



Outils mathématiques : calcul, logarithmes et incertitudes

OSSIK • COURS 22-01 • LE CORRIGÉ • RÉVISION 0.5

PASS - majeure santé - classement d'après la maquette publique de Paris Cité, sans lien avec l'université. Cours original rédigé avec une IA. Le cours de ta faculté fait foi.

Sommaire du cours

Partie 1 • Unités, proportions et calcul algébrique	1
Partie 2 • Logarithmes, exponentielles et échelles	6
Partie 3 • Approximations et propagation des incertitudes	10
Partie 4 • Systèmes linéaires et calcul numérique	15

Partie 1 • Unités, proportions et calcul algébrique

Prérequis et objectifs

Maîtriser les opérations élémentaires, les fractions et les nombres relatifs. Écrire les unités à chaque étape plutôt que de les ajouter à la fin.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Convertir des unités composées.
- Isoler une inconnue sans modifier l'équation.
- Relier proportionnalité et conservation.

Fondements du thème

Objectifs

Ce volume apporte les outils analytiques utilisés en chimie, physique, biophysique, pharmacocinétique et biostatistiques. Il complète le volume 13 consacré aux probabilités et aux statistiques. Chaque relation doit être accompagnée de ses hypothèses, de ses variables et de ses unités.

Une grandeur est le produit d'une valeur numérique par une unité. Changer d'unité change la valeur numérique, pas la grandeur. Additionner deux grandeurs de dimensions différentes n'a pas de sens physique, même si une calculatrice accepte les nombres.

Préfixes et puissances

Milli signifie 10^{-3} , micro 10^{-6} , nano 10^{-9} . Ainsi $1 \text{ mg} = 1\,000 \text{ } \mu\text{g}$. Une conversion de surface ou de volume doit être élevée à la puissance correspondante : $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$, car $(10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$.

Pour multiplier des puissances de même base, on additionne les exposants. Pour les diviser, on les soustrait. Ces règles ne s'appliquent pas à une somme : $10^2 + 10^3$ vaut 1 100, pas 10^5 .

Analyse dimensionnelle

Un débit volumique $Q = V/t$ s'exprime comme volume/temps. Une concentration $C = m/V$ s'exprime comme masse/volume. Le produit $C \times Q$ a la dimension d'une masse par temps. Cette vérification simple permet de détecter de nombreuses erreurs avant de calculer.

L'argument d'une exponentielle ou d'un logarithme doit être sans dimension. Dans $\exp(-kt)$, k a donc l'unité inverse de celle du temps. Le logarithme d'une concentration est en pratique pris après normalisation par une concentration de référence ou dans une convention explicitée.

Exemple guidé

Une solution fictive contient 250 mg dans 50 mL. Sa concentration est 5 mg/mL. Un volume de 2 mL contient donc 10 mg. Il s'agit d'un exercice de proportionnalité, pas d'une posologie à appliquer.

Si l'on exprime la concentration en g/L, $5 \text{ mg/mL} = 5 \text{ g/L}$, car les deux facteurs de conversion se compensent. Ce résultat est un bon contrôle d'ordre de grandeur.

Développements et raisonnements

Une conversion est une multiplication par un rapport égal à un

Pour convertir 72 km/h en m/s, on multiplie par 1000 m/1 km puis par 1 h/3600 s. Les kilomètres et les heures se simplifient, laissant 20 m/s. Cette méthode donne le sens des facteurs et évite de mémoriser une liste de conversions isolées. Pour un débit en mL/min, la conversion en m^3/s associe un facteur 10^{-6} et une division par 60.

Les puissances s'appliquent à toute l'unité. Puisque $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, un mm^2 vaut 10^{-6} m^2 et un mm^3 vaut 10^{-9} m^3 . L'erreur la plus fréquente consiste à utiliser le facteur de longueur pour une surface ou un volume. Une aire de 10 mm^2 est petite devant un m^2 ; le contrôle visuel de l'ordre de grandeur doit rester compatible avec le résultat numérique.

Manipuler les fractions avec leur domaine

Une fraction a/b exige b non nul. On peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur, mais pas un terme au milieu d'une somme. Ainsi $(ax + ay)/a = x + y$ si a est non nul ; $(a + x)/a = 1 + x/a$, pas x . Cette distinction intervient souvent dans les relations saturables comme $C/(K + C)$.

Pour isoler x dans $y = ax + b$, on soustrait b aux deux membres puis on divise par a non nul. Pour $y = a/(b + x)$, on multiplie d'abord par $b + x$, puis on isole $x = a/y - b$ si y est non nul. Les restrictions de domaine doivent accompagner la transformation : une solution algébrique qui annule un dénominateur initial n'est pas admissible.

Proportionnalité directe et inverse

Si $y = kx$, le rapport y/x reste constant. Si $y = k/x$, c'est le produit xy qui reste constant. Une droite qui ne passe pas par l'origine n'est pas une proportionnalité directe. Une calibration $y = 2x + 5$ ne permet pas d'affirmer que doubler x double y . Le terme constant change cette relation.

Les pourcentages sont des rapports à une référence. Une hausse de 15 % multiplie par 1,15 ; une baisse de 15 % multiplie par 0,85. Deux variations successives se composent par multiplication. Pour revenir après une hausse de 15 %, la baisse requise est $1 - 1/1,15 = 13,04 \%$, non 15 %. Le dénominateur de la variation a changé.

Résoudre un mélange par conservation

Pour deux solutions du même soluté, la masse finale est $c_1V_1 + c_2V_2$ sous les unités cohérentes. Si les volumes s'additionnent, $c_f = (c_1V_1 + c_2V_2)/(V_1 + V_2)$. La concentration finale doit se trouver entre les deux concentrations initiales si aucune réaction ni perte n'intervient. Une valeur en dehors de cet intervalle signale une erreur ou une hypothèse manquante.

Relation	Invariant	Exemple de contrôle
$y = kx$	y/x	Doubler x double y
$y = k/x$	xy	Doubler x divise y par deux
$y = ax + b$	Pente a	L'ordonnée b empêche une proportion simple
Mélange conservatif	Quantité totale	Concentration entre les valeurs initiales

Une équation homogène peut être fausse dans son coefficient numérique ou sa physique. L'analyse dimensionnelle élimine certaines erreurs, mais ne prouve pas toute une formule. Inversement, une formule juste devient numériquement fausse si les unités des valeurs insérées ne correspondent pas à celles des constantes.

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

Convertissons un débit de 12 mL/min en m^3/s : $12 \times 10^{-6}/60 = 2 \times 10^{-7} m^3/s$. Si le conduit possède une section de $4 mm^2 = 4 \times 10^{-6} m^2$, la vitesse moyenne vaut $Q/S = 0,050 m/s$. La simplification donne bien m/s. Diviser directement 12 par 4 sans conversion donnerait un nombre 3 dépourvu de la bonne interprétation.

On veut préparer 250 mL à 0,20 mol/L à partir d'une solution à 2,0 mol/L. Le bilan donne $V_{stock} = 0,20 \times 250/2,0 = 25 mL$. Il faut compléter jusqu'au volume final de 250 mL dans le modèle de préparation, et non ajouter 250 mL de solvant. La quantité de matière est 0,050 mol des deux côtés de l'égalité, contrôle indépendant de la concentration.

Une concentration de 4 g/L correspond à 4 mg/mL parce que les facteurs mille se compensent. Mais 4 mmol/L ne correspond pas à 4 mg/mL sans masse molaire. Avec $M = 50 g/mol$, 4 mmol/L donne $0,200 g/L = 0,200 mg/mL$. Une unité de quantité de matière ne se convertit en unité de masse qu'avec l'identité de l'espèce.

Enfin, résoudre $0,80 = C/(2 + C)$ donne $1,6 + 0,8C = C$, puis $C = 8$ dans l'unité de la constante 2. Substituer 8 dans l'expression initiale donne $8/10 = 0,80$. Cette dernière substitution vérifie le calcul et le domaine simultanément.

Approfondissement et contrôle du modèle

Pourcentage d'une quantité et points de pourcentage

Une proportion passant de 30 % à 36 % augmente de six points de pourcentage. Sa hausse relative vaut six divisés par trente, soit 20 %. Les deux expressions sont compatibles mais utilisent des références différentes. Dans un tableau de résultats, préciser l'une ou l'autre évite une ambiguïté de facteur.

Une concentration exprimée en pourcentage peut encore désigner masse par masse, masse par volume ou volume par volume. Le même symbole % ne suffit donc pas à établir une conversion. L'écriture complète du numérateur et du dénominateur constitue une meilleure protection que la mémorisation d'un facteur.

Pour un contrôle de mélange, vérifier également que les unités des concentrations sont compatibles. Une moyenne de g/L et de mmol/L ne peut être calculée avant conversion avec la masse molaire. Le raisonnement conserve des quantités physiques, pas seulement des nombres affichés.

Mise à l'épreuve : Un débit exige une chaîne d'unités complète

Problème. Un dispositif pédagogique apporte 12 mg par heure avec une solution à 4 mg/mL. Exprimer le débit en mL/min, puis convertir le volume écoulé en 20 minutes en litres.

Résolution. $12 \text{ mg/h} \div 4 \text{ mg/mL} = 3 \text{ mL/h}$. La minute étant soixante fois plus courte, le débit vaut $3/60 = 0,050 \text{ mL/min}$. En 20 min, le volume vaut $1 \text{ mL} = 0,001 \text{ L}$. Le résultat intermédiaire 180 mL/min proviendrait d'une multiplication par 60 au lieu d'une division. Les mg s'annulent lors de la division par la concentration ; une valeur finale en mg/mL signalerait un calcul inachevé. Le dispositif est fictif : l'exercice vérifie les unités, pas une prescription.

Schéma de raisonnement

Calcul algébrique avec unités

1. Grandeur cherchée • 2. Équation et domaine • 3. Unités cohérentes • 4. Inconnue isolée • 5. Substitution de contrôle

Le schéma place la transformation symbolique avant les nombres. Il ne dispense pas de vérifier que l'équation choisie décrit bien la situation.

Exercices progressifs

1. Convertis 0,025 L en mL.
2. Convertis 3 cm^2 en m^2 .
3. Si C est en mol/L et Q en L/min, quelle unité possède $C \times Q$?
4. Convertir 3,6 L/h en mL/s.
5. Résoudre $12 = 3x + 6$ puis vérifier.
6. Une valeur augmente de 10 %, puis de 20 %. Hausse totale ?

Corrections argumentées

1. 25 mL, car $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ mL}$.
2. $3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Le facteur 10^{-2} doit être mis au carré.
3. mol/min, après simplification des litres.
4. $3,6 \times 1000/3600 = 1 \text{ mL/s}$.
5. $3x = 6$, donc $x = 2$; $3 \times 2 + 6 = 12$ confirme.
6. Le facteur est $1,10 \times 1,20 = 1,32$, soit 32 %. Additionner les pourcentages manquerait le terme composé.

Références et portée

- OpenStax : [conversion des unités](#)
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.

Partie 2 · Logarithmes, exponentielles et échelles

Prérequis et objectifs

Savoir utiliser puissances et fonctions inverses. Les logarithmes réels exigent des arguments strictement positifs et sans dimension.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Résoudre une relation exponentielle.
- Lire les pentes en coordonnées logarithmiques.
- Distinguer variations relatives et différences absolues.

Fondements du thème

Variation relative et points de pourcentage

Passer de 20 % à 30 % correspond à une hausse de 10 points de pourcentage. La hausse relative vaut $(30 - 20)/20 = 50\%$. Ces deux nombres décrivent le même changement avec des dénominateurs différents.

Une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 % ne ramène pas à la valeur initiale. En partant de 100, on obtient 120 puis 96. Les variations successives multiplient des facteurs, elles ne s'additionnent pas directement.

Logarithmes

Le logarithme décimal $\log_{10}(x)$ est l'exposant auquel il faut élever 10 pour obtenir x . Le logarithme népérien $\ln(x)$ utilise la base e . Ils sont définis sur les réels strictement positifs. La relation de changement de base est $\log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10)$.

Les règles fondamentales sont $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, et $\ln(a^r) = r \ln(a)$ lorsque les expressions sont définies. En revanche, $\ln(a+b)$ n'est généralement pas $\ln(a)+\ln(b)$.

Échelles logarithmiques

Sur une échelle logarithmique, des écarts graphiques égaux correspondent à des rapports égaux. Les valeurs 1, 10 et 100 y sont régulièrement espacées. Une distance apparente identique n'exprime donc pas une différence absolue identique.

Le pH est défini à partir de l'activité des ions hydrogène. Dans l'approximation de solution suffisamment diluée et selon la convention usuelle, on utilise souvent $\text{pH} \approx -\log_{10}([H^+]/1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1})$. Une augmentation d'une unité correspond à une division par dix de l'activité, pas à une petite variation additive.

Résoudre une exponentielle

Pour $C(t) = C_0 \exp(-kt)$, chercher le temps où $C/C_0 = r$ donne $\ln(r) = -kt$, donc $t = -\ln(r)/k$. Pour $r = 1/2$, $t_{1/2} = \ln(2)/k$. La demi-vie est constante uniquement si k l'est et si le modèle d'ordre un convient.

Exemple : $k = 0,2 \text{ h}^{-1}$. La demi-vie vaut environ 3,47 h. Pour atteindre 10 % de la valeur initiale, $t = \ln(10)/0,2 \approx 11,51 \text{ h}$. Une même durée n'élimine pas une masse constante mais une fraction constante.

Développements et raisonnements

Deux fonctions inverses et leurs domaines

La fonction exponentielle $\exp(x)$ prend des valeurs strictement positives pour tout x réel. Le logarithme $\ln(x)$ est défini pour x positif et vérifie $\ln(\exp(x)) = x$. L'égalité $\exp(\ln(x)) = x$ exige donc x positif. On ne peut prendre le logarithme d'une quantité nulle pour transformer une équation, ni supprimer cette restriction après simplification.

La règle $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ vient du fait que multiplier des exponentielles additionne leurs exposants. Elle ne s'étend pas à une somme. Pour vérifier, $\ln(1 + 1) = \ln 2$ alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$. Un contre-exemple numérique simple suffit à rejeter la fausse identité.

Dériver une demi-vie et un temps de seuil

Pour $C(t) = C_0 \exp(-kt)$, diviser par C_0 donne un rapport r sans unité. Le logarithme donne $\ln r = -kt$. On en tire $t = -\ln r/k$. Le signe est positif pour $0 < r < 1$ et k positif. Si un calcul de temps de décroissance donne un temps négatif, il faut vérifier le rapport et le signe devant k .

Une demi-vie utilise $r = 1/2$. Deux demi-vies laissent un quart, trois un huitième. La fraction éliminée après une durée vaut $1 - r$. Éliminer 90 % signifie qu'il reste 10 % ; mettre $r = 0,90$ calculerait le temps de seulement 10 % de disparition. Écrire les mots « restant » ou « éliminé » à côté du rapport évite cette inversion.

Reconnaître une loi par une représentation

Pour $y = A \exp(bx)$, $\ln(y/y_{\text{ref}})$ est une fonction affine de x , de pente b si les unités sont cohérentes. Une droite en semi-logarithmique peut donc soutenir un modèle exponentiel sur le domaine observé. Pour $y = Ax^n$ avec x positif, $\ln y = \ln A + n \ln x$ sous des normalisations explicites : une droite en log-log possède une pente n .

Un graphique logarithmique transforme des rapports égaux en distances égales. Les valeurs 2, 20 et 200 y sont régulièrement espacées. Une pente visuelle dépend aussi des échelles des axes ; il faut la calculer avec les valeurs graduées. Des zéros ou des valeurs négatives ne peuvent pas être représentés sur un axe logarithmique ordinaire sans autre convention.

Bases et unités de la pente

Un tracé $\log_{10}(C/C_0)$ d'une décroissance possède une pente $-k/\ln 10$, alors qu'un tracé $\ln(C/C_0)$ possède $-k$. Lire une pente décimale comme une constante népérienne produit une erreur d'un facteur $\ln 10$. La base du logarithme fait donc partie de la définition de l'axe, au même titre que l'unité de temps.

Transformation	Pente interprétable	Restriction
$\ln(C/C_0)$ contre t	$-k$	Décroissance exponentielle
$\log_{10}(C/C_0)$ contre t	$-k/\ln 10$	Base décimale
$\ln(y/y_0)$ contre $\ln(x/x_0)$	Exposant n	Loi de puissance

Transformation	Pente interprétable	Restriction
y contre x	Variation absolue par unité	Relation affine

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

Une quantité passe de 80 à 20 unités en six heures selon une loi exponentielle. Le rapport vaut $1/4$, donc $k = \ln 4/6 = 0,231049 \text{ h}^{-1}$. La demi-vie vaut $\ln 2/k = 3 \text{ h}$. Pour atteindre 5 unités, il faut un rapport $1/16$, soit quatre demi-vies et douze heures. La résolution logarithmique et le raisonnement par fractions donnent le même résultat.

Deux mesures valent 10 à $t = 2 \text{ h}$ et 4 à $t = 7 \text{ h}$. Leur quotient élimine C_0 : $4/10 = \exp[-k(7 - 2)]$. On obtient $k = \ln(2,5)/5 = 0,183258 \text{ h}^{-1}$. La concentration extrapolée au temps zéro est $10 \exp(2k) = 14,427$ unités. Cette extrapolation dépend entièrement de la validité du modèle sur la période non observée.

Une droite en $\log_{10}(C/C_{\text{ref}})$ présente une pente $-0,030$ par minute. La constante k vaut $0,030 \ln 10 = 0,069078 \text{ min}^{-1}$ et la demi-vie $10,034 \text{ min}$. Utiliser $0,030$ directement donnerait $23,10 \text{ min}$, une erreur due à la base du logarithme.

Enfin, une population augmente de 5 % par période. Après dix périodes, son facteur est $1,05^{10} = 1,628895$. Une croissance continue donnant le même facteur par période utilise $r = \ln 1,05 = 0,048790$ par période. Le taux discret 5 % et le coefficient continu ne sont pas exactement le même paramètre.

Approfondissement et contrôle du modèle

Résolution d'une équation avec décalage

Une expression $y = a + b \exp(-kt)$ ne se transforme pas en $\ln y = \ln a + \ln b - kt$. Il faut d'abord isoler la partie exponentielle : $(y - a)/b = \exp(-kt)$. Le logarithme ne s'applique qu'à ce rapport positif. Le domaine des valeurs observables est donc lié à a , b et au signe de k .

Le terme a représente parfois un niveau de fond ou une limite. L'oublier peut courber un tracé logarithmique et fausser une pente. Estimer ce fond sur des mesures indépendantes ou dans un modèle conjoint devient alors important. Une droite apparente sur une courte plage ne prouve pas que le fond soit nul.

La même prudence vaut pour une croissance vers un plateau : on peut linéariser l'écart au plateau si ce plateau est connu, mais son incertitude se transmet au logarithme. Une valeur mesurée légèrement au-dessus de la limite supposée ne peut pas être log-transformée de cette manière sans examiner bruit et adéquation du modèle.

Mise à l'épreuve : Identifier une exponentielle malgré une valeur de départ inconnue

Problème. Une grandeur suit $C(t) = C_0 \exp(-kt)$. On observe $C(2 \text{ h}) = 12$ et $C(6 \text{ h}) = 3$ dans la même unité. Retrouver k et C_0 .

Résolution. Diviser les deux équations élimine C_0 : $3/12 = \exp(-4k)$, donc $k = \ln 4/4 = 0,3466 \text{ h}^{-1}$. Ensuite $C_0 = 12 \exp(2k) = 24$. La demi-vie vaut 2 h . Le quotient des concentrations rend le logarithme sans dimension. Deux points déterminent les deux paramètres du modèle mais ne prouvent pas que le

phénomène soit exponentiel ; une troisième observation peut tester sa cohérence. Un offset de mesure doit être soustrait avant cette démarche, sinon le rapport ne suit plus l'équation supposée.

Schéma de raisonnement

Résoudre une exponentielle

1. Rapport sans unité • 2. Logarithme choisi • 3. Inconnue isolée • 4. Signe et temps • 5. Vérification par substitution

La transformation est exacte dans son domaine. Le modèle exponentiel, lui, doit être justifié par le mécanisme ou les données.

Exercices progressifs

1. Calculer $\ln(e^{-2})$.
2. Une quantité est divisée par huit en neuf heures. Demi-vie ?
3. Dans une loi $y = Ax^3$, quel facteur sur y produit un doublement de x ?
4. Résoudre $\exp(-0,2t) = 0,1$.
5. Pourquoi $\ln(a + b)$ ne peut-il pas être séparé en $\ln a + \ln b$?
6. Une courbe contient des zéros réels. Peut-on simplement les supprimer pour tracer $\ln y$?

Corrections argumentées

1. -2 par définition des fonctions inverses.
2. Huit vaut 2^3 : il s'est écoulé trois demi-vies, donc trois heures chacune.
3. $2^3 = 8$ à A constant. La relation est une puissance, pas une proportionnalité simple.
4. $t = \ln 10 / 0,2 = 11,5129$ dans l'unité associée à k .
5. Cette propriété est fausse ; avec $a = b = 1$, le premier membre vaut $\ln 2$ et le second 0.
6. Non sans changer la population et la question. Il faut comprendre leur origine et choisir une représentation ou un modèle adapté.

Références et portée

- OpenStax : fonctions exponentielles et logarithmiques
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.

Partie 3 · Approximations et propagation des incertitudes

Prérequis et objectifs

Connaître dérivée, pourcentage et incertitude type. Distinguer approximation mathématique et hypothèse physique.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Utiliser une linéarisation locale.
- Propager des petites incertitudes.
- Contrôler l'erreur d'arrondi et la sensibilité.

Fondements du thème

Développement local

Pour une petite variation Δx autour de x , $f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x$. Cette approximation linéaire n'est valable que lorsque la courbure et l'amplitude de variation le permettent. Autour de zéro, $\exp(x) \approx 1+x$ et $\ln(1+x) \approx x$ pour $|x|$ petit.

Pour $x=0,01$, $\exp(x) \approx 1,01$ est précis ; pour $x=2$, l'approximation donne 3 alors que $\exp(2) \approx 7,39$. Une formule approchée doit donc toujours porter son domaine d'utilisation.

Propagation simple

Si $y=ax$ avec a exact, l'incertitude absolue sur y vaut $|a|$ fois celle sur x dans un modèle simple. Pour des produits et quotients, des règles de propagation dépendent des hypothèses : bornes maximales ou incertitudes statistiques, indépendance ou corrélation.

Il faut éviter de mélanger une incertitude-type, un intervalle de confiance et une simple amplitude minimale-maximale. Ils ne décrivent pas la même information. Une valeur très précise en apparence peut être peu exacte si la méthode est biaisée.

Méthode en six étapes

1. Écrire la grandeur recherchée.
2. Lister les données avec unités.
3. Choisir le modèle et ses hypothèses.
4. Transformer algébriquement avant de remplacer par les nombres.
5. Calculer puis contrôler dimensions, signe et ordre de grandeur.
6. Arrondir à la fin et répondre avec l'unité.

Développements et raisonnements

La tangente donne une approximation locale

Pour une fonction suffisamment régulière, $f(x + h) = f(x) + f'(x)h$ plus un reste lié à la courbure. Négliger ce reste donne la linéarisation. Le fait que h semble petit en valeur absolue ne suffit pas : il faut le comparer à l'échelle de variation de la fonction. Une variation de 0,1 peut être petite autour de 100 et grande près d'un dénominateur nul.

Autour de zéro, $\exp(h) \approx 1 + h$, $\ln(1 + h) \approx h$ et $1/(1 + h) \approx 1 - h$. Les termes suivants expliquent le sens de l'erreur : l'exponentielle ajoute environ $h^2/2$; le logarithme retranche environ $h^2/2$. Ces approximations sont utiles pour estimer un ordre de grandeur, mais le résultat exact doit être préféré lorsque le calcul est simple et la variation non négligeable.

Sensibilités absolue et relative

Pour $y = f(x)$, une petite incertitude $u(x)$ donne $u(y) \approx$ valeur absolue de $f'(x)$ fois $u(x)$. Pour $y = ax^n$ avec a exact, l'incertitude relative est approximativement valeur absolue de n fois $u(x)/$ valeur absolue de x . Une puissance négative change le sens d'une variation systématique, mais pas le signe d'une incertitude, qui reste positive.

Pour $y = ab$, les incertitudes types indépendantes donnent une somme quadratique des contributions. Une borne maximale déterministe utilise une autre règle. Une incertitude élargie $k_u u$ combine un facteur de couverture avec une interprétation dépendant de la distribution et des degrés de liberté. Il ne faut pas appeler automatiquement « 95 % » une plage $\pm u$ ou $\pm 2u$ sans les conditions appropriées.

La covariance peut augmenter ou réduire une incertitude

Pour une différence $D = X - Y$, $\text{Var}(D) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y)$. Un décalage commun stable peut se compenser dans la différence, alors qu'il augmente la covariance positive. Pour une somme, le signe devant la covariance est positif. La même dépendance n'a donc pas le même effet selon l'opération.

Si deux mesures possèdent chacune $u = 1$ et une corrélation 0,9, l'incertitude type de leur différence est $\sqrt{2 - 1,8} = 0,4472$. Sous indépendance, elle serait 1,4142. Supposer l'indépendance sans connaître le protocole peut donc être trop prudent ou insuffisant selon la situation.

Arrondis et soustraction de nombres proches

Calculer la différence de deux nombres presque égaux peut amplifier l'effet de leurs erreurs relatives. Si l'on arrondit 1,004 et 1,001 à deux décimales avant soustraction, on obtient zéro alors que la différence vaut 0,003. Les chiffres de garde doivent être conservés jusqu'au résultat final. Une calculatrice ne corrige pas une perte d'information déjà introduite dans les données.

Une erreur relative est mal adaptée lorsque la valeur de référence est proche de zéro. Une petite erreur absolue peut alors produire un énorme pourcentage. Il faut choisir un indicateur cohérent avec la question, par exemple une tolérance absolue ou une échelle de référence non nulle.

Contrôle	Ce qu'il repère	Limite
Unités	Mélange de dimensions	Ne vérifie pas tous les coefficients
Ordre de grandeur	Facteurs mille ou puissances	Peut manquer une petite erreur

Contrôle	Ce qu'il repère	Limite
Cas limite	Sens physique	Dépend du domaine du modèle
Substitution	Erreur algébrique	Ne valide pas l'hypothèse initiale

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

Pour $h = 0,05$, $\exp(h)$ vaut 1,051271 et la linéarisation 1,05. L'erreur absolue est 0,001271, soit environ 0,121 % du résultat exact. À $h = 0,50$, l'exact vaut 1,648721 et l'approximation 1,50 : l'erreur relative atteint 9,02 %. Une même formule peut être excellente ou médiocre selon l'amplitude.

Une résistance hydraulique varie comme r^{-4} . Si le rayon augmente de 2 %, la linéarisation prédit une baisse de résistance de 8 %. Le calcul exact donne $1/1,02^4 = 0,923845$, soit une baisse de 7,6155 %. Pour une hausse de 20 %, le facteur exact est 0,482253, une baisse de 51,77 %, loin des 80 % prédits par la linéarisation. La règle du facteur quatre reste locale.

Un produit $y = ab$ utilise $a = 10$ avec $u(a) = 0,2$ et $b = 5$ avec $u(b) = 0,1$, indépendants. Les deux incertitudes relatives valent 2 %. L'incertitude relative du produit est $\sqrt{0,02^2 + 0,02^2} = 2,828$ %. Comme $y = 50$, $u(y) = 1,414$. Additionner 2 % + 2 % donnerait une approche de borne maximale, pas l'incertitude type sous indépendance.

Pour une différence entre 100,0 et 99,0 avec incertitudes types indépendantes de 0,2 chacune, $D = 1,0$ et $u(D) = 0,2828$. L'incertitude relative est 28,28 %, bien plus grande que celle de chaque mesure. Cette amplification explique pourquoi détecter une petite différence entre grands signaux demande une stratégie de mesure adaptée.

Approfondissement et contrôle du modèle

Incertitude sur une fonction non linéaire

Une transformation courbe peut rendre une incertitude asymétrique. Par exemple, transformer un intervalle positif de concentration par un logarithme ne donne pas nécessairement des écarts symétriques autour du logarithme de la valeur centrale. Une propagation linéaire remplace localement cette courbe par sa tangente ; elle perd cette asymétrie lorsque l'intervalle est large.

Une méthode par bornes transforme directement les limites si la fonction est monotone sur le domaine. Une simulation peut explorer une distribution de sortie à partir de distributions d'entrée explicites. Ni l'une ni l'autre ne dispense de connaître les dépendances entre entrées. Supposer arbitrairement leur indépendance peut donner une dispersion incorrecte.

Le résultat doit préciser la nature de l'information propagée : bornes possibles, incertitudes types ou distributions probabilistes. Une plage obtenue à partir de valeurs extrêmes ne devient pas un intervalle de confiance parce qu'elle est présentée avec deux bornes. Le langage utilisé est une partie de la validité du calcul, car il indique ce qu'un lecteur peut réellement conclure.



Mise à l'épreuve : La dérivée peut être nulle sans annuler l'incertitude

Problème. X est normal, centré, d'écart-type 1. On mesure $Y = X^2$. Une propagation au premier ordre autour de $x = 0$ donne $f'(0) = 0$. Peut-on conclure $u(Y) = 0$?

Résolution. Non : les réalisations de X^2 varient et restent positives. Ici $E(Y) = E(X^2) = 1$, alors que $f(E(X)) = 0$. Pour cette normale, $E(X^4) = 3$ et $\text{Var}(Y) = 3 - 1^2 = 2$, donc $u(Y) = \sqrt{2}$. L'approximation linéaire a supprimé le terme quadratique qui porte tout l'effet. Près d'un extremum, avec forte non-linéarité ou distribution dissymétrique, il faut examiner des ordres supérieurs ou propager les distributions. Ce cas mathématique explique une limite du calcul par dérivée, sans rendre ce calcul inutile dans son domaine.

Schéma de raisonnement

Approximer avec contrôle



Schéma de principe original • lire les conditions et limites dans le texte

Une approximation n'est pas une erreur si son domaine et sa précision sont adaptés. La propagation linéaire échoue près de certaines singularités ou pour de fortes incertitudes.

Exercices progressifs

1. Approcher $\ln(1,02)$ au premier ordre.
2. Pour $y = x^3$, une petite hausse de x de 1 % produit quelle hausse approximative de y ?
3. Deux erreurs types indépendantes de 2 et 3 se combinent en quelle incertitude pour une somme ?
4. Pourquoi ne pas arrondir chaque étape à un chiffre significatif ?
5. Une incertitude peut-elle être négative parce que la dérivée est négative ?
6. Quel contrôle révèle le mieux une formule de résistance qui tend vers zéro lorsque le rayon tend vers zéro ?

Corrections argumentées

1. Environ 0,02 ; l'exact vaut 0,019803, ce qui montre la petite correction quadratique.
2. Environ 3 %. Le facteur exact $1,01^3$ donne 3,0301 %.
3. $\text{racine}(4 + 9) = \text{racine } 13 = 3,6056$.
4. Les pertes de précision s'accumulent et peuvent dominer le résultat final, surtout après des soustractions.
5. Non. La sensibilité signée décrit le sens de variation ; l'incertitude utilise une valeur absolue ou un carré.
6. Le contrôle d'un cas limite physique : réduire le passage doit augmenter la résistance dans ce modèle.

Références et portée

- OpenStax : approximations linéaires et différentielles
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.

Partie 4 · Systèmes linéaires et calcul numérique

Prérequis et objectifs

Savoir résoudre une équation affine, manipuler des fractions et comprendre une fonction continue. Les exemples portent sur des mélanges et calculs pédagogiques.

À l'issue de ce cours, vous devez pouvoir :

- Résoudre un système de deux équations.
- Interpréter unicité et conditionnement.
- Encadrer une racine et contrôler une approximation numérique.

Fondements du thème

Développements et raisonnements

Deux inconnues demandent des informations indépendantes

Un système linéaire de deux équations s'écrit $ax + by = e$ et $cx + dy = f$. Les coefficients décrivent les contributions de deux inconnues à deux contraintes. Une première équation peut représenter un volume total, une seconde une quantité de soluté. Chaque équation doit être homogène séparément ; leurs coefficients peuvent posséder des unités différentes selon la grandeur du bilan.

La substitution isole une inconnue dans une équation puis la remplace dans l'autre. L'élimination multiplie et combine les équations pour supprimer un terme. Ces opérations doivent s'appliquer aux deux membres. Multiplier une seule partie modifierait l'ensemble des solutions. Une fois les inconnues obtenues, les réinjecter dans les deux équations vérifie le calcul.

Déterminant et interprétation géométrique

Le déterminant $\Delta = ad - bc$ indique si les deux contraintes sont indépendantes dans un système carré de deux inconnues. S'il est non nul, une solution unique existe. S'il est nul, les deux droites sont parallèles ou confondues : le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité. Deux mesures identiques répétées comme deux équations ne créent pas une information indépendante sur deux inconnues.

Les formules explicites sont $x = (ed - bf)/\Delta$ et $y = (af - ec)/\Delta$ quand Δ est non nul. Elles sont utiles, mais un bilan physique simple se résout souvent plus lisiblement par substitution. Le choix de méthode doit préserver les unités et permettre un contrôle clair.

Une solution unique peut rester très sensible

Si deux contraintes sont presque proportionnelles, leur intersection peut changer beaucoup sous de petites perturbations des données. Le système est alors mal conditionné pour estimer les inconnues. Le déterminant seul n'est pas un indicateur universel indépendant des unités, mais sa proximité de zéro relativement aux échelles choisies alerte dans un petit exemple.

Cette distinction sépare erreur de calcul et manque d'information. Un ordinateur peut résoudre le système avec de nombreuses décimales sans rendre les données plus précises. La stratégie peut

consister à choisir des mesures davantage indépendantes, améliorer la précision ou reconnaître l'incertitude sur les paramètres.

Chercher une racine sans formule explicite

Résoudre $f(x) = 0$ numériquement consiste à approcher un point où la fonction s'annule. Si f est continue sur $[a ; b]$ et change de signe entre les bornes, au moins une racine existe. La dichotomie coupe l'intervalle en deux, garde la moitié qui conserve le changement de signe et recommence. La largeur est divisée par deux à chaque étape.

Après n divisions, la largeur vaut $(b - a)/2^n$. Le milieu possède une erreur d'encadrement au plus égale à la moitié de cette largeur si la racine cherchée est dans l'intervalle. Cette garantie repose sur la continuité et sur le maintien du signe. Un changement de signe à travers une discontinuité, comme $1/x$ autour de zéro, ne garantit pas une racine.

Newton et ses limites

La méthode de Newton utilise la tangente : $x_{\text{suivant}} = x - f(x)/f'(x)$. Elle peut converger vite près d'une racine simple avec un point initial adapté. Mais une dérivée nulle ou très petite, un point de départ mal choisi ou un domaine restreint peuvent produire une divergence ou une valeur inadmissible. Une convergence annoncée par un logiciel doit être contrôlée par le résidu $f(x)$, le domaine et éventuellement un encadrement.

Un petit résidu ne signifie pas toujours une petite erreur sur x si la fonction est très plate. Inversement, une petite variation entre deux itérations peut venir d'une stagnation numérique. Il faut distinguer critère d'arrêt algorithmique et précision scientifique des données.

Interpolation et extrapolation

Entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , l'interpolation affine donne $y = y_1 + (y_2 - y_1)(x - x_1)/(x_2 - x_1)$. Elle suppose localement une évolution linéaire. En dehors de l'intervalle, la même formule constitue une extrapolation, souvent plus fragile. Deux points définissent une droite mais ne démontrent pas que le phénomène soit réellement linéaire.

Méthode	Atout	Condition à vérifier
Substitution	Lecture simple du bilan	Coefficient permettant l'isolement
Élimination	Suppression systématique d'une inconnue	Opérations sur les deux membres
Dichotomie	Encadrement contrôlable	Continuité et changement de signe
Newton	Convergence parfois rapide	Dérivée et point initial adaptés

La précision finale doit rester cohérente avec celle des mesures. Une solution numérique à dix décimales n'est pas une justification pour publier dix décimales lorsque les concentrations d'entrée sont connues à quelques pourcents.

Atelier de calcul et analyse de sensibilité

On mélange x mL d'une solution à 2 unités/mL et y mL à 8 unités/mL pour obtenir 100 mL à 5 unités/mL, volumes additifs. Le système est $x + y = 100$ et $2x + 8y = 500$. Substituer $x = 100 - y$ donne $200 + 6y = 500$, donc $y = 50$ et $x = 50$. Les volumes sont positifs et la concentration cible est entre les deux concentrations initiales, contrôles physiques nécessaires.

Si la concentration cible était 9 unités/mL avec les mêmes stocks et sans autre opération, le système donnerait $y = 116,667$ et $x = -16,667$. La solution algébrique existe mais le volume négatif est physiquement inadmissible. Le contrôle du domaine évite de transformer une impossibilité de préparation en instruction erronée.

Pour résoudre $x^2 - 2 = 0$ sur $[1 ; 2]$, la dichotomie teste 1,5, dont le carré dépasse 2, puis 1,25, dont le carré est inférieur. La racine reste dans $[1,25 ; 1,5]$. Après dix divisions de l'intervalle initial, sa largeur vaut $1/1024 = 0,0009765625$. L'erreur maximale du milieu est la moitié, sans demander une formule explicite de racine carrée.

Newton, parti de $x_0 = 1$, donne $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1,4166667$ et $x_3 = 1,4142157$. Le résidu au troisième point est proche de 0,000006. La convergence est rapide ici, mais elle dépend de la fonction et du départ ; cet exemple ne justifie pas d'utiliser Newton sans contrôle dans tous les problèmes.

Enfin, les systèmes $x + y = 2$ et $x + 1,001y = 2,001$ donnent $x = y = 1$. Modifier seulement le second membre de la deuxième équation à 2,002 donne $y = 2$ et $x = 0$. Une perturbation de 0,001 d'une donnée suffit à doubler une inconnue : les contraintes presque parallèles sont peu informatives pour séparer x et y .

Approfondissement et contrôle du modèle

Résidu, erreur de solution et précision des données

Le résidu d'un système est la différence entre le membre gauche calculé et les données du membre droit. Un résidu petit vérifie l'exécution numérique, mais une solution peut rester très incertaine si de petites perturbations des données déplacent fortement l'intersection. Le conditionnement appartient au problème ; la stabilité de l'algorithme appartient à la méthode de calcul.

Il faut donc distinguer trois niveaux : les équations représentent-elles correctement le phénomène, leurs données sont-elles assez informatives, et l'algorithme les résout-il correctement ? Un résultat peut réussir le troisième niveau et échouer aux deux premiers. Cette séparation évite d'attribuer à une précision machine une valeur scientifique qu'elle ne possède pas.

Dans un rapport, donner les hypothèses, les données et les contrôles est souvent plus utile que publier beaucoup de décimales. Une estimation arrondie accompagnée de son domaine et de sa sensibilité est plus interprétable qu'un nombre long sans ces informations.

Mise à l'épreuve : Un résidu nul ne garantit pas la robustesse

Problème. Résoudre $x + y = 2$ et $x + 1,001y = 2,001$. Remplacer ensuite seulement 2,001 par 2,002 dans la seconde équation.

Résolution. En soustrayant les équations initiales, $0,001y = 0,001$, d'où $y = 1$ et $x = 1$. Après modification, $0,001y = 0,002$ donne $y = 2$ et $x = 0$. Une variation de donnée de 0,001 a produit une variation de solution d'une unité. Les deux solutions peuvent avoir des résidus nuls pour leurs données

respectives : cela ne prouve pas l'insensibilité aux erreurs de mesure. Les équations presque parallèles portent une information presque redondante. Ajouter des décimales au solveur ne remplace pas une meilleure information expérimentale.

Schéma de raisonnement

Résolution numérique contrôlée

1. Modèle et domaine • 2. Informations indépendantes • 3. Méthode • 4. Résidu et encadrement • 5. Précision admissible

Le schéma distingue calcul et qualité des données. La réussite d'un algorithme ne garantit pas l'identification précise des paramètres.

Exercices progressifs

1. Résoudre $x + y = 7$ et $x - y = 1$.
2. Le système $x + y = 2$ et $2x + 2y = 5$ possède-t-il une solution ?
3. Après quatre dichotomies d'un intervalle de largeur 8, quelle largeur reste-t-il ?
4. Pourquoi un changement de signe de $1/x$ sur $[-1 ; 1]$ ne prouve-t-il pas une racine ?
5. Interpoler entre $(0 ; 10)$ et $(4 ; 18)$ à $x = 3$.
6. Que vérifier après une solution numérique affichée par un logiciel ?

Corrections argumentées

1. Additionner donne $2x = 8$, donc $x = 4$ et $y = 3$. Les deux équations sont satisfaites.
2. Non. Doubler la première impose un second membre de 4, incompatible avec 5. Les droites sont parallèles distinctes.
3. $8/2^4 = 0,5$. L'erreur maximale du milieu serait 0,25 si l'encadrement est valide.
4. La fonction est discontinue et non définie en zéro. L'hypothèse de continuité du théorème manque.
5. La pente vaut 2 ; $y = 10 + 2 \times 3 = 16$.
6. Le domaine, les unités, les résidus dans les équations initiales, la stabilité aux perturbations et la précision des données.

Références et portée

- OpenStax : méthode de Newton
- Source 2 : www.bipm.org

Sources consultées le 1er octobre 2026 pour les notions signalées. Développements, situations et calculs pédagogiques OSSIK ; données fictives. La concordance complète avec les supports universitaires de l'année et la relecture scientifique humaine restent à réaliser. Les modèles biomédicaux ne fournissent aucune décision thérapeutique individuelle.