exp(-0,3t)$ avec t en heures. $C'(t) = -3,6 \exp(-0,3t)$. À $t = 0$, la pente vaut $-3,6$ unités de concentration par heure ; à $t = 4$, elle vaut $-1,0843$. La décroissance ralentit en valeur absolue, même si la fraction perdue par unité de temps reste constante. La concentration à quatre heures vaut $3,6143$, positive.

Une fonction $f(t) = 6t \exp(-0,5t)$, pour $t \geq 0$, représente un signal fictif. Par la règle du produit, $f'(t) = 6 \exp(-0,5t)(1 - 0,5t)$. Le facteur exponentiel est positif ; le signe dépend de $1 - 0,5t$. La fonction croît jusqu'à $t = 2$ puis décroît. Son maximum vaut $12/e = 4,4146$. Elle vaut zéro au départ et tend vers zéro à l'infini, ce qui confirme un maximum intérieur.

Pour $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ sur $[0 ; 2]$, la dérivée $6 - 2x$ reste positive. Le sommet algébrique de la parabole se situe à $x = 3$, hors domaine. Le maximum admissible est donc $f(2) = 9$. Résoudre $f' = 0$ sans vérifier l'intervalle aurait donné une réponse impossible pour la contrainte annoncée.

Enfin, pour $E(C) = 100C/(2 + C)$, $E'(2) = 12,5$ unités d'effet par unité de concentration. Une petite hausse de $0,1$ autour de $C = 2$ prédit environ $+1,25$. Le calcul exact donne $E(2,1) - E(2) = 1,2195$; l'écart vient de la courbure.

Approfondissement et contrôle du modèle

Dérivées partielles et paramètres maintenus constants

Lorsqu'une sortie dépend de plusieurs variables, une dérivée partielle décrit l'effet local de l'une en maintenant les autres constantes. Pour $Q = K r^4 \Delta p$ avec K constant, la sensibilité au rayon n'est pas la même expérience que la sensibilité à la pression. Si la pression change en même temps que le rayon, une dérivée totale doit tenir compte des deux contributions.

Cette distinction explique pourquoi une phrase comme « doubler le rayon multiplie le débit par seize » doit préciser la pression imposée et les autres paramètres fixes. La formule contient plusieurs variables, et une variation réelle peut suivre une contrainte supplémentaire.

Un raisonnement de sensibilité commence donc par la liste des paramètres modifiés et conservés. Il sépare ensuite effet mathématique direct et éventuelles réponses du système. Les dérivées rendent cette analyse précise, mais elles ne choisissent pas à elles seules la contrainte expérimentale pertinente.

Mise à l'épreuve : Un optimum sur un domaine n'est pas toujours stationnaire

Problème. Chercher le maximum de $f(x) = x(10 - x)$ sur $[0 ; 3]$, puis sur $[0 ; 8]$.

Résolution. $f'(x) = 10 - 2x$ s'annule en 5. Dans le premier domaine, 5 est interdit et f' reste positive : le maximum est $f(3) = 21$ à la borne. Dans le second, 5 est autorisé ; f croît jusqu'à 5 puis décroît, donc le maximum est 25. Résoudre $f' = 0$ sans regarder le domaine aurait donné une solution invalide au premier problème. La borne peut correspondre physiquement à une limite de quantité, de temps ou de faisabilité. L'optimum mathématique doit toujours être confronté aux contraintes du modèle.

Schéma de raisonnement

Étudier une variation

1. Domaine • 2. Dérivée • 3. Signe • 4. Candidats et bornes • 5. Interprétation

Le diagramme distingue un calcul local et une conclusion globale. Un extremum ne peut être annoncé sans préciser le domaine.

Exercices progressifs

1. Dériver $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$.
2. Dériver $g(t) = \ln(2t + 1)$ sur son domaine.
3. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$: minimum ?
4. Trouver le maximum de $f(x) = x(10 - x)$ sur $[0 ; 10]$.
5. Quel est le signe de la dérivée de $1/x$ pour x positif ?
6. La dérivée d'une concentration peut-elle être négative si la concentration est positive ?

Corrections argumentées

1. $f'(x) = 12x^2 - 2$.
2. $g'(t) = 2/(2t + 1)$, pour $t > -1/2$. Le facteur deux vient de la composition.
3. Non. La fonction croît avant et après zéro ; le point est stationnaire sans extremum.



4. $f' = 10 - 2x$ s'annule à 5 et change de positif à négatif. Le maximum vaut 25, supérieur aux valeurs nulles aux bornes.
5. Elle vaut $-1/x^2$, donc est négative : le quotient diminue quand x augmente.
6. Oui. C'est le cas d'une décroissance positive, comme une exponentielle ; le signe indique une variation.

Références et portée

- Source 1 : openstax.org
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.

Partie 2 · Intégrales, aires et quantités cumulées

Prérequis et objectifs

Savoir dériver une fonction et calculer l'aire d'un rectangle ou d'un trapèze. Une intégrale s'accompagne toujours de ses bornes.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Relier primitive et accumulation.
- Calculer une AUC et sa fraction observée.
- Évaluer une approximation par trapèzes.

Fondements du thème

Primitive et intégrale définie

Une primitive F de f vérifie $F'=f$. Deux primitives diffèrent d'une constante sur un intervalle. L'intégrale de f entre a et b vaut $F(b)-F(a)$ lorsque les conditions du théorème fondamental sont réunies.

L'intégrale représente une accumulation algébrique. Une fonction négative contribue négativement. Une aire géométrique totale demande de tenir compte des changements de signe. Il ne faut donc pas appeler automatiquement toute intégrale « aire positive ».

Unités d'une intégrale

L'intégrale d'un débit volumique au cours du temps donne un volume. L'intégrale d'une concentration en fonction du temps donne une AUC en concentration $\times$ temps. Elle n'est pas directement une quantité totale de substance dans tout l'organisme.

Pour $C(t)=C_0 \exp(-kt)$, $k>0$, l'intégrale de zéro à l'infini vaut C_0/k . Si $C_0=10$ mg/L et $k=0,2$ h⁻¹, $AUC=50$ mg·h/L. L'intégration suppose que le modèle reste valable sur l'intervalle considéré.

Méthode des trapèzes

Quand seules des mesures discrètes sont disponibles, on peut approcher l'intégrale par des trapèzes : entre deux temps, aire $\approx (C_1+C_2)/2 \times (t_2-t_1)$. Cette méthode suppose une interpolation linéaire locale. Une courbe très incurvée nécessite des points adaptés ou une autre méthode.

Exemple : concentrations 10, 6 et 2 mg/L aux temps 0, 1 et 3 h. Entre 0 et 1 h, aire 8 mg·h/L. Entre 1 et 3 h, aire 8 mg·h/L. AUC observée 0-3 h ≈ 16 mg·h/L. Ce n'est pas l'AUC totale jusqu'à l'infini.

Développements et raisonnements

L'intégrale additionne des contributions élémentaires

Un débit $Q(t)$ multiplié par un petit intervalle dt fournit un petit volume. L'intégrale additionne ces volumes lorsque l'intervalle est découpé de plus en plus finement. Si Q est négatif selon l'orientation choisie, sa contribution est négative. Le volume net et le volume total ayant circulé sont donc des questions différentes : le second peut demander l'intégrale de la valeur absolue de Q .

Le théorème fondamental relie cette accumulation à une primitive. Si $F' = f$ sur l'intervalle adapté, l'intégrale de a à b vaut $F(b) - F(a)$. L'ordre des bornes compte : les inverser change le signe. La constante arbitraire d'une primitive disparaît dans la différence, mais elle reste nécessaire lorsqu'on présente une famille de primitives.

Unités et sens physique

L'intégrale multiplie l'unité de l'ordonnée par celle de l'abscisse. Un courant intégré dans le temps donne une charge ; une force intégrée sur une distance donne un travail dans un cas orienté adapté ; une concentration intégrée dans le temps donne concentration fois temps. Cette dernière n'est pas une masse sans coefficient supplémentaire, par exemple une clairance constante dans un bilan d'élimination.

Pour $C_0 \exp(-kt)$, une primitive est $-C_0 \exp(-kt)/k$. De zéro à T , l'aire vaut $C_0[1 - \exp(-kT)]/k$. Lorsque T tend vers l'infini avec k positif, elle vaut C_0/k . La fraction d'aire capturée avant T est donc $1 - \exp(-kT)$, égale dans ce modèle à la fraction de quantité éliminée depuis un bolus simple.

Approximation avec des données discrètes

Entre deux points, la méthode des trapèzes suppose une interpolation linéaire. L'aire vaut moyenne des deux hauteurs fois largeur de l'intervalle. Si les temps sont irréguliers, chaque largeur doit être utilisée séparément. Faire la moyenne simple de toutes les concentrations puis multiplier par la durée totale ne reproduit pas nécessairement cette intégration.

Pour une courbe convexe, les cordes se situent au-dessus de la courbe et les trapèzes peuvent surestimer l'aire. Une exponentielle décroissante est convexe. Ajouter des points adaptés réduit souvent cette erreur d'approximation, mais le bruit de mesure demeure. Une méthode plus sophistiquée ne compense pas un échantillonnage qui manque complètement un pic rapide.

Aire observée et extrapolation

L'aire jusqu'au dernier prélèvement est observée sous l'interpolation choisie. La partie après ce temps nécessite un modèle. Dans une phase terminale exponentielle, elle peut être estimée par $C_{\text{dernier}}/k_{\text{terminal}}$. Une grande fraction extrapolée signale une forte dépendance à cette hypothèse. Le rapport doit donc être décrit, pas caché dans un total.

Donnée intégrée	Variable d'intégration	Résultat
Débit volumique	Temps	Volume
Courant	Temps	Charge
Concentration	Temps	Exposition AUC

Donnée intégrée	Variable d'intégration	Résultat
Puissance	Temps	Énergie

La moyenne temporelle d'une fonction sur $[a ; b]$ est son intégrale divisée par $b - a$. Elle peut différer de la moyenne arithmétique des valeurs extrêmes lorsque la trajectoire est courbe.

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

Un débit $Q(t) = 2 + t$ mL/min est défini pour t en minutes entre 0 et 4. Sa primitive est $2t + t^2/2$. Le volume vaut $8 + 8 = 16$ mL. Le débit moyen est 4 mL/min, égal ici à la moyenne des débits initial 2 et final 6 parce que la variation est linéaire. Cette égalité ne se généralise pas à toute courbe.

Pour $C(t) = 8 \exp(-0,25t)$, l'AUC totale est 32 unités·h/L. De 0 à 4 h, elle vaut $32(1 - e^{-1}) = 20,2279$. L'aire restante est 11,7721, soit 36,79 % du total. Le dernier point à quatre heures ne décrit donc pas encore presque toute l'exposition.

Avec seulement les mesures exactes à 0, 2 et 4 h, C vaut 8 ; 4,85225 ; 2,94304. Les deux trapèzes donnent $(8 + 4,85225) \times 1 + (4,85225 + 2,94304) \times 1 = 20,6475$. La valeur dépasse l'intégrale exacte de 0,4197, soit environ 2,08 %. Ce calcul quantifie l'erreur d'interpolation même en l'absence de bruit expérimental.

Un courant vaut +2 mA pendant trois secondes puis -1 mA pendant quatre secondes. La charge nette est $6 - 4 = 2$ mC ; la somme des charges transportées en valeur absolue est 10 mC. Les deux réponses sont correctes pour deux questions différentes. Il faut préciser si l'on demande un bilan algébrique ou un cumul sans orientation.

Approfondissement et contrôle du modèle

Changement de variable et unité de temps

Une intégrale calculée avec t en heures puis avec t en minutes représente la même grandeur si la fonction et le différentiel sont transformés ensemble. Puisque $t_{\text{min}} = 60t_{\text{h}}$, on a $dt_{\text{h}} = dt_{\text{min}}/60$. Oublier ce facteur multiplie l'aire par soixante. L'unité de la constante exponentielle doit changer dans le même sens.

Pour une fonction dépendant de kt , le changement $u = kt$ fournit $dt = du/k$. Le facteur $1/k$ dans l'aire d'une exponentielle apparaît ainsi comme une conséquence de l'étirement temporel. Une décroissance plus lente laisse une aire plus grande à amplitude initiale identique.

L'intégration par morceaux est utile lorsqu'un signal change de règle. On calcule chaque intervalle avec sa propre expression puis on additionne les aires avec leurs signes. Une discontinuité isolée d'amplitude finie n'ajoute pas à elle seule une aire infinie ; c'est la durée de la contribution qui compte.

Enfin, une mesure moyenne fournie sur un intervalle peut être multipliée par sa durée pour retrouver l'intégrale correspondante seulement si cette moyenne est temporelle et définie sur le même intervalle. Une moyenne de quelques prélèvements inégalement espacés n'a pas automatiquement cette propriété.



Mise à l'épreuve : Une aire algébrique peut annuler deux transports

Problème. Un débit signé vaut $+3$ mL/min pendant deux minutes, puis -2 mL/min pendant trois minutes. Calculer le volume net transféré et la somme des volumes transportés dans les deux sens.

Résolution. L'intégrale signée vaut $3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$ mL. Le bilan volumique net est nul, mais cela ne signifie pas une absence de transport : 6 mL ont circulé dans chaque sens. L'intégrale de la valeur absolue vaut 12 mL. Une aire sous une courbe négative est négative pour le bilan orienté ; une aire géométrique utilise des valeurs positives. Le choix dépend de la question : stockage final, distance parcourue ou total échangé ne se calculent pas avec la même intégrande.

Schéma de raisonnement

Calculer une accumulation

1. Grandeur et unité • 2. Bornes • 3. Primitive ou interpolation • 4. Aire signée • 5. Sens physique

Le schéma ne présume pas que toutes les contributions soient positives. L'extrapolation hors des données constitue une hypothèse supplémentaire.

Exercices progressifs

1. Calculer l'intégrale de $3t^2$ entre 0 et 2.
2. Un débit de 5 mL/min dure 6 min puis 2 mL/min dure 4 min. Volume total ?
3. Pour $C_0 = 6$ et $k = 0,3 \text{ h}^{-1}$, AUC totale exponentielle ?
4. Les points $C = 4$ puis 2 sont séparés de trois heures. Aire du trapèze ?
5. Inverser les bornes change-t-il l'unité de l'intégrale ?
6. Une AUC en $\text{mg} \cdot \text{h/L}$ est-elle une masse en mg ?

Corrections argumentées

1. Une primitive est t^3 ; l'intégrale vaut 8.
2. $5 \times 6 + 2 \times 4 = 38$ mL.
3. $C_0/k = 20$ dans l'unité concentration fois heure.
4. $(4 + 2)/2 \times 3 = 9$ unités de concentration fois heure.
5. Non, seulement son signe. L'unité reste le produit de celles de la fonction et de la variable.
6. Non. Il faut une relation physique supplémentaire ; une clairance en L/h peut transformer l'AUC en masse éliminée dans un modèle adapté.



Références et portée

- OpenStax : intégrale définie
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.

Partie 3 • Équations différentielles et bilans

Prérequis et objectifs

Connaître dérivée, exponentielle et condition initiale. Définir une quantité conservée et une frontière de système.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Écrire un bilan différentiel.
- Résoudre une entrée constante et sortie proportionnelle.
- Vérifier conditions initiales, limites et conservation.

Fondements du thème

Un bilan avant une formule

Pour un compartiment, la variation de quantité vaut entrées moins sorties, en tenant compte des transformations éventuelles. Cette phrase est plus importante qu'une formule mémorisée sans contexte. Elle oblige à définir ce que l'on compte et où l'on place la frontière.

Une élimination proportionnelle à la quantité donne $dQ/dt = -kQ$. Sa solution est $Q(t) = Q_0 \exp(-kt)$. Une élimination à débit constant donne $dQ/dt = -a$ et $Q(t) = Q_0 - at$ tant que le modèle est physiquement valable. Le second modèle ne doit pas être prolongé jusqu'à des quantités négatives.

Entrée constante et sortie proportionnelle

Avec une entrée R et une élimination kQ , $dQ/dt = R - kQ$. La quantité d'équilibre est $Q_{eq} = R/k$. La solution est $Q(t) = Q_{eq} + (Q_0 - Q_{eq})\exp(-kt)$. Si $Q_0 = 0$, la quantité augmente progressivement vers Q_{eq} , sans l'atteindre exactement en un temps fini dans le modèle.

Après une demi-vie, on a parcouru la moitié de l'écart initial à l'équilibre ; après deux, les trois quarts ; après quatre, 93,75 %. L'expression « équilibre atteint après quatre ou cinq demi-vies » est une approximation pratique, pas une égalité mathématique.

Systèmes et conservation

Pour deux compartiments échangeant une substance, une sortie de l'un peut être une entrée de l'autre. Si aucune création, destruction ni sortie globale n'existe, la somme des quantités se conserve. Une erreur de signe dans un transfert viole cette conservation.

Les constantes apparentes dépendent du choix des variables. Une vitesse en quantité/temps et une vitesse en concentration/temps ne sont équivalentes qu'après prise en compte du volume, qui peut lui-même varier.

Développements et raisonnements

Le bilan fixe les signes

Notons Q la quantité de substance à l'intérieur d'un compartiment. Sur un temps dt , sa variation est quantité entrée moins quantité sortie plus production moins consommation. Diviser par dt puis prendre la limite donne une équation différentielle. Chaque terme doit avoir l'unité quantité par temps. Un coefficient de transfert proportionnel à Q possède donc l'unité inverse du temps.

Si l'on utilise la concentration $C = Q/V$ et que V varie, la dérivée de Q est $V dC/dt + C dV/dt$. Oublier le second terme confond dilution et disparition de substance. Dans un volume constant, il disparaît et le bilan devient plus simple. Le choix des variables doit être annoncé avant de résoudre.

Résoudre une équation homogène

Pour $dQ/dt = -kQ$, séparer les variables positives donne $dQ/Q = -kdt$. Intégrer fournit $\ln(Q/Q_0) = -kt$, donc $Q = Q_0 \exp(-kt)$. La solution $Q = 0$ doit aussi être reconnue sans diviser par zéro. La condition initiale fixe la constante ; sans elle, on obtient une famille de solutions.

On vérifie une solution en la dérivant puis en la substituant dans l'équation. La vérification comporte aussi $Q(0) = Q_0$ et le comportement lorsque t grandit. Avec k positif, la quantité reste positive et décroît vers zéro. Un signe opposé provoquerait une croissance, incompatible avec une sortie seule.

Déplacer l'équilibre pour résoudre une entrée constante

Pour $dQ/dt = R - kQ$, la valeur stationnaire est $Q_{eq} = R/k$. Posons $Z = Q - Q_{eq}$. Comme Q_{eq} est constant, $dZ/dt = -kZ$. La solution devient $Q = Q_{eq} + (Q_0 - Q_{eq})\exp(-kt)$. Cette transformation montre que l'écart à l'équilibre, plutôt que la quantité elle-même, décroît exponentiellement.

Si Q_0 est supérieur à Q_{eq} , la quantité diminue ; s'il est inférieur, elle augmente. Dans les deux cas elle se rapproche de la même limite. La pente initiale vaut $R - kQ_0$. Un niveau stationnaire stable suppose k positif. Un système réel avec rétroactions ou saturation peut avoir une dynamique différente.

Deux compartiments et conservation globale

Pour un transfert de A vers B à débit kA , le bilan de A contient $-kA$ et celui de B $+kA$. Leur somme supprime le transfert interne. Si aucune sortie globale ni transformation n'existe, $A + B$ reste constant. Cette conservation constitue un contrôle puissant : un même terme négatif dans les deux bilans ferait disparaître de la matière sans mécanisme annoncé.

Un transfert réversible ajoute $-k_{12}A + k_{21}B$ dans le premier bilan et les signes opposés dans le second. L'équilibre des flux ne signifie pas que A et B soient égaux ; leur rapport dépend des constantes et des volumes si l'on interprète des concentrations. La notion de compartiment est un modèle de mélange, pas forcément un organe anatomique.

Changements de régime

Si une entrée s'arrête à t_1 , on calcule d'abord $Q(t_1)$ dans la première phase. Cette valeur devient la condition initiale de la décroissance suivante. Repartir de zéro au changement de régime supprimerait le stock présent. Les solutions par morceaux doivent rester continues sauf si un apport instantané ou un retrait instantané est explicitement introduit.

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

Un réservoir contient $Q_0 = 20$ unités. Il reçoit $R = 10$ unités/min et perd kQ avec $k = 0,20 \text{ min}^{-1}$. La limite est 50 unités et la solution $Q = 50 - 30 \exp(-0,20t)$. À cinq minutes, $Q = 38,9636$. La pente initiale est $10 - 0,20 \times 20 = 6$ unités/min ; à cinq minutes elle vaut environ 2,2073. Le remplissage ralentit parce que la sortie augmente avec le stock.

L'entrée s'arrête à cinq minutes. Pour $t \geq 5$, la solution devient $38,9636 \exp[-0,20(t - 5)]$. À dix minutes, $Q = 14,3339$. Le temps utilisé dans l'exponentielle de cette seconde phase est la durée depuis l'arrêt, non le temps total depuis le début.

Deux compartiments fermés commencent avec $A_0 = 100$ et $B_0 = 0$, avec transfert unidirectionnel $k = 0,10 \text{ min}^{-1}$. À dix minutes, $A = 36,7879$ et $B = 63,2121$. La somme reste 100. B n'obéit pas à une décroissance indépendante : son augmentation provient précisément de la diminution de A.

Un volume passe de 1 à 2 L sans perte d'une quantité de 10 unités. La concentration passe de 10 à 5 unités/L. Une baisse de concentration n'implique donc pas une élimination : le bilan de quantité permet de distinguer cette dilution d'une disparition réelle.

Approfondissement et contrôle du modèle

Paramètres constants et coefficients variables

La solution exponentielle simple suppose k constant. Si k dépend du temps, le bilan $dQ/dt = -k(t)Q$ conduit à un exposant contenant l'intégrale de k sur le temps. Remplacer $k(t)$ par une moyenne peut être possible dans certains calculs, mais cette moyenne doit correspondre à l'intégrale pertinente et à la question posée.

Une variation du volume peut aussi changer le lien entre quantité et concentration. Une concentration stationnaire ne signifie pas nécessairement une quantité stationnaire si le volume augmente. Le terme $C \, dV/dt$ du bilan doit être conservé dans ce cas.

Pour étudier la stabilité d'un équilibre d'une équation $dQ/dt = f(Q)$, on examine le signe de f de part et d'autre. Si une perturbation au-dessus produit une dérivée négative et une perturbation au-dessous une dérivée positive, le système revient localement vers l'équilibre. Cette lecture qualitative peut précéder une solution explicite et détecter une erreur de signe. Elle reste locale : d'autres équilibres ou limites de domaine peuvent changer la dynamique globale.

Mise à l'épreuve : Un volume variable modifie l'équation de concentration

Problème. Une quantité Q reste constante dans un réservoir dont le volume suit $V(t) = V_0 + at$, avec a positif. Déduire la concentration et sa dérivée.

Résolution. $C = Q/V$, donc $C(t) = Q/(V_0 + at)$. En dérivant le quotient, $dC/dt = -Qa/(V_0 + at)^2 = -Ca/V$. La concentration diminue sans élimination de soluté. Plus généralement, $Q = CV$ donne $dQ/dt = V \, dC/dt + C \, dV/dt$. Oublier le second terme attribuerait à une disparition de matière ce qui vient d'une dilution. Avec $Q = 10$ unités, $V_0 = 2$ L et $a = 1$ L/h, C passe de 5 à 2,5 unités/L en 2 h. Le volume n'est donc pas un paramètre constant caché.

Schéma de raisonnement

Résoudre un bilan

1. Quantité et frontière • 2. Entrées moins sorties • 3. Condition initiale • 4. Solution • 5. Conservation et limites

Le schéma s'applique à un modèle donné. Un changement de volume ou de paramètre exige de modifier l'équation, pas seulement de réutiliser la même formule.

Exercices progressifs

1. Pour $R = 12$ unités/h et $k = 0,3 \text{ h}^{-1}$, quantité stationnaire ?
2. Vérifier la condition initiale de $Q = 40 + (Q_0 - 40)e^{-kt}$.
3. Avec $Q_0 = 0$, quelle fraction de Q_{eq} après deux demi-vies ?
4. Une sortie de A vers B apparaît avec quels signes ?
5. Si le volume double sans perte de quantité, que devient C ?
6. Pourquoi une solution de sortie constante $Q_0 - at$ doit-elle être limitée dans le temps ?

Corrections argumentées

1. $R/k = 40$ unités.
2. À $t = 0$, l'exponentielle vaut un et $Q = Q_0$.
3. 75 %, car l'écart restant à la limite vaut un quart.
4. Négatif dans A et positif dans B, sauf transformation ou perte supplémentaire explicitée.
5. Elle est divisée par deux par $C = Q/V$.
6. Au-delà de Q_0/a , elle deviendrait négative. Le modèle doit s'arrêter ou changer lorsque le stock atteint zéro.

Références et portée

- Source 1 : openstax.org
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.

Partie 4 · Vecteurs, projections et trigonométrie

Prérequis et objectifs

Maîtriser repérage cartésien, théorème de Pythagore et angles. Choisir un repère et le conserver pendant le calcul.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Décomposer et additionner des vecteurs.
- Utiliser produit scalaire et projection.
- Relier trigonométrie, force et mesure Doppler.

Fondements du thème

Développements et raisonnements

Scalaire, vecteur et composantes

Une masse, une température ou une énergie sont décrites par une valeur scalaire avec unité. Une force, une vitesse ou un déplacement nécessitent aussi une direction et un sens. Un vecteur peut se représenter par ses composantes dans un repère orthonormé. Changer le repère change les composantes, mais pas la grandeur géométrique représentée.

En deux dimensions, un vecteur u possède les composantes $(u_x ; u_y)$. Sa norme vaut $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Elle est positive ou nulle et a l'unité de ses composantes. Additionner deux vecteurs consiste à additionner leurs composantes correspondantes. Additionner seulement leurs normes n'est correct que dans un cas particulier de même direction et même sens.

Pour une force F faisant un angle θ avec l'axe x positif, $F_x = F \cos \theta$ et $F_y = F \sin \theta$. Ces composantes peuvent être négatives. Les angles doivent être définis par rapport à l'axe annoncé ; utiliser l'angle avec la verticale demande de permuter les fonctions ou de convertir l'angle. Un dessin de repère rend cette convention visible.

Angles en degrés et radians

Un tour complet vaut 360° ou 2π radians. Un angle en radians est le rapport d'une longueur d'arc au rayon, donc sans dimension. Les formules de dérivation de $\sin$ et $\cos$ prennent leur forme habituelle lorsque l'argument est en radians. Une calculatrice réglée en degrés pour un calcul prévu en radians peut donner un résultat plausible mais faux.

Les valeurs de référence sont utiles : $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin 30^\circ = 1/2$, $\cos 60^\circ = 1/2$, $\sin 90^\circ = 1$. Le signe dépend du quadrant. L'identité $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ assure que les composantes reconstruites ont la norme annoncée.

Produit scalaire et projection

Le produit scalaire $u \cdot v$ vaut $u_x v_x + u_y v_y$ en deux dimensions. Géométriquement, il vaut $\text{norme}(u) \text{norme}(v) \cos \theta$. Il est nul pour des vecteurs perpendiculaires non nuls, positif pour un angle aigu et négatif pour un angle obtus. Il produit un scalaire dont l'unité est le produit des unités des vecteurs.

Le travail d'une force constante sur un déplacement est $F \cdot d$. Une composante perpendiculaire ne contribue pas à ce travail. La projection de u sur un axe unitaire e vaut $u \cdot e$. Une mesure Doppler renseigne sur une projection de vitesse, ce qui explique son facteur $\cos \theta$. Le signe du résultat peut décrire un rapprochement ou un éloignement selon la convention du dispositif.

Moment et bras de levier

En deux dimensions, le moment signé autour de l'origine s'écrit $M_z = xF_y - yF_x$. Sa norme géométrique est $rF \sin \theta$, où θ est l'angle entre position et force. Le bras de levier est $r \sin \theta$: la distance perpendiculaire à la ligne d'action. Une force élevée presque alignée avec le segment peut produire un faible moment.

Le moment utilise des $N \cdot m$, comme une énergie, mais représente une action de rotation et non un transfert énergétique scalaire identique. Le signe indique le sens de rotation adopté. Pour un équilibre, la somme des forces et celle des moments doivent être vérifiées ; l'une n'implique pas automatiquement l'autre.

Angle mesuré et incertitude

Pour $v_{\text{projection}} = v \cos \theta$, une correction $v = v_{\text{projection}} / \cos \theta$ devient très sensible quand θ approche 90° . Le dénominateur tend vers zéro. Une petite incertitude d'angle peut produire une grande incertitude sur v . Ce problème est géométrique et ne se résout pas en affichant davantage de décimales.

Une fonction arctangente simple retrouve un rapport y/x mais peut perdre l'information de quadrant. Pour reconstruire une direction complète, il faut examiner les signes des composantes ou utiliser une fonction à deux arguments adaptée. Un angle seul ne doit pas être annoncé sans préciser l'orientation de référence.

Objet calculé	Expression en deux dimensions	Interprétation
Norme	$\text{racine}(x^2 + y^2)$	Intensité géométrique
Somme	$(x1 + x2 ; y1 + y2)$	Résultante
Produit scalaire	$x1x2 + y1y2$	Projection pondérée
Moment plan	$xF_y - yF_x$	Action de rotation

Méthode de résolution

Dessiner les axes et inscrire chaque angle par rapport à eux. Décomposer ensuite les vecteurs sans perdre les signes. Faire les opérations sur les composantes, puis seulement calculer norme et direction de la résultante. Contrôler un cas simple : deux forces égales opposées doivent s'annuler ; deux forces égales perpendiculaires donnent une norme multipliée par racine deux, pas par deux.

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

Deux forces valent $F_1 = (3 ; 4) \text{ N}$ et $F_2 = (-1 ; 2) \text{ N}$. La résultante est $(2 ; 6) \text{ N}$ et sa norme racine $40 = 6,3249 \text{ N}$. Les normes individuelles sont 5 et racine $5 = 2,2361 \text{ N}$; leur somme 7,2361 ne donne pas la norme de la résultante. Le produit scalaire $F_1 \cdot F_2$ vaut $-3 + 8 = 5 \text{ N}^2$, ce qui correspond à un angle aigu entre elles.

Une force de 20 N agit à 60° d'un déplacement horizontal de $0,50 \text{ m}$. Sa composante utile au travail vaut $20 \cos 60^\circ = 10 \text{ N}$ et le travail 5 J . La composante verticale vaut $17,3205 \text{ N}$ mais ne travaille pas sur ce déplacement horizontal. Elle peut néanmoins intervenir dans d'autres contraintes du système.

Une force verticale de 30 N agit au point de coordonnées $(0,20 ; 0,10) \text{ m}$. Le moment autour de l'origine est $0,20 \times 30 - 0,10 \times 0 = 6 \text{ N}\cdot\text{m}$. Utiliser la distance radiale racine $(0,20^2 + 0,10^2)$ sans facteur d'angle surestimerait le moment ; le bras perpendiculaire est ici $0,20 \text{ m}$.

Une vitesse projetée de $0,25 \text{ m/s}$ est mesurée avec un angle de 60° . La vitesse reconstruite est $0,50 \text{ m/s}$. Si l'angle réel était 65° , elle serait $0,5916 \text{ m/s}$ pour la même projection. Une erreur de cinq degrés modifie donc l'estimation d'environ 18% . L'effet serait encore plus fort à proximité de 90° . La précision de la projection ne suffit pas à connaître celle de la vitesse reconstruite.

Approfondissement et contrôle du modèle

Changer de repère sans changer le phénomène

Une rotation des axes modifie les composantes d'un vecteur mais conserve sa norme et les produits scalaires entre vecteurs. Une force peut ainsi posséder une composante horizontale nulle dans un repère et non nulle dans un autre, sans changer physiquement. Ce sont les axes choisis qui changent, pas l'action mécanique.

Pour un plan incliné, choisir un axe parallèle au plan et un autre perpendiculaire simplifie souvent le bilan. Le poids se décompose alors selon ces directions, tandis que la réaction normale possède une composante simple. Le gain de simplicité ne doit pas faire oublier l'angle : il faut vérifier quelle composante utilise sin et laquelle cos par un dessin ou un cas limite.

Une vitesse relative dépend du référentiel. Soustraire deux vecteurs vitesse exprimés dans le même repère donne une vitesse relative dans un cadre galiléen simple. Soustraire seulement leurs normes peut être faux si leurs directions diffèrent. Le choix d'un référentiel commun est donc préalable à l'opération, comme le choix d'une unité commune l'est à l'addition de grandeurs.

Mise à l'épreuve : La norme d'une somme n'est pas la somme des normes

Problème. Deux forces ont pour composantes $F_1 = (3 ; 4) \text{ N}$ et $F_2 = (3 ; -4) \text{ N}$. Déterminer leurs normes et celle de la résultante.

Résolution. Chaque force a pour norme $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ N}$. Leur somme vaut $(6 ; 0) \text{ N}$, de norme 6 N et non 10 N . Les composantes verticales se compensent, les horizontales s'ajoutent. La somme des normes n'est atteinte que pour deux vecteurs de même direction et de même sens. La règle graphique du parallélogramme montre cette différence ; un calcul énergétique utilisant seulement « $5 + 5$ » oublierait la géométrie. Sous changement de repère orthonormé, les composantes changent mais cette norme reste 6 N .

Schéma de raisonnement

Calcul vectoriel

1. Repère et angles • 2. Composantes signées • 3. Opération adaptée • 4. Norme ou projection • 5. Contrôle géométrique

Le dessin est un modèle géométrique, pas une mesure anatomique. Les angles et distances doivent correspondre à la ligne d'action réelle.

Exercices progressifs

1. Norme de $u = (-6 ; 8)$ cm ?
2. Additionner $(2 ; -3)$ et $(-2 ; 5)$.
3. Deux vecteurs de produit scalaire nul sont-ils toujours tous deux non nuls ?
4. Travail d'une force de 8 N parallèle et opposée à un déplacement de 3 m ?
5. Convertir 150° en radians.
6. Un bras de 0,10 m porte une force de 40 N sous 30° . Moment en norme ?

Corrections argumentées

1. 10 cm par Pythagore. La norme ne conserve pas le signe de la composante x.
2. $(0 ; 2)$, dans l'unité commune.
3. Non, un vecteur nul donne aussi un produit nul. La conclusion de perpendicularité exige des vecteurs non nuls.
4. $W = 8 \times 3 \times \cos 180^\circ = -24$ J. Le signe indique un travail résistant.
5. $150 \times \pi/180 = 5\pi/6$ rad, environ 2,618 rad.
6. $M = 0,10 \times 40 \times \sin 30^\circ = 2$ N·m. Le bras efficace vaut 0,05 m.

Références et portée

- OpenStax : [scalaires et vecteurs](#)
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.